18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Ein und sechzigster Band.

In vier Heften.

61

Berlin, 1863.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des ein und sechzigsten Bandes.

Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Vertheilung der Electricität. Von Herrn *R. Lipschitz* zu Bonn. . . . . Seite 1

Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Gravitation. Von Demselben. 22

Ueber eine der Theilung der Zahlen ähnliche Untersuchung und deren Anwendung auf die Theorie der quadratischen Reste. Von Herrn *Stern* zu Göttingen. 66

Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form $\Pi(x, y)\,dx$, in welcher $\Pi(x, y)$ eine beliebige rationale Function ist, und zwischen x und y eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht. Von Herrn *S. Aronhold*. . . . . — 95

Ueber das *Pfaff*sche Problem. Zweite Abhandlung. Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe. . . . . — 146

Das Potential eines homogenen rechtwinkligen Cylinders. Von Herrn *O. Röthig*. . . . . — 180

Bemerkung zu der vorstehenden Abhandlung. Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe. . . . . — 187

Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe. . . . . — 195

Ueber atmosphärische Strahlenbrechung. Von Herrn *Kummer*. (Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.) . — 263

Der *Abel*sche Satz. Von Herrn *E. Heine* zu Halle. . . . . — 276

Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekular-physikalischen Fernewirkungen und der Bewegung der Elektricität in Leitern. Von Herrn *G. Roch*. . . . . — 283

Ueber die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung
$$Rr+Ss+Tt+U(s^2-rt)=V.$$
Von Herrn *George Boole* zu Cork in Irland. . . . . Seite 309
Zur Theorie der quadratischen Reste. Von Herrn *Stern* zu Göttingen. . . — 334
Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten. Von Herrn *E. Franke* zu Bernburg. . . . . — 350
Ueber einige bestimmte Integrale. Von Herrn *E. Heine* zu Halle a. S. . . — 356
Note sur la réalité des racines d'une équation quadratique. Par M. *A. Cayley* à Londres. . . . . — 367
Geometrisches. Von Herrn *Joh. Nic. Bischoff* zu München. . . . . — 369
Ueber die Perioden, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n=1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist. Von Herrn *Fuchs*. . . — 374

Druckfehlerverzeichniss.

Band 59, pag. 243, Zeile 6 v. o. statt dieselbe lese man dieselben.
- 59, - 244, Formel (7.) im Index, statt $R=r$ lese man $r=R$.
- 59, - 247, Z. 4 v. u. statt erfüllt lese man gefüllt.
- 59, - 251, Z. 1 v. u. statt $2\beta b$ lese man $2\beta b^3$.
- 59, - 259, Z. 20 v. o. statt $c_2=c_3=\infty$ lese man $c=c'=\infty$.
- 59, - 259, Z. 21 v. o. statt $\frac{c_2}{\sin^2 mc_2}+\frac{c_3}{\sin^2 mc_3}$ lese man $\frac{c}{\sin^2 mc}+\frac{c'}{\sin^2 mc'}$.
- 59, - 270, Z. 13 v. o. statt $b^2=a^2\frac{b+3\beta}{b+\beta}$ lese man $a^2=b^2\frac{b+3\beta}{b+\beta}$.
- 61, - 278, Z. 11 v. u. ist f als Factor zu x in den Nenner zu setzen.

Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Vertheilung der Electricität.

(Von Herrn *R. Lipschitz* zu Bonn.)

Wenn ein System von electrischen Leitern, deren jedem ein bestimmtes Quantum Electricität mitgetheilt ist, sich unter dem Einflusse von beliebigen erregenden Kräften befindet, so bildet die Frage nach dem electrischen Zustande des Systems die allgemeinste Aufgabe der electrischen Vertheilung, falls die Gestalt, die Anzahl und die gegenseitige Lage der Leiter vollkommen unbeschränkt ist. Es ist nun der Zweck dieser Mittheilung zu zeigen, dass die bei dieser Aufgabe zu überwindende Schwierigkeit nicht in der Anzahl oder der relativen Lage sondern allein in der Gestalt der Leiter liegt, und eine directe Auflösung der Aufgabe darauf zu gründen, dass für jeden einzelnen Leiter, ohne Rücksicht auf seine Stellung in dem System, zwei Fundamentalaufgaben gelöst werden. Die eine derselben bezieht sich auf die einer bestimmten Electricitätsmenge entsprechende Vertheilung *) in dem Leiter selbst, die zweite auf die einer bestimmten Electricitätsmenge entsprechende Vertheilung in einem anderen Leiter, dessen Gestalt aus der Gestalt des gegebenen Leiters nach einem einfachen Gesetze hergeleitet wird. Legt man der inneren und der äusseren Seite einer Kugelfläche die Eigenschaft eines Spiegels bei, so befindet sich das Bild von jedem Punkte des Raumes in einem zweiten Punkte, der mit dem ersten auf demselben vom Kugelmittelpunkte aus gezogenen radius vector und in solcher Entfernung von diesem liegt, dass das Product der Abstände beider Punkte gleich dem Quadrate des Kugelradius ist. Die Gestalt des zu construirenden Leiters ist nun das zu einer beliebigen Kugelfläche gehörende Spiegelbild des gegebenen Leiters, und die für dasselbe gestellte Aufgabe liefert unmittelbar die Bestimmung der Induction des gegebenen Leiters durch einen electrischen Massenpunkt, der im Centrum jener Kugelfläche anzunehmen ist.

*) Dieser Ausdruck soll hier und im Folgenden die Bedeutung haben, dass dem Leiter eine bestimmte Electricitätsmenge mitgetheilt ist und dass keine äusseren Kräfte auf denselben vertheilend wirken.

Das Princip der sphärischen Spiegelung, welches ich zu dem angegebenen Behufe verwendet habe, ist meines Wissens zuerst von Herrn *William Thomson* in einem an Herrn *Liouville* gerichteten Briefe ausgesprochen (*S. Liouvilles* Journal Bd. X, p. 364 ff.). In zwei anderen Briefen (Bd. XII, p. 256 ff. dess. Journals) hat Herr *W. Thomson* die hier einschlagenden Relationen analytisch ausgedrückt und ihre wichtige Anwendung auf die *Laplace*sche Differentialgleichung dargelegt *). In einer Note, welche dem letzten dieser Briefe unmittelbar folgt, behandelt dann Herr *Liouville* die betreffenden Fragen in der Weise, dass er von einem allgemeineren Gesichtspunkte ausgeht und in den Zusammenhang zwischen dem Prinzip der sphärischen Spiegelung und der *Laplace*schen Differentialgleichung tiefer eindringt. Wiewohl nun die soeben genannten Arbeiten eine vollständige Darstellung dieses Princips enthalten, so habe ich mir doch erlaubt, dasselbe noch einmal in Kürze zu entwickeln, da ich glaubte, das Lesen des vorliegenden und des diesem folgenden Aufsatzes dadurch bequemer zu machen.

Nach der hier geltend gemachten Auffassung scheinen diejenigen Formen von Leitern einer besonderen Beachtung werth zu sein, deren sphärisches Spiegelbild eine Gestalt derselben Gattung wird; denn bei diesen fallen die erwähnten beiden Fundamentalaufgaben in eine zusammen. Zu dieser Classe gehören die Formen, deren Begrenzung allein aus Kugelflächen besteht, wenn man nämlich die Ebene unter diesem Namen mitbegreift. Die Vertheilung, die einer gegebenen Electricitätsmenge entspricht, ist für die ganze Kugelfläche und für das kreisförmig begrenzte Segment einer Kugelfläche bekannt; also sind bei einem System von Leitern, von denen ein Theil die eine, der andere Theil die andere Gestalt hat, die Voraussetzungen erfüllt, von denen die Bestimmung der electrischen Vertheilung abhängt.

Bei dieser Veranlassung muss ich erwähnen, dass mir bei Abfassung der beiden Aufsätze, welche im 58sten Bande dieses Journals erschienen sind und welche die Vertheilung der Electricität in einer Kreisscheibe und einem Kugelflächensegment betreffen, die erwähnten Briefe des Herrn *W. Thomson* (und demnach auch das am Schlusse des letzten derselben p. 264 gegebene Resultat) nicht bekannt waren, und dass ich auch in diesem Augenblick nur dieses eine Resultat, weitere über diesen Gegenstand von ihm gegebene Ausführungen aber nicht kenne. Wegen der auf das Kugelflächensegment bezüglichen Auf-

*) Vergl. auch Cambridge and Dublin mathematical Journal Vol. III, p. 141, p. 266; Vol. IV, p. 276; Vol. V, p. 1.

gabe beziehe ich mich deshalb auf die Formel (IV.) p. 166 im 58sten Bande dieses Journals. Da aber in diesem Aufsatze die Induction des Segments durch einen electrischen Massenpunkt der Aufgabe, auf die es hier ankommt, vorangeht, so schien es mir angemessen, dieselbe hier ohne jene Voraussetzung zu behandeln, und dafür genügt die Kenntniss der electrischen Vertheilung in einer Kreisscheibe, welcher eine gewisse Electricitätsmenge mitgetheilt ist. Mittelst der sphärischen Spiegelung ergiebt sich dann aus der Lösung dieser Aufgabe die Theorie des inducirten Kugelflächensegments.

§. 1.

Ich beginne mit einigen Betrachtungen über die Transformation einer beliebigen Function U von drei Veränderlichen x', y', z' durch Einführung von drei neuen Veränderlichen x, y, z, die zu den ursprünglichen in einer besonderen Beziehung stehen. Es sollen nämlich die Grössen x', y', z' solche Functionen der Grössen x, y, z sein, dass wenn man die vollständigen Differentiale derselben bildet

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial y}dy + \frac{\partial x'}{\partial z}dz,$$

$$dy' = \frac{\partial y'}{\partial x}dx + \frac{\partial y'}{\partial y}dy + \frac{\partial y'}{\partial z}dz,$$

$$dz' = \frac{\partial z'}{\partial x}dx + \frac{\partial z'}{\partial y}dy + \frac{\partial z'}{\partial z}dz,$$

der Bruch $\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ gleich einer endlichen Function von x, y, z wird. Da dieselbe wesentlich positiv sein muss, so kann sie als vierte Potenz einer reellen Grösse q aufgefasst werden. und man sieht leicht, dass die gestellte Forderung mit der Erfüllung von folgenden Gleichungen identisch ist:

$$(1.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2 = q^4, \\ \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)^2 = q^4, \\ \left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^2 = q^4, \\ \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Jetzt handelt es sich um den Nachweis der Relation

$$(2.) \qquad \Sigma \frac{\partial^2(qU)}{\partial x^2} = \Sigma \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} U + q^5 \Sigma \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2},$$

wo die Summenzeichen auf die Buchstaben x, y, z oder respective x', y', z' gehen, und wo U auf der linken Seite durch Substitution der Werthe von x', y', z' eine Function von x, y, z geworden ist *). Hierbei kann man die etwas umständliche Rechnung vermeiden, indem man von einem der Variationsrechnung entlehnten Verfahren Gebrauch macht.

Aus den Gleichungen (1.) folgt allgemein die Gleichung

$$(3.) \qquad \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 = q^4 \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x'}\right)^2$$

und, wenn ω eine andere beliebige Function von x', y', z' bedeutet, die durch Einführung der Werthe von x', y', z' in eine Function von x, y, z übergeht, die Gleichung

$$(4.) \qquad \Sigma \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} = q^4 \Sigma \frac{\partial U}{\partial x'} \frac{\partial \omega}{\partial x'}.$$

Man multiplicire nun beide Seiten derselben mit dem Element $q^2 \partial x \partial y \partial z$, und integrire nach x, y, z innerhalb solcher Grenzen, dass die Functionen U und ω sammt ihren ersten Differentialquotienten überall endlich und stetig bleiben; ferner gelte für die Function ω die Einschränkung, an jenen Grenzen selbst zu verschwinden. In dem zweiten Integral ist es zweckmässig statt x, y, z die Integrationsvariabeln x', y', z' einzuführen, dadurch wird das Element $\partial x \partial y \partial z$ gleich dem Element $\partial x' \partial y' \partial z'$ dividirt durch die Functionaldeterminante $\Sigma \pm \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial z}$, welche vermöge der Gleichungen (1.) den Werth $\pm q^6$ annimmt, und man erhält die Gleichung

$$(5.) \qquad \iiint \partial x \partial y \partial z \, q^2 \Sigma \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \pm \iiint \partial x' \partial y' \partial z' \Sigma \frac{\partial U}{\partial x'} \frac{\partial \omega}{\partial x'}.$$

Durch theilweises Integriren hat man

$$\int \partial x \, q^2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \left[q^2 \frac{\partial U}{\partial x} \omega\right] - \int \partial x \frac{\partial \left(q^2 \frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} \omega,$$

und

$$\int \partial x' \frac{\partial U}{\partial x'} \frac{\partial \omega}{\partial x'} = \left[\frac{\partial U}{\partial x'} \omega\right] - \int \partial x' \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} \omega,$$

---

*) S. den Aufsatz des Herrn *Liouville* in dessen Journal Bd. XII, p. 288 ff.

ferner dieselben Gleichungen mit y, z statt x, und mit y', z' statt x', folglich, weil ω durch Substitution der Grenzen verschwindet,

$$(6.)\quad \iiint \partial x\,\partial y\,\partial z\,\Sigma \frac{\partial\left(q^2\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x}\omega = \pm\iiint \partial x'\,\partial y'\,\partial z'\,\Sigma\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2}\omega.$$

Ersetzt man nun wieder auf der rechten Seite das Element $\partial x'\,\partial y'\,\partial z'$ durch den Werth $\pm q^6\,\partial x\,\partial y\,\partial z$, so kommt

$$(7.)\quad \iiint \partial x\,\partial y\,\partial z\left(\Sigma\frac{\partial\left(q^2\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} - q^6\,\Sigma\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2}\right)\omega = 0,$$

und es muss, weil ω bis auf die Bedingung an den Grenzen des Integrals Null zu sein ganz beliebig gewählt werden kann, der Factor von ω unter dem Integralzeichen verschwinden, d. h. es ist

$$(8.)\quad \Sigma\frac{\partial\left(q^2\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} - q^6\,\Sigma\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial\left(q^2\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} = 2q\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + q^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2};$$

befreit man daher die linke Seite der Gleichung (8.) von dem gemeinschaftlichen Theiler q und addirt zu derselben den Ausdruck $\Sigma\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}U - \Sigma\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}U = 0$, so entsteht die zu beweisende Gleichung (2.)

$$\Sigma\frac{\partial^2(qU)}{\partial x^2} = \Sigma\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}U + q^5\,\Sigma\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2}.$$

Dieselbe wird nun auf ein specielles System von Functionen angewendet werden, bei denen $\Sigma\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$ ist, so dass sie in die einfachere Gestalt

$$(9.)\quad \Sigma\frac{\partial^2(qU)}{\partial x^2} = q^5\,\Sigma\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2}$$

übergeht. Diese Functionen sind durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(10.)\quad \begin{cases} x' = \mathfrak{x} + \frac{k^2(x-\mathfrak{x})}{r^2}, \\ y' = \mathfrak{y} + \frac{k^2(y-\mathfrak{y})}{r^2}, \\ z' = \mathfrak{z} + \frac{k^2(z-\mathfrak{z})}{r^2}, \end{cases}$$

bei denen k, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ beliebige Constanten bedeuten, und

$$r^2 = (x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2$$

gesetzt ist *). Da die Ausführung einer kleinen Rechnung für den Bruch $\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dx^2+dy^2+dz^2}$ den Werth $\frac{k^4}{r^4}$ liefert, so sind die für die Functionen x', y', z' aufgestellten Bedingungen erfüllt, die Grösse q wird gleich $\frac{k}{r}$ und daher nach einer bekannten Eigenschaft dieser Function $\Sigma\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=0$. Wenn man jetzt den eingeführten Grössen die geometrische Bedeutung beilegt, dass in Bezug auf ein System rechtwinkliger Coordinaten x, y, z die Constanten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einem Punkte A, die Variabeln x, y, z einem Punkte B, die Variabeln x', y', z' einem Punkte B' entsprechen, und dass der Werth k eine bestimmte Länge bezeichnet, so drücken die Gleichungen (10.) offenbar die Beziehung zwischen den Punkten B und B' aus, dass beide mit dem Punkte A in derselben geraden Linie und auf derselben Seite von A liegen, und dass das Product der Abstände AB und AB' gleich dem Quadrate der Länge k ist. Denkt man sich also um den Punkt A als Centrum mit dem Radius k eine Kugelfläche beschrieben, die auf ihrer inneren und ihrer äusseren Seite die Wirkung eines Spiegels ausübe, so ist der Punkt B' das zu dieser Kugelfläche gehörende Spiegelbild des Punktes B, und umgekehrt der Punkt B das Spiegelbild des Punktes B'. In Folge der Gleichungen (1.) hat dieses Abbildungsprincip die Wirkung, dass, wenn man in unendlicher Nähe eines beliebigen Punktes B zwei andere Punkte B_1 und B_2 annimmt, und die Abbildungen der drei Punkte respective mit B', B_1', B_2' bezeichnet, das Dreieck BB_1B_2 und das Dreieck $B'B_1'B_2'$ einander ähnlich werden. Ausgenommen ist allein der Fall, dass der Punkt B mit dem Punkte A zusammenfällt, indem dann der Punkt B' sich von A unendlich entfernt. (Vgl. auch den Aufsatz des Herrn *Liouville* in dessen Journal Bd. XII, pag. 280 ff.)

Es sei jetzt S der Inbegriff einer beliebigen Anzahl von geschlossenen oder nicht geschlossenen Flächen, deren keine den Punkt A enthält, und es werde von jedem Punkte B in S auf die angegebene Weise das sphärische Spiegelbild B' entworfen, dann bilden diese Punkte B' im Allgemeinen **)

*) S. den Brief des Herrn *W. Thomson* in *Liouvilles* Journal Bd. XII, pag. 259 ff. und pag. 275 ff.

**) Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn mehrere der in S enthaltenen Flächen sich ins Unendliche erstrecken, und Flächen dieser Art sind von der folgenden Betrachtung auszuschliessen. Auch in S' können keine solche Flächen vorkommen, weil der Punkt A niemals in eine Fläche S fallen darf.

eine ebenso grosse Anzahl gesonderter Flächen, als in S enthalten sind, und der Inbegriff derselben S' kann das sphärische Spiegelbild von S genannt werden. Ueber S' sei eine beliebige electrische Massenschicht von der Dichtigkeit λ im Punkte B' ausgebreitet, und das Potential ihrer Wirkung auf einen beliebigen Punkt des Raumes B' heisse u. Wenn man nun für S eine electrische Belegung annimmt, bei der die Dichtigkeit ϱ im Punkte B aus der Dichtigkeit λ in dem entsprechenden Punkte B' durch die Gleichung *)

$$(11.) \qquad \varrho = \frac{k^2}{r^3}\lambda$$

erhalten wird, so gilt für das Potential v derselben in Bezug auf einen beliebigen Punkt B des Raumes die Gleichung

$$(12.) \qquad v = \frac{1}{r}u,$$

wo das Potential u sich auf den dem Punkte B entsprechenden Punkt B' bezieht.

Den Beweis dieses Satzes, der das Fundament der folgenden Untersuchung bildet, kann man auf die von *Dirichlet* aufgestellten characteristischen Eigenschaften eines Flächenpotentials gründen **). Das Potential u, als Function des Punktes B' oder der Coordinaten x', y', z' betrachtet, hat offenbar diese Eigenschaften, weil es von einer auf mehreren endlichen Flächen vertheilten Masse herrührt; und wenn man in dem Ausdruck $\frac{1}{r}u$ für die Coordinaten x', y', z' respective ihre Werthe aus den Gleichungen (10.) einsetzt, so lässt sich zeigen, dass derselbe eine Function der Coordinaten x, y, z oder des Punktes B wird, welche die characteristischen Eigenschaften des Potentials einer über die Fläche S vertheilten Masse von der Dichtigkeit $\varrho = \frac{k^2}{r^3}\lambda$ besitzt, d. h. dass der Ausdruck $\frac{1}{r}u$ mit dem Potentiale v identisch ist. Dies geschieht wie folgt:

1. Die Function $\frac{1}{r}u$ der Coordinaten x, y, z ist im ganzen Raume endlich und stetig, und ihre nach x, y, z genommenen ersten Differentialquotienten sind dies ebenfalls mit Ausnahme der Flächen S, weil die Function u

---

*) S. den Aufsatz des Herrn *Liouville* in dessen Journal Bd. XII, pag. 287 ff.

**) S. den Monatsbericht d. Berl. Ac. v. J. 1846, pag. 211. In seinen Vorlesungen ersetzte *Dirichlet* die in unendlicher Entfernung von den Flächen zu erfüllenden Bedingungen (4.) durch die eine, dass das Potential daselbst verschwinde.

der Coordinaten x', y', z' und ihre nach x', y', z' genommenen ersten Differentialquotienten mit Ausnahme der Flächen S' dieselben Eigenschaften haben. Einer besonderen Erörterung bedarf die Function $\frac{1}{r}u$ nur für die Punkte B, welche dem Punkte A sehr nahe liegen. Da die entsprechenden Punkte B' sich von demselben in's Unendliche entfernen, so denke man sich um A als Mittelpunkt mit dem Radius l eine Kugel beschrieben, welche die Flächen S' einschliesst; dann kann man den Werth von u für die Punkte B' dieser Kugelfläche in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende stets convergente Reihe entwickelt annehmen, und erkennt leicht, dass die Ausdrücke

$$\frac{1}{r}u, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial y}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial z}$$

auch bei wachsendem l endlich und stetig bleiben, worin die zu erweisende Thatsache besteht.

2. Wenn man die in dem Punkte B' von S' errichtete Normale mit p' bezeichnet, so gilt für die Dichtigkeit λ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p'}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{\partial u}{\partial p'}\right)_{-\varepsilon} = -4\pi\lambda,$$

wo die Hinzufügung von $+\varepsilon$ die Seite der Fläche andeuten soll, auf welcher p' positiv genommen ist, und $-\varepsilon$ die entgegengesetzte Seite. Wenn nun die in dem Punkte B von S errichtete Normale mit p bezeichnet wird, so hat der Differentialquotient $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial p}$ zu beiden Seiten von S ebenfalls verschiedene Werthe, und es kommt auf die Bildung ihrer Differenz an. Es sei $\psi(x', y', z') = 0$ die analytische Gleichung einer beliebigen von den in S' enthaltenen Flächen, so wird nach Einsetzung der Werthe von x', y', z' aus (10.) dieselbe Gleichung $\psi(x', y', z') = 0$ das sphärische Spiegelbild dieser Fläche, also den entsprechenden Theil von S darstellen. Hieraus folgen die Gleichungen

$$(11^a.) \qquad \frac{\partial u}{\partial p'} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial \psi}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial \psi}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial z'}\frac{\partial \psi}{\partial z'}}{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z'}\right)^2\right)}},$$

$$(11^b.) \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}u + \frac{1}{r}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right)}},$$

nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie. Setzt man aber in (4.) die Function ψ an die Stelle von ω, u an die Stelle von U, so kommt

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} = q^4 \Sigma \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial \psi}{\partial x'},$$

setzt man in (3.) ψ an die Stelle von U,

$$\Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = q^4 \Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right)^2,$$

und daher folgt aus (11^b.) die Gleichung

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}u + \frac{1}{r}q^2\frac{\partial u}{\partial p'},$$

in welcher für q sein Werth $\frac{k}{r}$ einzuführen ist. Die Grössen $\frac{1}{r}$, $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}$, u haben zu beiden Seiten von S denselben Werth, und so entsteht für die aufzusuchende Differenz der Ausdruck

$$(11^c.) \qquad \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial p}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial p}\right)_{-\varepsilon} = -4\pi\frac{k^2}{r^3}\lambda = -4\pi\varrho,$$

welcher zu beweisen war.

3. Die Function $\frac{1}{r}u$ genügt im ganzen Raume ausserhalb der Flächen S der *Laplace*schen Differentialgleichung

$$\Sigma\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial x^2} = 0;$$

denn wenn man in der Gleichung (9.) die Function u für U substituirt, so verschwindet ihre rechte Seite wegen der Gleichung $\Sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = 0$ für jede Lage des Punktes B' mit Ausnahme der Flächen S', und die linke Seite geht durch die Relation $q = \frac{k}{r}$ in die Form $k\Sigma\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial x^2}$ über. Daraus folgt aber die Gültigkeit der Gleichung $\Sigma\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{\partial x^2} = 0$ in dem angegebenen Umfange.

4. Die Function $\frac{1}{r}u$ nähert sich der Null, sobald der Punkt B in's Unendliche rückt, weil alsdann das Spiegelbild B' des Punktes B sich dem

Punkte A unendlich nähert und die Function u gegen einen festen Werth convergirt, während r über jede Grenze hinauswächst.

Aus diesen allgemeineren Betrachtungen kann man sogleich den folgenden Satz ableiten, der zur Reduction des allgemeinsten Problems der electrischen Vertheilung auf einfachere Probleme führen soll:

I. *Es sei S der Inbegriff der Oberflächen, durch welche ein gegebenes System von electrischen Leitern begrenzt wird, A der Ort eines electrischen Massenpunktes, der sich nicht in S befindet, so erhält man die Dichtigkeit* ϱ *der durch diesen inducirten Massenschicht im Punkte B mittelst der Gleichung* $\varrho = \frac{k^2}{r^3}\lambda$, *und das Potential v dieser Massenschicht in Bezug auf den Punkt B (welches in S gleich der reciproken Entfernung des betreffenden Punktes vom Punkte A werden muss) mittelst der Gleichung* $v = \frac{1}{r}u$, *wenn man für die um das Centrum A mit dem Radius k beschriebene Kugelfläche das Spiegelbild B' des Punktes B, das Spiegelbild S' der Flächen S entwirft, und mit u das auf den Punkt B' bezogene Potential einer electrischen Belegung von S' bezeichnet, das in jedem Punkte von S' den Werth der Einheit hat, mit* λ *aber die Dichtigkeit dieser Massenschicht im Punkte B' von S'.*

Bei diesem Satze ist daran zu erinnern, dass ein Potential u von der geforderten Eigenschaft stets existirt, und zwar nur *ein* solches.

Da es für manche Zwecke vortheilhaft ist, für die Summe der eben bestimmten Dichtigkeit ϱ einen übersichtlichen Ausdruck zu haben, so führe ich folgenden Satz an *):

II. *Wenn man diejenige electrische Belegung des Oberflächencomplexes S kennt, welche in jedem Punkte von S den Potentialwerth Eins hervorbringt, so liefert der Werth ihres Potentials Q im Punkte A die dem Potentiale v entsprechende Electricitätsmenge.*

Vermöge eines von *Gauss* bewiesenen Theorems **) sieht man nun sogleich ein, dass für jeden Punkt A, der ganz ausserhalb der mit S bezeichneten Oberfläche liegt, der Werth von Q ein positiver echter Bruch, und dass für jeden Punkt A, der von einer oder von mehreren dieser Flächen umschlossen ist, der Werth von Q gleich der Einheit ist. Dasselbe gilt in Bezug auf das Potential u und den mit S' bezeichneten Complex von Ober-

*) Der Beweis lässt sich genau demjenigen nachbilden, den ich Bd. LVIII, p. 154 für einen speciellen Fall dieses Satzes gegeben habe.

**) Allgemeine Lehrsätze etc. Art. 26.

flächen, und daraus folgt weiter, dass die Dichtigkeit λ auf denjenigen Flächen, welche von anderen umschlossen werden, den Werth Null, auf solchen, die von keiner Fläche umschlossen werden, stets einen positiven Werth hat. Mithin hat die Dichtigkeit ϱ auf den Spiegelbildern dieser Flächen beziehungsweise ebenfalls den Werth Null oder einen positiven Werth.

§. 2.

Wenn ein gegebenes System von n electrischen Leitern unter der Einwirkung von beliebigen Nichtleitern steht, so muss das Potential der Belegungen des Systems und das Potential der erregenden Nichtleiter zusammengenommen auf der Oberfläche eines jeden Leiters einen vorgeschriebenen constanten Werth annehmen: das ist die nothwendige und zureichende Bedingung, um das electrische Gleichgewicht des Systems zu bestimmen. Statt der n constanten Potentialwerthe können die den einzelnen Leitern mitgetheilten Electricitätsmengen gegeben sein; wegen des bequemeren Ausdrucks habe ich indessen das erstere vorausgesetzt.

Wenn man den Inbegriff der Oberflächen der n Leiter, wie vorhin, mit S bezeichnet, für den mit der electrischen Masse μ versehenen Punkt A eines jeden Nichtleiters nach Angabe des Satzes I. die Function v bestimmt, und über alle Elemente der Nichtleiter die Summe

$$-\Sigma\mu v$$

ausdehnt, so stellt diese Summe offenbar dasjenige Potential einer Belegung von S dar, dessen Werth mit dem Werthe des Potentials der Nichtleiter addirt in S die Summe Null hervorbringt. Diese Belegung entspricht dem Vorgange, dass alle Leiter des Systems nach ausgeführter Induction mit der Erde leitend verbunden werden. Die allgemeine Behandlung der Aufgabe verlangt nun zu dieser Belegung eine andere hinzuzufügen, die für sich allein in jedem Leiter den vorgeschriebenen constanten Potentialwerth hervorruft. Da aber die Auffindung einer solchen Belegung des mit S bezeichneten Complexes von Oberflächen, wenn man von der Gestalt der Leiter absieht, eine allgemeinere Aufgabe ist als die Bestimmung des Potentials u für das Spiegelbild S' von S, von der die Bildung von v abhängt, und diese als speciellen Fall in sich schliesst, so genügt es, von der ersteren allein zu sprechen.

Hier werde ich ein Princip anwenden, das für die Bestimmung der gegenseitigen Wirkung von zwei Leitern von *Murphy* angegeben ist*), das aber mit Leichtigkeit auf ein System von Leitern ausgedehnt werden kann. Es seien die Oberflächen der einzelnen Leiter mit S_1, S_2, ... S_n bezeichnet, und die einem jeden vorgeschriebenen constanten Werthe des aufzusuchenden Potentials V resp. mit C_1, C_2, ... C_n, dann zerlege ich das System S in zwei Gruppen, von denen die eine allein den Leiter S_1 enthält, die andere die übrigen Leiter umfasst und mit S_a bezeichnet werden soll. Wenn nun erstens eine Belegung ϱ_1 von S_1 gegeben ist, deren Potential v_1 in S_1 den Werth C_1 hat, und wenn zweitens eine Belegung ϱ_a von S_a bekannt ist, deren Potential v_a in S_2, S_3, ... S_n resp. die Werthe C_2, C_3, ... C_n annimmt, dann kann das Potential V durch gegenseitige successive Einwirkung der als unbhängig betrachteten beiden Systeme gebildet werden. Die Massenschicht ϱ_1 inducire in S_a eine Massenschicht ϱ_a', deren Potential v_a' in S_a den Werth $-v_1$ hat, darauf inducire diese Massenschicht ϱ_a' in S_1 eine Belegung ϱ_1'', deren Potential v_1'' in S_1 den Werth $-v_a'$ hat, und dies Verfahren werde in infinitum fortgesetzt. Ferner errege die Massenschicht ϱ_a in S_1 eine Massenschicht ϱ_1', deren Potential v_1' in S_1 den Werth $-v_a$ hat, dann errege diese Belegung ϱ_1' in S_a eine neue Belegung ϱ_a'', deren Potential v_a'' in S_a den Werth $-v_1'$ annimmt, u. s. f. Dann ist die Summe $v_1+v_a'+v_1''+v_a'''+\cdots$ das Potential einer Belegung des Systems S, welches in S_1 den Werth C_1, in S_a den Werth Null hat, und die Summe $v_a+v_1'+v_a''+v_1'''+\cdots$ ist das Potential einer Belegung von S, welches in S_1 den Werth Null, in S_2, S_3, ... S_n resp. die Werthe C_2, C_3, ... C_n annimmt; folglich wird das gesuchte Potential $V=v_1+v_a'+v_1''+v_a'''+\cdots+v_a+v_1'+v_a''+v_1'''+\cdots$, dem Aggregat von jenen beiden Summen. Von der Convergenz der aufgestellten Reihe überzeugt man sich durch die Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen, indem man sowohl in der Massenschicht ϱ_1 wie in der Belegung ϱ_a die positiv electrischen Elemente von den negativ electrischen sondert, und die durch beide inducirten neuen Schichten getrennt verfolgt. Z. B. der positive Theil der Massenschicht ϱ_1 inducirt eine rein negative Massenschicht in S_a, und dieser Theil von ϱ_a' erregt wieder eine rein positive Massenschicht in S_1 u. s. f. Auf diese Weise entstehen für S_1 lauter rein positive Massenschichten, deren

---

*) Elementary principles of the theories of electricity heat and molecular actions. Part I, Chapter V, pag. 93.

Electricitätsmengen abnehmen wie eine geometrische Reihe, und für S_a lauter rein negative Schichten, von denen das gleiche gilt. Folglich bilden die von diesen Partialschichten herrührenden Potentiale convergirende Reihen; und da der für V angegebene Ausdruck aus acht Reihen dieser Art zusammengesetzt werden kann*), so ist die Convergenz desselben festgestellt.

Um die Potentiale v'_a, v'_1, v''_a, v''_1, ... aus den gegebenen Potentialen v_1 und v_a ableiten zu können, ist es nothwendig und ausreichend, das Potential der Belegungen von S_a und S_1 zu kennen, die durch einen beliebig gelegenen electrischen Massenpunkt inducirt werden. Nach dem Satze I. des vorigen §. hängt diese Kenntniss davon ab, für die aus einem beliebigen Centrum entworfenen sphärischen Spiegelbilder S'_a und S'_1 von S_a und S_1 die Aufgabe des constanten Potentials zu lösen; die Bildung von v_a und v_1 ist aber nichts anderes, als die Beantwortung derselben Frage für die Flächen S_a und S_1. Also verlangt die Aufgabe des constanten Potentials bei dem aus n Leitern bestehenden Systeme S, oder die Aufstellung von V, die Auflösung der gleichen Aufgabe in Bezug auf die Leiter S_1, S'_1 und die aus $(n-1)$ Leitern bestehenden Systeme S_a, S'_a. Behandelt man diese beiden Systeme in der gleichen Weise, so erfolgt die Absonderung eines neuen Leiters, und dies Verfahren ist so lange fortzusetzen, bis die Anzahl n der Leiter des gegebenen Systems erschöpft ist. Wenn daher für jeden Leiter und für das durch die wiederholte sphärische Spiegelung erzeugte Bild eines jeden Leiters die Aufgabe des constanten Potentials gelöst ist, so setzt sich das Potential V aus lauter bekannten Bestandtheilen zusammen.

Nach einer früheren Bemerkung wird das im Satze I. definirte Potential v unter derselben Annahme durch dieselbe Methode aus bekannten Elementen gebildet. Mithin ist auch das Aggregat

$$-\Sigma\mu v + V$$

bekannt, d. i. das Potential derjenigen Belegung des Systems S, durch welche die allgemeinste Aufgabe der electrischen Vertheilung befriedigt wird.

Die für jeden einzelnen Leiter des Systems aufgestellte Grundforderung lässt sich jetzt noch dahin vereinfachen, dass nur für den Leiter selbst und für das durch einmalige sphärische Spiegelung hervorgebrachte Bild die Aufgabe des constanten Potentials gelöst werde. Denn die Wirkung einer beliebig

*) Der Umstand, dass von diesen acht Reihen je zwei aus lauter verschwindenden Gliedern bestehen müssen und noch zwei andere dieselbe Eigenschaft haben können, darf unberücksicht bleiben, da er die Kraft des Beweises nicht aufhebt.

oft wiederholten sphärischen Spiegelung ist stets durch eine sphärische Spiegelung, eine ebene Spiegelung und durch eine Verschiebung des Bildes im Raume zu ersetzen, wie sogleich gezeigt werden soll; die Reflexion durch einen ebenen Spiegel liefert aber ein Bild, das dem Gegenstande entweder congruent oder doch symmetrisch ist, und man erhält stets die einer bestimmten Electricitätsmenge entsprechende Vertheilung für das Bild, indem man in jedem Punkte seiner Oberfläche die electrische Dichtigkeit genau ebenso annimmt, wie in dem correspondirenden Punkte des abgebildeten Leiters, für den die gleichlautende Aufgabe gelöst ist.

Um die Zusammensetzung von zwei sphärischen Spiegelungen darzustellen, sei ausser der um das Centrum A mit dem Radius k beschriebenen Kugel eine zweite gegeben, deren Centrum M von A um die Länge g absteht, und deren Radius l heisst. Den Anfangspunkt der Coordinaten lege ich in den Punkt A, die x-Axe in die Linie AM, die y-Axe aber so, dass der abzuspiegelnde Punkt B in die xy-Ebene fällt. Die Spiegelung durch die erste Kugel giebt das Bild B' von B, das die Coordinaten x', y' hat; die Spiegelung von B' durch die zweite Kugel bringe das Bild B'' mit den Coordinaten x'', y'' hervor. Setzt man nun wie gewöhnlich $\sqrt{-1}=i$, so gelten die Gleichungen

$$x'+y'i=\frac{k^2}{x-yi}, \qquad x''-g+y''i=\frac{l^2}{x'-g-y'i},$$

folglich ist, indem man $x'-y'i$ eliminirt,

$$x''+y''i = g-\frac{l^2}{g}+\frac{\frac{l^2k^2}{g^2}}{-(x+yi)+\frac{k^2}{g}},$$

d. h. man erhält das Bild B'' durch Combination einer sphärischen Spiegelung mit einer Spiegelung durch die Ebene $x=\frac{k^2}{g}$, und durch eine Verschiebung im Sinne der x-Axe. Die letztere fällt fort, wenn $g-\frac{l^2}{g}=\frac{k^2}{g}$ ist; dann liegt der Punkt A ausserhalb der zweiten Kugel, die von A aus an diese Kugel gezogenen Tangenten haben die Länge k, der von den Berührungspunkten gebildete Kreis giebt die spiegelnde Ebene, und der Mittelpunkt A_1 und der Radius dieses Kreises geben respective den Mittelpunkt und den Radius $\frac{lk}{g}$ der spiegelnden Kugelfläche an, durch welche das Bild B'' des Punktes B hervorgebracht werden soll. Verbindet man den Punkt A_1 mit B, den Punkt

M mit B', so erkennt man auch leicht die Richtigkeit der späterhin zu benutzenden Proportion

$$AB : A_1B = AM : B'M.$$

Das bei der Zusammensetzung von zwei sphärischen Spiegelungen gefundene Resultat enthält aber die Rechtfertigung der oben aufgestellten Behauptung über die Zusammensetzung von beliebig vielen sphärischen Spiegelungen.

§. 3.

Da das sphärische Spiegelbild einer Kugelfläche immer wieder eine Kugelfläche wird, und da die gleichförmige Vertheilung von Electricität über die ganze Kugelfläche ein constantes Potential in der Kugelfläche hervorbringt, so lässt sich nach den gegebenen Regeln die Vertheilung der Electricität in einem aus lauter ganzen Kugeln bestehenden Systeme bestimmen, welches auch ihre relative Stellung sein möge. In Bezug auf die Bildung des Potentials, das mit V bezeichnet wurde, ist alsdann zu bemerken, dass dieselbe nur Summationen und keine Integration involvirt, wie es sich auch in dem Falle von zwei Kugeln gezeigt hat.

Aus der erwähnten Eigenschaft der Kugelfläche folgt aber auch, dass jeder Leiter, der ausschliesslich von Kugelflächen begrenzt ist, durch sphärische Spiegelung in eine Gestalt von derselben Eigenschaft verwandelt wird. Dabei bleiben, wie leicht einzusehen, die Neigungswinkel an allen Kanten, wo zwei Flächen zusammenstossen, ungeändert *), und die Formen, für welche man in jedem einzelnen Falle die Aufgabe der einem constanten Potential entsprechenden Vertheilung lösen muss, sind dadurch in engere Grenzen eingeschlossen.

Um diese Vertheilung bei dem kreisförmig begrenzten Segment einer Kugelfläche zu finden, kann man folgenden Weg einschlagen.

Wie in der angeführten Abhandlung sei das gegebene Segment mit S, die Fläche des Kreises, der den Rand bildet, mit F bezeichnet, und es bedeute w das Potential einer Belegung des Kreises F, welches in F den Werth der Einheit hat. Weil dasselbe von einer über eine Ebene ausgebreiteten Massenschicht herrührt, so hat es bekanntlich die Eigenschaft, dass die Werthe des senkrecht gegen die Ebene genommenen Differentialquotienten von w zu beiden Seiten derselben gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

---

*) Vgl. pag. 6.

Setzt man daher eine Function W des Punktes B in dem von den Flächen F und S eingeschlossenen Raume T gleich $2-w$, ausserhalb desselben gleich w, so ist W eine in unendlicher Entfernung von S verschwindende Potentialfunction für den ganzen Raum mit Ausnahme der Fläche S. Es bezeichne nun M den Mittelpunkt der Kugelfläche, von welcher S ein Abschnitt ist, g_0 den Radius derselben, r die Entfernung des Punktes B von M, und B_1 das zu dieser Kugel gehörende Spiegelbild von B. Bei dieser Spiegelung geht offenbar jeder Punkt von S in sich selbst über, und wenn W_1 den Werth von W im Punkte B_1 bedeutet, so ist nach dem Satze I. in §. 1 die Function $\frac{g_0}{r} W_1$ eine Potentialfunction des Punktes B von denselben Eigenschaften wie die Function W. Diese Eigenschaften behält aber auch das Aggregat $\frac{1}{2}W+\frac{g_0}{2r} W_1$, und der Werth desselben zu beiden Seiten von S ist gleich der Einheit. Also wird die Function u, welche diesem Aggregat gleich sein soll,

$$(13.) \qquad u = \tfrac{1}{2}W+\frac{g_0}{2r} W_1$$

das auf den Punkt B bezogene Potential derjenigen electrischen Belegung von S, welche demselben in S den Werth der Einheit giebt, und gerade dieses wurde gesucht.

Mittelst des Satzes I. aus §. 1. kann nun aus diesem Potential u das Potential v der in dem Leiter S durch einen electrischen Massenpunkt A inducirten Massenschicht abgeleitet werden. Nachdem um den Punkt A als Centrum mit dem Radius k eine Kugel beschrieben ist, construire man das Spiegelbild S' des Segments S, das ein eben solches Kugelflächensegment wird, und bilde für dieses den eben gefundenen Ausdruck u, indem man an die Stelle des Punktes B das aus dem Centrum A entworfene Spiegelbild desselben B' setzt; diese Substitution mag durch Hinzufügung des Zeichens * bei allen Elementen des Ausdrucks angedeutet werden. Dann hat das gesuchte Potential v im Punkte B diesen Werth:

$$(14.) \qquad v = \frac{1}{2r}\left(W^*+\frac{g_0^*}{r^*} W_1^*\right).$$

Ehe ich mich aber zu der analytischen Darstellung dieses Werthes wende, die den Schluss dieser Mittheilung bilden soll, ist auf eine allgemeinere Folgerung hinzuweisen, die sich an die Gleichung (13.) knüpft und in der Einleitung ausgesprochen ist. Wenn nämlich ein System von Leitern zum Theil aus vollen Kugelflächen, zum Theil aus kreisförmig begrenzten Kugel-

flächensegmenten besteht, so lässt sich die Vertheilung der Electricität nach den Regeln des vorigen §. vollständig darstellen.

Um in die Gleichung (14.) den Ausdruck des Potentials w einzuführen, lege ich den Coordinatenanfang in den Mittelpunkt O des Kreises F, die x und die y-Axe in diese Ebene, die z-Axe also in die Senkrechte auf derselben. Bedeutet nun c den Radius des Kreises F, s einen positiven, μ einen positiven oder negativen Werth, so hat man die Gleichungen *)

$$(15.) \qquad -c^2(\mu+si)^2 = x^2+y^2+(z-ci)^2,$$

$$(16.) \qquad w = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{s}\right).$$

Aus dieser Form von w folgt ohne Rechnung, dass das in (14.) gegebene Potential v keine andere Transcendente als arctg enthält, und damit scheint mir für diese Eigenschaft desselben der eigentliche Grund aufgefunden zu sein.

Aus der Gleichung (16.) folgt

$$2-w = \frac{2}{\pi}\left(\pi-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{s}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-1}{s}\right),$$

wenn man den Bogen zwischen den Grenzen Null und π nimmt, wie in der Folge immer geschehen soll. Mithin gilt die Gleichung

$$(17.) \qquad W = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pm 1}{s}\right)$$

mit dem oberen Zeichen, wenn der Punkt B ausserhalb des Raumes T liegt, und mit dem unteren Zeichen, wenn der Punkt B im Raume T liegt; und wenn s_1 den Werth von s für den Punkt B_1 bedeutet, so findet die Gleichung

$$(17'.) \qquad W_1 = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pm 1}{s_1}\right)$$

für den Punkt B_1 unter den gleichlautenden Bedingungen statt. Zu der expliciten Darstellung von v ist nun zunächst die Bildung von W^* erforderlich. Der Gleichung (15.) gemäss hat man s^* durch die Gleichung

$$(18.) \qquad -c^{*2}(\mu^*+s^*i)^2 = x^{*2}+y^{*2}+(z^*-c^*i)^2$$

bestimmt, deren rechte Seite durch die Coordinaten x, y, z des Punktes B, die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Punktes A und die Constanten c, g_0 auszudrücken ist. Der reelle Theil $x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}-c^{*2}$ liefert, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Kugel, deren Mittelpunkt im Punkte O^* liegt, deren Radius

*) Vgl. Bd. LVIII, p. 159, Formel (10.) d. Journals, wo ν statt μ, τ statt si steht.

gleich c^* ist, die mithin durch den Kreis F^* halbirt wird; der rein imaginäre Theil $-2z^*c^*i$ giebt, gleich Null gesetzt, die Gleichung der Ebene, in welcher der Kreis F^* befindlich ist. Sucht man daher das dem Centrum A zugehörende Spiegelbild dieser Kugel und dieser Ebene auf, so werden die Functionen des Punktes B, welche in diesen Flächen Null sind, von den in Rede stehenden Functionen des Punktes B' nur durch leicht anzugebende Factoren unterschieden sein, und man kann die Gleichungen jener Spiegelbilder zur Bildung der betreffenden Functionen benutzen.

Das Spiegelbild der Ebene, in welcher der Kreis F^* liegt, ist offenbar diejenige Kugelfläche, welche durch den Rand des Segments S und durch den Punkt A selbst hindurchgeht, und das Spiegelbild der Kugelfläche, welche durch den Kreis F^* rechtwinklig geschnitten wird, ist nach einer früheren Bemerkung *) eine zweite Kugelfläche, welche durch die zuerst construirte im Rande des Segments S ebenfalls rechtwinklig geschnitten wird.

Demnach befriedigen die Coordinaten x, y, z eines Punktes B, der sich auf diesen Flächen befindet, resp. die Gleichungen

$$(19.)\quad \begin{cases} \varphi = \mathfrak{z}\left(x^2+y^2+z^2-c^2-\dfrac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-c^2}{\mathfrak{z}}\,z\right)=0, \\ \psi = (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-c^2)\left(x^2+y^2+z^2-c^2+\dfrac{4c^2\mathfrak{z}z}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-c^2}\right)=0. \end{cases}$$

Setzt man hier die Werthe von x, y, z ein, welche sich durch Auflösung der Gleichungen (10.) ergeben,

$$x=\mathfrak{x}+\frac{k^2(x'-\mathfrak{x})}{r'^2},\quad y=\mathfrak{y}+\frac{k^2(y'-\mathfrak{y})}{r'^2},\quad z=\mathfrak{z}+\frac{k^2(z'-\mathfrak{z})}{r'^2},$$

wo

$$(x'-\mathfrak{x})^2+(y'-\mathfrak{y})^2+(z'-\mathfrak{z})^2 = r'^2$$

gesetzt ist, so erscheint nach einer leichten Reduction der Ausdruck φ als der Abstand zwischen dem Punkte B' und der Ebene F^*, in den Factor $\frac{k^2}{r'^2}\delta^2$ multiplicirt, und der Ausdruck ψ als die Differenz zwischen dem Quadrate der Entfernung des Punktes B' von dem Centrum O^* und der Grösse $\frac{k^4}{\delta^4}c^2$, mit $\frac{\delta^4}{r'^2}$ multiplicirt. Der Kürze halber ist der Ausdruck

$$(20.)\qquad \delta^4 = 4(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)\mathfrak{z}^2+(\mathfrak{z}^2+c^2-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)^2$$

eingeführt. Offenbar ist also $\frac{k^4}{\delta^4}c^2$ gleich dem Quadrate des Radius c^* des

*) Vergl. p. 6.

Kreises F^*, und man hat die Gleichungen

$$(21.)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{k^2}{r'^2}\delta^2 z^*, \\ \psi = \dfrac{\delta^4}{r'^2}(x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}-c^{*2}). \end{cases}$$

Um mittelst derselben die rechte Seite von (18.) umzuformen, wird man r'^2 durch $\frac{k^4}{r^2}$ ersetzen und den vorstehenden Gleichungen diese Gestalt geben:

$$x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}-c^{*2} = \frac{c^{*2}}{c^2}\frac{\psi}{r^2},$$

$$z^* c^* = \frac{c^{*2}}{c}\frac{\varphi}{r^2};$$

dann kommt

$$x^{*2}+y^{*2}+(z^*-c^* i)^2 = \frac{c^{*2}}{c^2 r^2}(\psi-2\varphi c i),$$

oder durch Substitution der Ausdrücke für ψ und φ

$$(22.)\quad x^{*2}+y^{*2}+(z^*-c^* i)^2 = \frac{c^{*2}}{c^2 r^2}(x^2+y^2+(z+ci)^2)(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+(\mathfrak{z}-ci)^2).$$

Dadurch erhält man den gewünschten Ausdruck *) für W^*:

$$(23.)\quad \begin{cases} W^* = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\pm 1}{s^*}\right), \\ -(\mu^*+s^* i)^2 = \dfrac{(x^2+y^2+(z+ci)^2)(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+(\mathfrak{z}-ci)^2)}{c^2 r^2}. \end{cases}$$

Die Darstellung von W_1^* verlangt, dass man vermöge der Kugelfläche, deren Mittelpunkt M^* und deren Radius g_0^* ist, das Spiegelbild B'' von B' construire und den Punkt B'' in W^* an die Stelle von B' treten lasse. Dies Verfahren wird sehr vereinfacht, wenn man den Punkt A ausserhalb der Kugelfläche annimmt, zu der S gehört, und dann den willkürlichen Radius k gleich der Tangente setzt, die von A aus an diese Kugelfläche gelegt werden kann. Dadurch wird S' ein Segment derselben Kugelfläche, so dass die Punkte M^* und M zusammenfallen und $g_0^* = g_0$ ist. Also gilt von dem Spiegelbilde B'' die in §. 2 durchgeführte Betrachtung, indem alle Buchstaben mit Ausnahme von l dieselbe Bedeutung behalten, l aber durch g_0 zu ersetzen ist.

---

*) Um denselben mit den Bezeichnungen des angeführten Aufsatzes übereinstimmend zu machen, ist $si=\sigma$, $s^* i=\sigma^*$, $\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+(\mathfrak{z}-ci)^2=-c^2(\nu+\tau)^2$, $r=c\sqrt{N}$ zu setzen.

Wenn demnach wieder A_1 das zu der um das Centrum M beschriebenen Kugel gehörende Bild von A ist, und wenn für die neue um das Centrum A_1 beschriebene Kugelfläche B_1' das Bild von B, S_1' das Bild von S ist, so erkennt man leicht, dass der Punkt B'' zu der Fläche S genau dieselbe Lage hat, wie der Punkt B_1' zur Fläche S_1'. Nennt man nun die Coordinaten des Punktes A_1 $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$, die Entfernung zwischen A_1 und B r_1, so entsteht durch die Vergleichung mit (23.) für W_1^* folgender Ausdruck *)

$$(24.)\quad \begin{cases} W_1^* = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\pm 1}{s_1^*}\right), \\ -(\mu_1^* + s_1^* i)^2 = \dfrac{(x^2+y^2+(z+ci)^2)(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{y}_1^2+(\mathfrak{z}_1-ci)^2)}{c^2 r_1^2}. \end{cases}$$

Endlich kommt in dem Ausdruck (14.) für v die Grösse $\frac{g_0^*}{rr^*}$ vor. Der Zähler derselben ist gleich g_0, der Nenner wegen der p. 15 erwähnten Proportion gleich dem Product der Entfernung r_1 in die Entfernung AM oder g, folglich $\frac{g_0^*}{rr^*} = \frac{g_0}{r_1 g}$. Mithin erhält das Potential v folgenden Werth **)

$$(25.)\quad v = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{r}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pm 1}{s^*}\right) + \frac{g_0}{gr_1}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pm 1}{s_1^*}\right)\right).$$

Nach einer Bemerkung, die bei Veranlassung des Ausdruckes W gemacht wurde, gilt bei $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pm 1}{s^*}\right)$ das obere Zeichen, wenn der Punkt B' ausserhalb des Raumes liegt, den die Flächen S' und F^* einschliessen, das untere Zeichen im entgegengesetzten Falle. Da aber, wenn man durch den Punkt A und den Rand von S eine Kugelfläche hindurchlegt, der Theil P derselben, in welchem A sich nicht befindet, das Spiegelbild von F^* ist, so darf man auch sagen: in $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pm 1}{s^*}\right)$ ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der Punkt B ausserhalb oder innerhalb des Raumes liegt, den das Segment S und das so eben construirte Segment P einschliessen. Für den

---

*) Zu dem bei (23.) angegebenen Zweck ist

$$s_1^* i = \sigma_1^*, \quad \mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{y}_1^2+(\mathfrak{z}_1-ci)^2 = -c^2(\nu_1+\tau_1)^2, \quad r_1 = c\sqrt{N_1}$$

zu setzen.

**) Der durch die Substitutionen

$$r = c\sqrt{N},\ r_1 = c\sqrt{N_1},\ \pm s^* = \frac{-\sigma\tau+\mu\nu}{\pm\sqrt{N}},\ \pm s_1^* = \frac{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}{\pm\sqrt{N_1}},\ \frac{g_0}{g} = \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}}$$

in die Darstellung Bd. LVIII, p. 161 übergeht.

Ausdruck $\operatorname{arctg}\left(\frac{\pm 1}{s_1^*}\right)$ hat man eine gleichlautende Bestimmung, wenn der Punkt A_1 an die Stelle des Punktes A tritt. Auch erkennt man leicht, dass der Ausdruck (25.) für v, welcher unter der Annahme, dass A ausserhalb der zu dem Mittelpunkt M gehörenden Kugelfläche liege, abgeleitet wurde, ebenso wohl gilt, wenn der Punkt A innerhalb derselben liegt und der Punkt A_1 den correspondirenden Bildpunkt bedeutet, der jetzt ausserhalb der Kugelfläche fällt. Denn da für einen in der Kugelfläche befindlichen Punkt B die Proportion $r : r_1 = g : g_0$ gilt, so kann v auch durch die Forderung bestimmt werden, dass es in S den Werth $\frac{g_0}{gr_1}$ annehme; dann spielt der Punkt A_1 die Rolle von A und man erhält einen Ausdruck für v, der mit dem in (25.) gegebenen identisch ist.

Die zu dem Potential v gehörende Dichtigkeit ϱ liefert die Gleichung (11.) $\varrho = \frac{k^2}{r^3}\lambda$; der Werth λ entsteht aber aus der dem Potential in (13.) entsprechenden Dichtigkeit *) $\frac{1}{2\pi^2 g_0}\left(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{s}\right)$, indem das Segment S in das Segment S' verwandelt wird. Für g_0^* hat man den *positiven* Werth $\frac{\pm k^2 g_0}{g^2 - g_0^2}$, also kommt für ϱ der *positive* Ausdruck

$$(26.) \qquad \varrho = \frac{\pm 1}{2\pi^2 g_0}\,\frac{g^2 - g_0^2}{r^3}\left(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s^*}\right) + \frac{1}{s^*}\right),$$

in welchem der Werth von s^* wieder aus der Gleichung (23.) zu entnehmen ist.

Bonn den 6ten November 1861.

---

*) S. das Resultat des Herrn *W. Thomson* in *Liouvilles* Journal Bd. XII, p. 264.

Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Gravitation.

(Von Herrn *Lipschitz* zu Bonn.)

Das Hülfsmittel der sphärischen Spiegelung, das in dem vorangehenden Aufsatze dazu diente, die Aufgaben der Vertheilung der Electricität einfacher zu behandeln, ist seinem Wesen nach nicht auf diejenigen Massen beschränkt, die über Flächen ausgebreitet sind, sondern liefert auch Beziehungen zwischen den Wirkungen von je zwei solchen Massen, die den Raum nach drei Dimensionen erfüllen und dem Gesetze der Schwere folgen. Bei der einen von diesen Massen kann die Dichtigkeit beliebig gegeben sein und zwar für jeden Punkt verschieden, bei der anderen wird sie aus der gegebenen Dichtigkeit nach einer gewissen Regel abgeleitet. Die allgemeinen Beziehungen zwischen den Wirkungen der beiden Massen werden im Folgenden auf den Fall Anwendung finden, dass die eine derselben einen Körper bildet, dessen Dichtigkeit in jedem Punkte einer Potenz der Entfernung von einem festen Punkte proportional ist, der ausserhalb des Körpers liegt. Beschreibt man um diesen festen Punkt als Centrum eine Kugelfläche, und entwirft das zu dieser gehörende Spiegelbild der Oberfläche des gegebenen Körpers, so entsteht die Oberfläche des zweiten Körpers, dessen anziehende Wirkung mit der Wirkung von diesem verglichen werden soll; die Dichtigkeit ist aber derjenigen Potenz der Entfernung jedes Punktes von dem festen Punkte proportional zu nehmen, deren Exponent, zu dem Exponenten, welcher bei dem ersten Körper gewählt worden, addirt, den negativen Werth der Zahl Fünf hervorbringt.

Bekanntlich ist es immer möglich, wenn man den ersten der bezeichneten Körper mit einer beliebigen geschlossenen Fläche umgiebt, die Wirkung desselben für Punkte des äusseren Raumes durch eine Massenvertheilung auf der Fläche selbst hervorzubringen. Während aber alle den ersten Körper umschliessenden Oberflächen diese Eigenschaft besitzen, so sind es, falls dies überhaupt angeht, nur gewisse im Innern des Körpers befindliche Flächen, die man so mit Masse belegen kann, dass deren Wirkung in Bezug auf die Punkte ausserhalb des Körpers die Wirkung des Körpers vertritt.

Wenn es endlich möglich ist, im Innern des Körpers eine *nichtgeschlossene Fläche* anzugeben, welche dieses leistet, so lässt sich beweisen, dass sie die einzige von dieser Beschaffenheit ist. Es zeigt sich nun, dass immer, wenn die Wirkung des ersten Körpers in dem bezeichneten Umfange durch die Wirkung einer Massenschicht ersetzt worden ist, die auf einer bestimmten Fläche ausgebreitet ist, die Aufgabe für den zweiten Körper leicht gelöst wird, nur muss eine den ersten Körper umgebende Fläche nicht zugleich den oben erwähnten festen Punkt einschliessen. Entwirft man das zu der beschriebenen Kugelfläche gehörende Spiegelbild der Fläche, die bei dem ersten Körper mit Masse belegt werden soll, so hat man gerade die Fläche, die zu dem gleichen Zweck bei dem zweiten Körper mit Masse zu belegen ist, und erhält mittelst eines einfachen Gesetzes die Dichtigkeit der zweiten aus der Dichtigkeit der ersten Massenvertheilung.

Wenn der erste Körper von einem *Ellipsoid* begrenzt und von gleichförmiger Dichtigkeit ist, so schliesst man leicht aus den bekannten Ausdrücken, die seine Wirkung darstellen, dass dieselbe in der erwähnten Weise durch die Wirkung einer Masse repräsentirt werden kann, die auf einer gewissen von einer Ellipse begrenzten ebenen Fläche vertheilt ist. Ich habe nun die Begrenzung des Körpers festgehalten, die Dichtigkeit der Masse den verschiedenen negativen Potenzen der Entfernung von dem festen Punkte proportional angenommen, und die Frage zu entscheiden gesucht, bei welchen Werthen des Exponenten *nichtgeschlossene Flächen* von der erwähnten Beschaffenheit existiren, und bei welchen nicht. Die angewendete Methode erlaubte, für *die sämmtlichen ungeraden Exponenten*, deren Zahlenwerth die Einheit übertrifft, die Frage bejahend zu beantworten und die betreffenden Flächen mit den dazugehörigen Belegungen aufzufinden; bei den übrigen Werthen des Exponenten lieferte dieselbe kein befriedigendes Resultat, doch stehe ich nicht an meine Ansicht dahin auszuprechen, dass dieser Unterschied kein zufällig durch die Methode hervorgerufener, sondern ein in der Natur der Sache begründeter ist. Bei den *ungeraden Werthen des Exponenten* ergaben sich ferner die Thatsachen, *dass die sämmtlichen in Rede stehenden nichtgeschlossenen Flächen in eine einzige zusammenfallen, und dass die Dichtigkeit für sämmtliche Massenschichten durch einen rein algebraischen Ausdruck dargestellt werden kann.*

§. 1.

Die Untersuchungen, welche jetzt mitgetheilt werden sollen, haben das Bedürfniss hervorgerufen, die Potentiale von Massen zu betrachten, welche sich nach einigen oder nach allen Richtungen in den unendlichen Raum erstrecken, und deren Dichtigkeit in einzelnen Punkten unendlich gross werden darf. Die Bedingungen, welche bei einer solchen Masse erfüllt sein müssen, damit der Begriff des Potentials ein fest bestimmter bleibe, lassen sich leicht erkennen. Erstens muss es möglich sein, von der Masse einen endlichen Raum H auszuscheiden, ausserhalb dessen die Dichtigkeit kleiner ist als ein beliebig klein, aber endlich gewählter Werth. Wenn man ferner um einen beliebigen Punkt B des Raumes H als Mittelpunkt eine Kugel beschreibt, welche diesen Raum einschliesst, und das Potential aller innerhalb der Kugel befindlichen Massen in Bezug auf den Punkt B bildet, so muss der Werth desselben sich einer festen Grenze nähern, sobald man den Kugelradius in's Unendliche wachsen lässt, und diese Grenze ist eben nichts Anderes als das Potential $\mathfrak{V}$ der ganzen Masse in Bezug auf den Punkt B. Beiläufig bemerke ich, dass, wenn die gegebene Masse den unendlichen Raum nach allen Richtungen erfüllt, die Dichtigkeit auf einem vom Punkte B aus gezogenen Radius vector schneller abnehmen muss, als das umgekehrte Quadrat der Entfernung des betreffenden Punktes vom Punkte B, wie leicht bewiesen werden kann. Endlich darf die Dichtigkeit der Masse in einzelnen Punkten nur so unendlich werden, dass das Potential $\mathfrak{V}$ für jeden Punkt, der in endlicher Entfernung von solchen Punkten liegt, einen endlichen Werth behält. Auf Massen von dieser Beschaffenheit kann man das von *Dirichlet* in dem Aufsatze „Sur un moyen général etc.“ Bd. XXXII, pag. 80 dieses Journals aufgestellte Theorem ausdehnen. Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes B, der Anfangspunkt derselben befinde sich im Raume H, dann besitzt das Potential $\mathfrak{V}$ folgende Eigenschaften:

1) Das Potential $\mathfrak{V}$ und seine ersten Differentialquotienten sind in dem ganzen Raume mit Ausnahme von einzelnen Punkten (in welchen die Dichtigkeit unendlich gross wird) endliche und stetige Functionen der Coordinaten x, y, z.

2) Der Ausdruck $\frac{\partial(s\mathfrak{V})}{\partial s}$, in welchem s die Entfernung des Punktes B vom Coordinatenanfange bedeutet, nähert sich mit wachsendem s der Null.

3) Für jeden einzelnen Punkt, in dem eine der Functionen $\mathfrak{V}$, $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}$ eine Unstetigkeit zeigt, und dessen Entfernung vom Punkte B mit σ

bezeichnet werden soll, hat der Ausdruck $\sigma^2 \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \sigma}$ bei abnehmendem σ die Null zur Grenze.

4) Bei $\mathfrak{V}$ kommt keine Unstetigkeit vor, die durch Abänderung des Werthes in einzelnen Punkten entfernt werden kann.

5) Die zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z^2}$ haben mit Ausnahme der erwähnten einzelnen Punkte und mit Ausnahme von gewissen Flächen (in denen sich die Dichtigkeit sprungweise ändert) überall endliche und eindeutige Werthe, und genügen

6) der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z^2} = -4\pi\nu,$$

in der ν die dem Punkte B entsprechende Dichtigkeit bedeutet.

Mittelst des *Green*schen Satzes kann nun der Nachweis geführt werden, den ich der Kürze halber übergehe, dass, wenn eine Function $\mathfrak{V}$ die in den fünf ersten Nummern ausgedrückten Eigenschaften besitzt, dieselbe mit dem Potential von derjenigen Massenvertheilung identisch ist, deren Dichtigkeit ν durch die Gleichung (6.) gefunden wird *); und es ist evident, dass diese Massenvertheilung alsdann eine solche ist, deren Potential nach dem oben aufgestellten Gesichtspunkte einen festen Begriff hat.

Diese Erweiterung des erwähnten *Dirichlet*schen Theorems werde ich anwenden, um aus dem Princip der sphärischen Spiegelung eine allgemeine Relation zwischen den Potentialen von zwei Massenvertheilungen abzuleiten. Die Dichtigkeit der ersten möge, wie vorhin, im Punkte B mit ν, ihr Potential mit $\mathfrak{V}$ bezeichnet werden, und dieselbe habe die angegebene Beschaffenheit. Man nehme nun einen beliebigen Punkt A an, beschreibe um diesen mit dem willkürlichen Radius k eine Kugelfläche, und denke sich dieser gemäss den ganzen Raum abgebildet, so dass der Punkt B' das Spiegelbild des Punktes B bezeichnet, und dass, wenn man, wie in der vorangehenden Abhandlung, die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte B, A, B' resp. mit x, y, z; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$; x', y', z' bezeichnet, auch die Gleichungen $(10.)_1$ gültig bleiben **). Für die Abbildung des Raumes construire man eine zweite

*) Vergl. *Riemann,* Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Art. 10.

**) Die Nummern der genannten Abhandlung sollen durch Hinzufügung dieses Zeichens $(\ )_1$ unterschieden werden.

Massenvertheilung, bei der die Dichtigkeit μ im Punkte B' aus der gegebenen Dichtigkeit ν im Punkte B durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(1.) \qquad \mu = \frac{k^4}{r'^5}\nu;$$

hier bedeutet r' wie früher den Werth der Linie AB'. Man bilde nun eine Function $\mathfrak{U}$, indem man in der Gleichung

$$(2.) \qquad \mathfrak{U} = \frac{1}{r'}\mathfrak{V}$$

statt x, y, z die folgenden Werthe einsetzt, die sich durch Auflösung der Gleichungen $(10.)_1$ ergeben:

$$(3.) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + \dfrac{k^2(x'-\mathfrak{x})}{r'^2}, \\ y = \mathfrak{y} + \dfrac{k^2(y'-\mathfrak{y})}{r'^2}, \\ z = \mathfrak{z} + \dfrac{k^2(z'-\mathfrak{z})}{r'^2}, \end{cases}$$

so ist $\mathfrak{U}$ das Potential der zweiten Massenvertheilung von der Dichtigkeit μ, bezogen auf den Punkt B'.

Um diese Behauptung zu rechtfertigen, soll gezeigt werden, dass der Ausdruck $\frac{1}{r'}\mathfrak{V}$, als Function der Grössen x', y', z' betrachtet, die characteristischen Eigenschaften des Potentials einer Massenvertheilung besitzt, deren Dichtigkeit μ durch die Gleichung (1.) bestimmt ist; bei der Aufzählung derselben wird die obige Reihenfolge beibehalten werden.

1) Der Ausdruck $\frac{1}{r'}\mathfrak{V}$ und seine ersten Differentialquotienten nach x', y', z' sind offenbar endliche und stetige Functionen von x', y', z' für den ganzen Raum mit Ausnahme der sphärischen Spiegelbilder von denjenigen Punkten B, in denen das Potential $\mathfrak{V}$ unstetig wird, und mit Ausnahme des Punktes A, in welchem vermöge der Gleichung $r' = 0$ eine Unstetigkeit vorkommen kann.

2) Wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt A legt, so ist s durch r' zu ersetzen, und der Ausdruck $\frac{\partial(s\mathfrak{V})}{\partial s}$ durch $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial r'}$; derselbe hat aber bei wachsendem r' die Null zur Grenze. Denn wenn wie früher die Linie AB mit r bezeichnet wird, so folgt aus der Gleichung $rr' = k^2$, dass $\frac{\partial r}{\partial r'} = -\frac{r^2}{k^2}$ und $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial r'} = \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial r'} = \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial r}\cdot\frac{-r^2}{k^2}$ ist, und die Grösse

$r^2\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial r}$ nähert sich mit abnehmendem r der Null, weil $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial r}$ im Allgemeinen ein endlicher Werth ist, und weil das Potential $\mathfrak{V}$ die Eigenschaft 3) besitzt, falls A ein Unstetigkeitspunkt ist.

3) Bei den Spiegelbildern der Unstetigkeitspunkte von $\mathfrak{V}$ ist die Bedingung $\lim.\sigma^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\mathfrak{V}\right)}{\partial\sigma}$ erfüllt, weil sie es für die Punkte selbst ist. Bei dem Punkte A dagegen hat man σ durch r' zu ersetzen und findet

$$\lim.r'^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\mathfrak{V}\right)}{\partial r'} = \lim.-\frac{\partial(r\mathfrak{V})}{\partial r} = 0$$

für $r'=0$ oder $r=\infty$, wegen der Eigenschaft 2) des Potentials $\mathfrak{V}$.

4) Diese Eigenschaft der Function $\frac{1}{r'}\mathfrak{V}$ folgt aus der entsprechenden Eigenschaft der Function $\mathfrak{V}$.

5) Das Gleiche gilt von dieser Nummer.

6) Den Werth der Summe $\Sigma\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r'}\mathfrak{V}\right)}{\partial x'^2}$ liefert aber die Gleichung (9.)$_1$

$$\Sigma\frac{\partial^2(qU)}{\partial x^2} = q^5\Sigma\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2},$$

indem man x, y, z resp. mit x', y', z' vertauscht (was immer gestattet ist), für q demgemäss den Werth $\frac{k}{r'}$ setzt, und statt U die Function $\mathfrak{V}$ schreibt; es kommt nämlich alsdann:

$$\Sigma\frac{\partial^2\left(\frac{k}{r'}\mathfrak{V}\right)}{\partial x'^2} = \frac{k^5}{r'^5}\Sigma\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial x^2}$$

und, weil $\Sigma\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial x^2}=-4\pi\nu$ ist,

$$\Sigma\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r'}\mathfrak{V}\right)}{\partial x'^2} = -4\pi\frac{k^4\nu}{r'^5} = -4\pi\mu,$$

wenn man die Gleichung (1.) benutzt.

Also ist die Function $\frac{1}{r'}\mathfrak{V}$ in der That mit dem Potentiale $\mathfrak{U}$ der zweiten Massenvertheilung von der Dichtigkeit μ identisch. Die Gleichung

$$\mu = \frac{k^4}{r'^5}\nu$$

zeigt übrigens, dass die Dichtigkeit μ im Punkte A gleich Null ist, wenn die

Dichtigkeit ν für $r' = 0$, d. h. für $r = \infty$ den Werth Null hat, oder wenn die erste Massenvertheilung nur einen *endlichen* Raum einnimmt, und sie zeigt zweitens, dass die Dichtigkeit μ für unendlich entfernte Punkte B' gleich Null ist oder unendlich klein wird, je nachdem die Dichtigkeit ν für $r = 0$, d. h. für den Punkt A, gleich Null oder von Null verschieden ist.

Ich mache jetzt die specielle Annahme, dass die erste Massenvertheilung auf einen endlichen Raum beschränkt sei und bezeichne die Grenzfläche desselben mit S; ferner sei die Dichtigkeit ν innerhalb desselben gleich der $(-p)^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung r zwischen den Punkten B und A. Da also in den Räumen innerhalb oder ausserhalb S der Werth von ν beziehungsweise gleich $\frac{1}{r^p}$ oder gleich Null ist, so wird zufolge der Gleichung (1.) die Dichtigkeit μ der zweiten Massenvertheilung in den correspondirenden Räumen den Werth r'^{p-5} oder Null annehmen, wenn man den Kugelradius k gleich der Einheit setzt. Hierbei ist es wesentlich, dass der Punkt A stets ausserhalb des durch die Fläche S begrenzten Raumes und auch nicht in der Fläche S selbst angenommen wird; denn nur so bleibt die Dichtigkeit ν überall endlich, und der Exponent p darf keiner Beschränkung unterworfen werden. Wenn das sphärische Spiegelbild *) der Fläche S mit S' bezeichnet wird, so entspricht dem Raume innerhalb S der Raum innerhalb S', und dem Raume ausserhalb S der Raum ausserhalb S'. Mithin ist die Dichtigkeit μ in dem durch die Fläche S' begrenzten Körper gleich der $(p-5)^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung r' des Punktes B' vom Punkte A, und befolgt ein Gesetz, das von dem Gesetze der Dichtigkeit μ in dem ersten Körper nur durch den Potenzexponenten unterschieden ist. Wenn man nun das betreffende Potential $\mathfrak{V}$ des ersten Körpers mit $\mathfrak{V}_{-p}$, das betreffende $\mathfrak{U}$ des zweiten Körpers mit $\mathfrak{U}_{p-5}$ bezeichnet, so geht die Gleichung (2.) in die folgende über:

$$(4.) \qquad \mathfrak{U}_{p-5} = \frac{1}{r'}\mathfrak{V}_{-p}.$$

Ein Satz von *Gauss* lehrt **), dass man statt einer beliebigen gegebenen Massenvertheilung, welche auf den inneren Raum einer geschlossenen Fläche $\mathcal{S}$ beschränkt ist, immer eine Massenvertheilung auf der Fläche selbst substituiren

---

*) Da im Folgenden ausschliesslich solche sphärische Spiegelungen vorkommen, bei denen A das Kugelcentrum und der Radius die Einheit ist, so wird dies nicht mehr besonders erwähnt werden.

**) Allgemeine Lehrsätze etc., art. 36.

kann mit dem Erfolge, dass das Potential der Wirkung der letzteren in Bezug auf alle Punkte des äusseren Raumes dem Potential der Wirkung der ersteren gleich wird; und zwar giebt es nur eine solche Massenvertheilung auf der Fläche Ψ. Wenn man daher in unserem Falle die Oberfläche S des ersten Körpers durch eine beliebige Fläche $\Psi^{(a)}$ einschliesst, so lässt sich für diese eine bestimmte Massenschicht $\nu^{(a)}$ angeben, deren Potential $\mathfrak{V}_{-p}^{(a)}$ in Bezug auf die Punkte B des äusseren Raumes gleich dem Werthe des Potentials $\mathfrak{V}_{-p}$ ist. Unter gewissen Umständen kann man aber den ausserhalb der Oberfläche S herrschenden Werth von $\mathfrak{V}_{-p}$, der daselbst die Gleichung

$$(5.) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_{-p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_{-p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_{-p}}{\partial z^2} = 0$$

befriedigt, in das Innere der Fläche S bis zu einer bestimmten geschlossenen Fläche $\Psi^{(i)}$ so fortsetzen, dass die Function der Gleichung (5.) genügt, und dass weder in dieser noch in ihren ersten Differentialquotienten nach x, y, z an irgend einer Stelle eine Unstetigkeit oder Mehrdeutigkeit vorkommt. Dann folgt aus den von *Gauss* aufgestellten Principien mit Leichtigkeit, dass für diese Fläche $\Psi^{(i)}$ ebenfalls eine bestimmte Massenbelegung $\nu^{(i)}$ existirt, deren Potential $\mathfrak{V}_{-p}^{(i)}$ für die Punkte des ausserhalb S liegenden Raumes mit dem Potential $\mathfrak{V}_{-p}$ zusammenfällt und für die Punkte des zwischen den Flächen $\Psi^{(i)}$ und S liegenden Raumes mit der erwähnten Fortsetzung von $\mathfrak{V}_{-p}$ identisch ist. Die Form der Fläche $\Psi^{(i)}$ ist der Natur der Sache nach an gewisse Beschränkungen gebunden, sonst aber einer unendlichen Mannigfaltigkeit fähig. Es giebt jedoch eine Bedingung, der hier immer nur *eine* Fläche genügen kann, wenn dies überhaupt möglich ist. Es ist die Bedingung, dass $\Psi^{(i)}$ eine *nicht geschlossene* Fläche sei, d. h. die Fortsetzung des ausserhalb S geltenden Werthes von $\mathfrak{V}_{-p}$ muss sich in der Weise bis zu der Fläche $\Psi^{(i)}$ führen lassen, dass, wenn man sich demselben Punkte der Fläche von entgegengesetzten Seiten nähert, die Function in den gleichen Werth übergeht, die nach der Flächennormale genommenen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_{-p}^{(i)}}{\partial \vartheta}\right)_{+\varepsilon}$ und $\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_{-p}^{(i)}}{\partial \vartheta}\right)_{-\varepsilon}$ aber verschiedene Werthe annehmen, deren Differenz vermöge der Gleichung

$$(6.) \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_{-p}^{(i)}}{\partial \vartheta}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_{-p}^{(i)}}{\partial \vartheta}\right)_{-\varepsilon} = -4\pi\nu^{(i)}$$

den Ausdruck der Dichtigkeit $\nu^{(i)}$ liefert. Dass, wenn eine nicht geschlossene Fläche $\Psi^{(i)}$ gefunden ist, ausser dieser keine zweite existiren kann, beweist man dadurch, dass man zeigt, wie die Fortsetzung der Function $\mathfrak{V}_{-p}$ von

den angeführten Eigenschaften eine völlig bestimmte ist *). Die Existenz einer nicht geschlossenen Fläche $\Psi^{(i)}$ vorausgesetzt, will ich dieselbe mit Φ_{-p}, die Massenschicht $\nu^{(i)}$ mit $\overline{\nu}$, das Potential derselben $\mathfrak{V}^{(i)}_{-p}$ mit $\overline{\mathfrak{V}}_{-p}$ bezeichnen.

Wenn nun den drei unterschiedenen Fällen gemäss aus den Potentialen $\mathfrak{V}^{(a)}_{-p}$, $\mathfrak{V}^{(i)}_{-p}$, $\overline{\mathfrak{V}}_{-p}$ neue Functionen gebildet werden, indem man für x, y, z ihre Werthe aus den Gleichungen (3.) einsetzt,

$$(7.) \qquad \mathfrak{U}^{(a)}_{p-5} = \frac{1}{r'}\mathfrak{V}^{(a)}_{-p}, \quad \mathfrak{U}^{(i)}_{p-5} = \frac{1}{r'}\mathfrak{V}^{(i)}_{-p}, \quad \overline{\mathfrak{U}}_{p-5} = \frac{1}{r'}\overline{\mathfrak{V}}_{-p},$$

so haben dieselben nach den Betrachtungen von §. 1 der ersten Abhandlung folgende Bedeutung: Es seien $\Psi'^{(a)}$, $\Psi'^{(i)}$, Φ'_{p-5} resp. die sphärischen Spiegelbilder der Flächen $\Psi^{(a)}$, $\Psi^{(i)}$, Φ_{-p}, so sind $\mathfrak{U}^{(a)}_{p-5}$, $\mathfrak{U}^{(i)}_{p-5}$, $\overline{\mathfrak{U}}_{p-5}$ die Potentiale von Massenschichten, die über diese Flächen ausgebreitet sind, in Bezug auf den Punkt B', deren Dichtigkeiten $\mu^{(a)}$, $\mu^{(i)}$, $\overline{\mu}$ diese Werthe erhalten:

$$(8.) \qquad \mu^{(a)} = \frac{1}{r'^3}\nu^{(a)}, \quad \mu^{(i)} = \frac{1}{r'^3}\nu^{(i)}, \quad \overline{\mu} = \frac{1}{r'^3}\overline{\nu}.$$

Auf der anderen Seite ist $\mathfrak{U}^{(a)}_{p-5}$ für die Punkte B', welche ausserhalb der Fläche $\Psi'^{(a)}$ liegen **), $\mathfrak{U}^{(i)}_{p-5}$ und $\overline{\mathfrak{U}}_{p-5}$ für die Punkte B', welche ausserhalb der Fläche S' liegen, mit dem Potential $\mathfrak{U}_{p-5}$ identisch, d. h. die Wirkung der Massenschichten $\mu^{(a)}$, $\mu^{(i)}$, $\overline{\mu}$ ersetzt in dem angegebenen Umfange die Wirkung des von der Fläche S' begrenzten Körpers mit der Dichtigkeit $\mu = r'^{p-5}$.

Da im Folgenden hauptsächlich die Fälle in Betracht kommen, in denen die Flächen Φ_{-p} vorhanden sind, so fasse ich alles auf diese Bezügliche noch einmal in den folgenden Satz zusammen:

I. *Wenn es möglich ist, die Wirkung des von der Fläche S begrenzten Körpers mit der Dichtigkeit* $\nu = \frac{1}{r^p}$ *für die Punkte B, die ausserhalb S liegen, durch die Wirkung der Belegung* $\overline{\nu}$ *einer innerhalb S befindlichen, nicht geschlossenen Fläche* Φ_{-p} *zu ersetzen, so wird die Wirkung des von der Fläche S' begrenzten Körpers mit der Dichtigkeit* $\mu = r'^{p-5}$ *für die Punkte B', die ausserhalb S' liegen, durch die Wirkung einer Belegung* $\overline{\mu}$ *des sphärischen*

---

*) *Riemann,* dieselbe Abh. art. 11.

**) Denn es wird angenommen, dass der Punkt A ausserhalb der Fläche $\Psi^{(a)}$ bleibe.

Spiegelbildes Φ'_{p-5} von Φ_{-p} ersetzt, indem man den Werth der Dichtigkeit $\bar{\mu} = \frac{\bar{\nu}}{r'^3}$ annimmt, und in dem Ausdruck $\bar{\nu}$ statt der Coordinaten x, y, z ihre Werthe aus den Gleichungen (3.) *substituirt.*

Unter einer bestimmten Voraussetzung treten die so eben entwickelten Resultate in nahen Zusammenhang mit den Problemen der electrischen Vertheilung. Es sei S die Oberfläche eines electrischen Leiters, A ein erregender Massenpunkt, u das in der Fläche S' constante Potential, wie in der vorangehenden Abhandlung, so wird das Potential v des durch den Punkt A inducirten Leiters S mittelst der Gleichung $(12.)_1$

$$v = \frac{1}{r} u$$

gefunden. Wenn nun für den ausserhalb der Fläche S' geltenden Werth des Potentials u eine Fortsetzung von der oben angegebenen Beschaffenheit bis zu der nicht geschlossenen Fläche Φ'_0 geführt werden kann, so beweist man durch Schlüsse, die den oben angewendeten durchaus analog sind, dass eine Belegung $\bar{\lambda}$ der Fläche Φ'_0 in Bezug auf die Punkte B', die ausserhalb S' liegen, das Potential u hervorbringen, und dass eine Belegung $\bar{\varrho} = \frac{\bar{\lambda}}{r^3}$ der Fläche Φ_{-5} in Bezug auf die Punkte B, die ausserhalb S liegen, das Potential v erzeugen kann.

Vertauscht man jetzt die Flächen S und S', und bezeichnet das in der Fläche S constante Potential mit V, das Potential der durch den Punkt A inducirten Leiterfläche S' mit U, so dass

$$(9.) \qquad U = \frac{1}{r'} V$$

ist, so liefert die Vereinigung der eben gemachten Bemerkung mit einem früher ausgesprochenen Resultate den folgenden Satz:

II. *Wenn das in der Fläche S constante Potential V und das Potential des homogenen von der Fläche S begrenzten Körpers, $\mathfrak{V}_0$, in Bezug auf Punkte B des ausserhalb S liegenden Raumes durch Belegungen derselben nicht geschlossenen Fläche Φ_0 hervorgebracht werden können, so lassen sich das Potential U des durch den Punkt A erregten Leiters S' und das Potential $\mathfrak{U}_{-5}$ des von der Fläche S' begrenzten Körpers mit der Dichtigkeit $\mu = \frac{1}{r'^5}$ für die Punkte B' des ausserhalb S' liegenden Raumes durch Belegungen derselben Fläche Φ'_{-5} hervorbringen, die das sphärische Spiegelbild der Fläche Φ_0 ist.*

§. 2.

Bei den folgenden Untersuchungen wird vorausgesetzt, dass die Fläche S ein ungleichaxiges Ellipsoid ist, und dass der Exponent p bei den Potentialen $\mathfrak{V}_{-p}$ einen positiven Werth oder die Null bedeutet. Meine Absicht ist aber nicht auf die Darstellung dieser Potentiale in der möglichst einfachen Form, sondern auf die Beantwortung der Fragen nach der Existenz der Flächen Φ_{-p}, nach ihrer Beschaffenheit und der mit $\bar{\nu}$ bezeichneten Belegung gerichtet.

Es seien 2α, 2β, 2γ die Längen der Hauptaxen des Ellipsoids S, der Anfangspunkt der Coordinaten x, y, z falle in den Mittelpunkt desselben, die Richtung der drei Coordinatenaxen in die Richtung der drei Hauptaxen. Dann ist die Gleichung des Ellipsoids, bezogen auf den Punkt B, die folgende:

$$(10.) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1 = 0;$$

in Betreff der relativen Grösse von α, β, γ wird angenommen, dass $\alpha>\beta>\gamma$ sei. Die Gleichung des sphärischen Spiegelbildes S' von S wird erhalten, indem man in (10.) für x, y, z die Werthe aus (3.) substituirt, und gilt dann für den Punkt B'. Durch Wegschaffung des Nenners r'^4 entsteht so die Gleichung *)

$$(11.) \qquad \frac{(\mathfrak{x}r'^2+x'-\mathfrak{x})^2}{\alpha^2}+\frac{(\mathfrak{y}r'^2+y'-\mathfrak{y})^2}{\beta^2}+\frac{(\mathfrak{z}r'^2+z'-\mathfrak{z})^2}{\gamma^2}-r'^4 = 0,$$

welche in Bezug auf x', y', z' vom vierten Grade ist und nur dann auf den dritten Grad herabsinkt, wenn

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2}+\frac{\mathfrak{z}^2}{\gamma^2}-1 = 0$$

ist, d. h. wenn der Punkt A in die Oberfläche des Ellipsoids S fällt; diese Annahme ist aber schon früher ausgeschlossen worden. Eine Zerlegung der linken Seite in zwei Factoren kann nur Statt finden, wenn $\alpha=\beta=\gamma$ und das Ellipsoid S eine Kugel wird; der eine Factor giebt dann den isolirten Punkt A, der andere die Kugelfläche S'.

Bei dem Potential $\mathfrak{V}_{-p}$ ist es angemessen, den Fall, in welchem $p=0$ ist, gesondert von allen übrigen zu behandeln, und zwar soll dies zuerst geschehen. $\mathfrak{V}_0$ ist das Potential des homogenen Ellipsoids S in Bezug auf den Punkt B, und hat den bekannten Werth

$$(12.) \qquad \mathfrak{V}_0 = \int^{\infty} \frac{\partial t}{\sqrt{\left(1+\frac{t}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{t}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{t}{\gamma^2}\right)}}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+t}-\frac{y^2}{\beta^2+t}-\frac{z^2}{\gamma^2+t}\right),$$

*) Ausser der Fläche S' stellt diese Gleichnng immer noch den isolirten Punkt A dar.

wo als untere Grenze des Integrals die Null oder diejenige Wurzel τ_1 der Gleichung

$$(13.) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2+\tau}+\frac{y^2}{\beta^2+\tau}+\frac{z^2}{\gamma^2+\tau}-1=0$$

zu setzen ist, für welche $\gamma^2+\tau>0$ ist, je nachdem der Punkt B innerhalb oder ausserhalb S liegt. Man überzeugt sich nun leicht, dass eine Fortsetzung des im Raume ausserhalb S herrschenden Werthes von $\mathfrak{V}_0$ erhalten wird, wenn man für Punkte des Innern statt der Null ebenfalls diejenige Wurzel der Gleichung (13.) als untere Grenze des Integrals anwendet, welche der angegebenen Bedingung genügt und dadurch unzweifelhaft bestimmt ist. Für die Punkte der xy-Ebene, die der Ungleichheit

$$\frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}-1<0$$

genügen, nimmt diese Wurzel ihren kleinsten Werth $-\gamma^2$ an, die Function bleibt stetig, der nach ∂z genommene Differentialquotient hat aber zu beiden Seiten der xy-Ebene verschiedene Werthe, und es erhellt, dass das durch die Ellipse

$$(14.) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}-1=0,$$

begrenzte Stück der xy-Ebene die Fläche Φ_0, das bezeichnete Integral die Function $\overline{\mathfrak{V}}_0$ ist; denn die im vorigen §. gestellten Anforderungen sind vollständig erfüllt. Für die Dichtigkeit $\bar{\nu}$ der Massenschicht, welche der Fläche Φ_0 beizulegen ist, findet sich darauf der Werth

$$(15.) \qquad \bar{\nu}=\frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}-\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

und es bleibt nur übrig, das sphärische Spiegelbild Φ'_{-5} der Fläche Φ_0 zu construiren. Das sphärische Spiegelbild der Ebene $z=0$, von der Φ_0 ein Theil ist, wird eine durch den Punkt A gehende Kugelfläche, deren Gleichung in Bezug auf B' diese ist:

$$\mathfrak{z}r'^2+z'-\mathfrak{z}=0,$$

und die Begrenzung liefert die Kegelfläche, deren Spitze im Punkte A liegt, und die durch den Rand von Φ_0 hindurchgeht. Ihre Gleichung ist die folgende:

$$\frac{(\mathfrak{x}z-\mathfrak{z}x)^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{(\mathfrak{y}z-\mathfrak{z}y)^2}{\beta^2-\gamma^2}-(z-\mathfrak{z})^2=0,$$

und hat in Bezug auf den Punkt B' dieselbe Form. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes I. bei $p=0$ erfüllt und derselbe tritt in Wirksamkeit.

Dass aber auch die Voraussetzungen des Satzes II. hier zutreffen, ergiebt sich wie folgt. Das Potential V, welches in dem Ellipsoid S den constanten Werth der Einheit hat, lässt sich bekanntlich durch das Integral

$$(16.) \qquad V = \frac{1}{K}\int^{\infty} \frac{\partial t}{\sqrt{\left(1+\frac{t}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{t}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{t}{\gamma^2}\right)}}$$

darstellen, dessen untere Grenze wie in $\mathfrak{V}_0$ zu bilden ist und bei dem

$$K = \int_0^{\infty} \frac{\partial t}{\sqrt{\left(1+\frac{t}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{t}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{t}{\gamma^2}\right)}}$$

ist. Eine Fortsetzung $\overline{V}$ des ausserhalb S geltenden Werthes von V von der oben angegebenen Beschaffenheit entsteht dadurch, dass man $\overline{V}$ gleich einem Integrale von derselben Form setzt und die untere Grenze ebenso wie in $\overline{\mathfrak{V}}_0$ bestimmt. Mithin erstreckt sich diese Fortsetzung bis zu der Fläche Φ_0, und das sollte gezeigt werden. Die Dichtigkeit $\overline{P}$ der Belegung von Φ_0, deren Potential mit $\overline{V}$ identisch ist, hat alsdann den Werth

$$(17.) \qquad \overline{P} = \frac{1}{\pi K} \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}-\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Noch ist daran zu erinnern, dass, wenn $\alpha=\beta=\gamma$ und das Ellipsoid S eine Kugel wird, die Fläche S' ebenfalls in eine Kugel übergeht; die Fläche Φ_0 zieht sich dann in den Mittelpunkt der Kugel S und die Fläche Φ'_{-5} in das sphärische Spiegelbild dieses Punktes zusammen, und die Functionen $\overline{\mathfrak{V}}_0$ und $\overline{V}$ haben die Werthe

$$\overline{\mathfrak{V}}_0 = \frac{4\pi\alpha^3}{3}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \overline{V} = \frac{\alpha}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Da nun $\overline{\mathfrak{U}}_{-5} = \frac{1}{r'}\overline{\mathfrak{V}}_0$ ist, und wegen der Gleichung (9.) die Function $\overline{U}$, welche ausserhalb S' gleich U und innerhalb S' gleich der Fortsetzung von U ist, gleich $\frac{1}{r'}\overline{V}$ sein muss, so gilt für die Functionen $\overline{\mathfrak{U}}_{-5}$ und $\overline{U}$ die Proportion

$$\overline{\mathfrak{U}}_{-5} : \overline{U} = \frac{4\pi\alpha^3}{3} : \alpha.$$

§. 3.

Um die Eigenschaften des Potentials $\mathfrak{V}_{-p}$ zu erforschen, bei dem p einen von der Null verschiedenen Werth hat, werde ich mich eines Ver-

fahrens bedienen, dem das von *Dirichlet* herrührende Princip des discontinuirlichen Factors *) zu Grunde liegt. Es seien $a=x$, $b=y$, $c=z$ die Coordinaten eines Punktes im Raume, es sei l die Entfernung der Punkte (a, b, c) und $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, ε sowie η eine veränderliche positive Grösse und n gleich dem Aggregat $\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}$, so soll der Ausdruck

$$(18.)\qquad \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{n+1}{\varepsilon n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{n-1}{\varepsilon n}\right)\right)\frac{1}{(l^2+\eta)^{\frac{1}{2}p}}$$

die Dichtigkeit einer durch den ganzen Raum verbreiteten Massenvertheilung im Punkte (a, b, c) darstellen. Diese Dichtigkeit wird an keiner Stelle des Raumes unendlich gross, nimmt auf einem vom Coordinatenanfange aus gezogenen Radius vector schneller ab, als das Quadrat der Entfernung von dem Coordinatenanfange, sobald p die Null übertrifft, und geht für $\varepsilon=0$ und $\eta=0$ in die Null oder den Werth $\frac{1}{l^p}$ über, je nachdem der Punkt (a, b, c) ausserhalb oder innerhalb des Ellipsoids S liegt.

Wenn man daher den Ausdruck (18.) mit der reciproken Entfernung $\frac{1}{l}$ der Punkte (a, b, c) und (x, y, z) und dem Element der Masse $\partial a\,\partial b\,\partial c$ multiplicirt, und die Integration über den ganzen Raum ausdehnt, so entsteht das Potential

$$(19.)\qquad \mathfrak{V}=\frac{1}{\pi}\iiint\left(\operatorname{arctg}\frac{n+1}{\varepsilon n}-\operatorname{arctg}\frac{n-1}{\varepsilon n}\right)\frac{1}{(l^2+\eta)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{\partial a\,\partial b\,\partial c}{l},$$

welches bei $\varepsilon=0$ und $\eta=0$ den Werth des Potentials $\mathfrak{V}_{-p}$ zur Grenze hat.

Obwohl hier p nur grösser als Null sein muss, so will ich doch sogleich annehmen, dass es grösser als die Zwei sei, da bei den kleineren Werthen in der Integration eine Modification nöthig ist und gleichzeitig kein bemerkenswerthes Resultat gefunden wird.

Die zu integrirende Function in (19.) kann man in drei Factoren zerlegen, und jeden derselben durch ein bestimmtes Integral ausdrücken; es ist nämlich

$$(20.)\qquad \operatorname{arctg}\frac{n+1}{\varepsilon n}-\operatorname{arctg}\frac{n-1}{\varepsilon n}=\int_0^\infty e^{(-\varepsilon+i)n\varphi}\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{i\varphi}\,\partial\varphi,$$

$$(21.)\qquad \frac{1}{l}=\frac{(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{(-\varepsilon+i)l^2\psi}\,\psi^{-\frac{1}{2}}\,\partial\psi,$$

$$(22.)\qquad \frac{1}{(l^2+\eta)^{\frac{1}{2}p}}=\frac{(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}p}}{\Gamma(\frac{1}{2}p)}\int_0^\infty e^{(-\varepsilon+i)(l^2+\eta)\psi'}\,\psi'^{\frac{1}{2}p-1}\,\partial\psi',$$

*) Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Abh. d. Berl. Ac. v. J. 1839.

wo von der rechten Seite in (20.) nur der reelle Theil zu nehmen, und wie gewöhnlich $\sqrt{-1} = i$, $\int_0^\infty e^{-u} u^{q-1} \partial u = \Gamma(q)$ gesetzt ist. Dadurch geht $\mathfrak{W}$ in ein sechsfaches Integral über, bei dem die Ordnung der Integrationen vertauscht werden darf, um dann die nach ∂a, ∂b, ∂c zu nehmenden auszuführen. Die Function unter dem Integralzeichen zerfällt in vier Factoren, von denen die drei ersten respective nur eine der Grössen a, b, c enthalten, der vierte aber keine derselben enthält. Der erste Factor liefert vermittelst einer bekannten *Euler*schen Formel die Integration

$$(23.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\varepsilon+i)\left((x-a)^2\psi+(\mathfrak{x}-a)^2\psi'+\frac{a^2}{\alpha^2}\varphi\right)} \partial a = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, e^{(-\varepsilon+i)\frac{(x-\mathfrak{x})^2\psi\psi'+\frac{x^2}{\alpha^2}\psi\varphi+\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2}\psi'\varphi}{\psi+\psi'+\frac{\varphi}{\alpha^2}}}}{(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}}\left(\psi+\psi'+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

und da der zweite und dritte Factor aus dem ersten durch Verwandlung von x in y, z, von $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, von a in b, c entstehen, so erhält man die Resultate der betreffenden Integrationen durch die correspondirenden Permutationen aus dem Vorliegenden. Wenn man

$$(24.)\quad \Sigma \frac{(x-\mathfrak{x})^2\psi\psi'+\frac{x^2}{\alpha^2}\psi\varphi+\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2}\psi'\varphi}{\psi+\psi'+\frac{\varphi}{\alpha^2}} = \mathfrak{T}$$

und

$$(25.)\quad \left(\psi+\psi'+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\psi+\psi'+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\psi+\psi'+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right) = \mathfrak{P}$$

setzt, so nimmt das Product der erwähnten drei Ausdrücke die Form

$$(26.)\quad \frac{\pi\Gamma(\frac{1}{2})\, e^{(-\varepsilon+i)\mathfrak{T}}}{(\varepsilon-i)^{\frac{3}{2}}\mathfrak{P}^{\frac{1}{2}}}$$

an, da $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ist, und die Vereinigung mit dem vierten Factor giebt für $\mathfrak{W}$ die Gleichung

$$(27.)\quad \mathfrak{W} = \frac{(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}p-1}}{i\Gamma(\frac{1}{2}p)} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{(-\varepsilon+i)(\mathfrak{T}+\eta\psi')}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})}{\mathfrak{P}^{\frac{1}{2}}} \psi^{-\frac{1}{2}}\psi'^{\frac{1}{2}p-1}\varphi^{-1}\partial\psi\,\partial\psi'\,\partial\varphi,$$

von deren rechter Seite nur der reelle Theil zu nehmen ist.

Ich betrachte nun zunächst die Variable φ als constant und führe statt ψ und ψ' die neuen Variabeln t und t' ein, welche mit derselben durch die Gleichungen

$$\psi = \varphi t, \quad \psi' = \varphi t'$$

zusammenhängen und daher ebenfalls innerhalb der Grenzen 0 und ∞ zu nehmen sind. Dadurch kommt

$$\partial\psi = \varphi\partial t, \quad \partial\psi' = \varphi\partial t',$$

und indem

$$(28.) \qquad \Sigma \frac{(x-\mathfrak{x})^2 tt' + \frac{x^2}{\alpha^2} t + \frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2} t'}{t+t'+\frac{1}{\alpha^2}} = T,$$

$$(29.) \qquad \left(t+t'+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(t+t'+\frac{1}{\beta^2}\right)\left(t+t'+\frac{1}{\gamma^2}\right) = P$$

gesetzt wird,

$$(30.) \quad \mathfrak{W} = \frac{(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}p-1}}{i\Gamma(\frac{1}{2}p)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{(-\varepsilon+i)(T+\eta t')\varphi}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})}{P^{\frac{1}{2}}} t^{-\frac{1}{2}} t'^{\frac{1}{2}p-1} \varphi^{\frac{1}{2}p-2}\, \partial t\, \partial t' \partial\varphi.$$

Hier lässt sich die Integration nach $\partial\varphi$ mittelst der *Euler*schen Formel bewerkstelligen, welche in (21.) und (22.) angewandt ist; denn man hat, da $p > 2$ ist,

$$(31.) \quad \int_0^\infty e^{(-\varepsilon+i)(T+\eta t')\varphi \pm i\varphi} \varphi^{\frac{1}{2}p-2}\, \partial\varphi = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}p-1)}{((\varepsilon-i)(T+\eta t') \mp i)^{\frac{1}{2}p-1}},$$

und daher, indem $\Gamma'(\frac{1}{2}p) = (\frac{1}{2}p-1)\Gamma'(\frac{1}{2}p-1)$,

$$(32.) \quad \mathfrak{W} =$$

$$\frac{(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}p-1}}{i(\frac{1}{2}p-1)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}} t'^{\frac{1}{2}p-1}}{P^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{((\varepsilon-i)(T+\eta t')-i)^{\frac{1}{2}p-1}} - \frac{1}{((\varepsilon-i)(T+\eta t')+i)^{\frac{1}{2}p-1}}\right) \partial t\, \partial t',$$

welche Gleichung in demselben Sinne wie (27.) zu verstehen ist.

Bei der Betrachtung dieses Doppelintegrales ist es zweckmässig diejenigen Elemente abzusondern, bei denen der Unterschied zwischen dem Werthe des Ausdrucks $T+\eta t'$ und der Einheit kleiner ist als eine gewisse positive kleine Grösse h, und die übrigen Elemente in zwei solche Gruppen zu theilen, dass für die eine $T+\eta t' \geqq 1+h$, für die andere $T+\eta t' \leqq 1-h$ ist. Dann kann man die Frage aufwerfen und beantworten, wieviel jede einzelne dieser beiden Gruppen bei abnehmendem ε zum Werthe des Integrals $\mathfrak{W}$ beiträgt.

Da der Ausdruck $T+\eta t'$ innerhalb der Integrationsgrenzen stets positiv ist, so hat man in allen Fällen $T+\eta t'+1 > 0$, folglich

$$(33.) \quad \lim. \frac{(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}p-1}}{((\varepsilon-i)(T+\eta t')-i)^{\frac{1}{2}p-1}} = \frac{1}{(T+\eta t'+1)^{\frac{1}{2}p-1}},$$

und ebenso, wenn $T+\eta t' \geqq 1+h$ ist,

$$(34.) \qquad \lim. \frac{(\varepsilon - i)^{\frac{1}{2}p-1}}{((\varepsilon - i)(T+\eta t')+i)^{\frac{1}{2}p-1}} = \frac{1}{(T+\eta t'-1)^{\frac{1}{2}p-1}};$$

dagegen kommt, wenn $T+\eta t' \leqq 1-h$ ist,

$$(35.) \qquad \lim. \frac{(\varepsilon - i)^{\frac{1}{2}p-1}}{((\varepsilon - i)(T+\eta t')+i)^{\frac{1}{2}p-1}} = \frac{e^{-(\frac{1}{2}p-1)\pi i}}{(1-T-\eta t')^{\frac{1}{2}p-1}}.$$

Diese Grössen sind in dem Integral mit reellen Factoren und dem Divisor i behaftet, während nur der reelle Theil des Integrals Gültigkeit hat. Folglich liefern nur diejenigen Elemente, bei denen $T+\eta t' \leqq 1-h$ ist, wesentliche Bestandtheile für dasselbe, und selbst diese nicht, wenn p eine gerade Zahl bedeutet und $e^{-(\frac{1}{2}p-1)\pi i} = \pm 1$ wird. Unter dieser Voraussetzung lässt sich der Grenzwerth von $\mathfrak{W}$ als einfaches Integral darstellen; doch gehe ich überhaupt auf die Entwickelung des definitiven Grenzausdrucks von $\mathfrak{W}$ zufolge der oben ausgesprochenen Absicht nicht näher ein, sondern wende mich zu der Betrachtung der Gleichung

$$(36.) \qquad T-1 = 0,$$

welche bei abnehmenden Werthen von ε und η die wesentlichen Elemente des Integrals $\mathfrak{W}$ von den scheinbar vorhandenen sondert. Diese Betrachtung wird Anhaltspunkte für die Bildung einer Function darbieten, die ebenso wie $\mathfrak{W}$ die Grössen ε und η enthält, und die in dem Falle, dass der Punkt (x, y, z), auf den sie sich bezieht, ausserhalb des Ellipsoids S liegt, für $\varepsilon = 0$ und $\eta = 0$ in den Grenzwerth der Function $\mathfrak{W}$, d. i. die Function $\mathfrak{V}_{-p}$ übergeht, in dem entgegengesetzten Falle eine stetige Fortsetzung von $\mathfrak{V}_{-p}$ darstellt.

§. 4.

Wenn man die Variabeln t und t' als die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes einer Ebene ansieht, so kann man die Untersuchung der Gleichung $T-1=0$ in geometrischer Form führen. Die in der Function T vorkommenden Nenner werden durch Multiplication mit dem Generalnenner P fortgeschafft, und die Gleichung

$$(37.) \qquad P(T-1) = 0,$$

die sich bis zum vierten Grade erhebt, stellt eine Curve dar, deren allgemeiner Verlauf ohne eine in's Einzelne gehende Discussion erkennbar ist.

Für den Differentialquotienten $\frac{dt'}{dt}$ liefert die Gleichung (37.) den Ausdruck

$$(38.)\qquad \frac{dt'}{dt} = -\frac{\frac{\partial P}{\partial t}(T-1)+P\frac{\partial T}{\partial t}}{\frac{\partial P}{\partial t'}(T-1)+P\frac{\partial T}{\partial t'}},$$

welcher mit Ausnahme der Punkte, in welchen $P=0$ ist, durch folgenden einfacheren ersetzt werden darf:

$$(39.)\qquad \frac{dt'}{dt} = -\frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\frac{\partial T}{\partial t'}}.$$

Aus (28.) folgt aber

$$(40.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \Sigma\left(\frac{\alpha^2(x-\mathfrak{x})t'+x}{\alpha^2 t+\alpha^2 t'+1}\right)^2, \\ \frac{\partial T}{\partial t'} = \Sigma\left(\frac{-\alpha^2(x-\mathfrak{x})t+\mathfrak{x}}{\alpha^2 t+\alpha^2 t'+1}\right)^2, \end{cases}$$

wo die Summenzeichen die durchaus beizubehaltende Bedeutung haben, dass für x, $\mathfrak{x}$, α respective im zweiten Gliede y, $\mathfrak{y}$, β und im dritten Gliede z, $\mathfrak{z}$, γ eintreten. Also hat der Differentialquotient $\frac{dt'}{dt}$ für alle Punkte der Curve, die erwähnten einzelnen Punkte ausgenommen, einen negativen Werth, und folglich müssen sich alle Zweige der Curve ins Unendliche erstrecken. Die Asymptoten der Curve sind durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(41.)\qquad \begin{cases} r^2 t'+\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-1=0, \qquad r^2 t+\Sigma\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2}-1=0, \\ P\Sigma\frac{\alpha^2(x-\mathfrak{x})^2}{\alpha^2 t+\alpha^2 t'+1}=0; \end{cases}$$

die erste von diesen bezeichnet eine Parallele zur t-Axe, die zweite eine Parallele zur t'-Axe, und die dritte bezeichnet zwei Linien, die respective zwischen den Linien

$$(42.)\qquad \alpha^2 t+\alpha^2 t'+1=0, \quad \beta^2 t+\beta^2 t'+1=0, \quad \gamma^2 t+\gamma^2 t'+1=0$$

gelegen und denselben parallel sind. Um jetzt zu erfahren, wie sich die Zweige der Curve unter die Asymptoten vertheilen, genügt es die Beziehung der Curve zu den drei Linien (42.) ins Auge zu fassen, deren Complex durch die Gleichung $P=0$ ausgedrückt wird. Bringt man die Gleichung (37.) in eine der Formen

$$(43.)\qquad P\left(-\Sigma\frac{(\alpha^2(x-\mathfrak{x})t'+x)^2}{\alpha^2(\alpha^2 t+\alpha^2 t'+1)}+r^2 t'+\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-1\right)=0.$$

oder

$$(44.)\quad P\Big(-\Sigma\frac{(-\alpha^2(x-\mathfrak{x})t+\mathfrak{x})^2}{\alpha^2(\alpha^2t+\alpha^2t'+1)}+r^2t+\Sigma\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2}-1\Big)=0,$$

so erhellt, dass jede der betreffenden Linien mit der Curve nur *einen* Punkt gemeinsam hat, dessen Coordinaten respective durch die Gleichungen

$$(45.)\quad \begin{cases} \alpha^2(x-\mathfrak{x})t'+x=0, & -\alpha^2(x-\mathfrak{x})t+\mathfrak{x}=0, \\ \beta^2(y-\mathfrak{y})t'+y=0, & -\beta^2(y-\mathfrak{y})t+\mathfrak{y}=0, \\ \gamma^2(z-\mathfrak{z})t'+z=0, & -\gamma^2(z-\mathfrak{z})t+\mathfrak{z}=0 \end{cases}$$

gegeben sind. Da ferner offenbar die Function $P(T-1)$ für keinen Punkt der ersten und dritten Linie das positive, für keinen Punkt der zweiten Linie das negative Zeichen annimmt, so bilden diese Linien Scheidewände, welche von den Zweigen der Curve zwar angestossen, aber niemals durchbrochen werden. Unterscheidet man nun die vier Räume, in welche die Ebene durch diese Linien getheilt wird, so zeigt es sich, dass in jedem derselben gerade zwei Theile von Asymptoten ins Unendliche reichen. In dem Raume, für welchen $\alpha^2t+\alpha^2t'+1>0$ ist, befinden sich die Theile der auf einander senkrechten Asymptoten

$$r^2t'+\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-1=0, \quad r^2t+\Sigma\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2}-1=0,$$

für welche respective t und t' über jeden positiven Werth wachsen. In dem Raume, für den $\alpha^2t+\alpha^2t'+1<0$, $\beta^2t+\beta^2t'+1>0$ ist, geht die dritte Asymptote, und in dem Raume, für den $\beta^2t+\beta^2t'+1<0$, $\gamma^2t+\gamma^2t'+1>0$ ist, die vierte Asymptote nach beiden Seiten in's Unendliche. In dem Raume endlich, für den $\gamma^2t+\gamma^2t'+1<0$ ist, liegen die Theile der auf einander senkrechten Asymptoten, für die respective t und t' negativ unendlich werden. Daraus folgt, dass in jedem der bezeichneten vier Räume ein Zweig der Curve existirt, der sich den für den Raum angegebenen Asymptoten im Unendlichen anschliesst, und zwar, wie man leicht sieht, nur *ein* solcher. In sich zurückkehrende Zweige besitzt die Curve nicht, und somit sind die wesentlichen Momente ihres Verlaufs vollständig entwickelt.

§. 5.

Behält man die geometrische Deutung der Variabeln t und t' für das Integral $\mathfrak{W}$, so ist $\partial t\partial t'$ das Flächenelement der Ebene und die Integration wird über einen Raum R ausgedehnt, der nur von den positiven Halbaxen der t und t' begrenzt ist, und der sich zwischen den Schenkeln dieses rechten

Winkels in's Unendliche erstreckt. Da der erste von den im vorigen §. unterschiedenen Flächenräumen den Raum R in sich schliesst, so kann nur der Zweig der Curve $P(T-1)=0$ den Raum R durchschneiden, welcher jenem Raume angehört. Da der Punkt A stets ausserhalb des Ellipsoids S angenommen wird, mithin $\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-1>0$ ist, so liegt die Asymptote

$$r^2t+\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-1=0$$

stets ausserhalb des Raumes R; dagegen befindet sich die Asymptote

$$r^2t'+\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-1=0$$

ausserhalb oder innerhalb des Raumes R, je nachdem $\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-1$ grösser oder kleiner als Null ist. Die Curve geht von dem positiven Theile der ersten zum positiven Theile der zweiten Asymptote, während mit wachsendem t die Werthe von t' beständig abnehmen; sie tritt in den Raum R ein, indem sie die Axe der t' schneidet, und wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb des Ellipsoids S liegt, so verlässt sie den Raum R, indem sie die Axe der t schneidet, wenn aber der Punkt (x, y, z) innerhalb des Ellipsoids liegt, so verlässt sie den Raum R nicht, sondern geht innerhalb desselben in's Unendliche. Die Ungleichheit $T-1<0$ ist in demjenigen Theile von R erfüllt, welcher den Anfangspunkt der Coordinaten $t=0$, $t'=0$ enthält.

Nach diesen Bemerkungen stelle ich eine Function W auf, welche das Potential einer gewissen Massenvertheilung in Bezug auf den Punkt (x, y, z) ausdrückt, und die für Punkte, die ausserhalb des Ellipsoids S liegen, bei abnehmenden Werthen von ε und η mit derselben Function $\mathfrak{V}_{-p}$ identisch wird, in welche unter diesen Umständen das Potential $\mathfrak{V}$ übergeht. W ist ein Doppelintegral, bei dem die zu integrirende Function genau dieselbe ist, wie in dem Integral der Gleichung (32.), bei dem aber die Integration sowohl auf diejenigen Elemente ausgedehnt wird, für welche $t>0$, $t'>0$ ist, wie auch auf diejenigen, für welche

$$(46.)\qquad t+t'<\omega,\qquad t'>0$$

ist; ω bedeutet einen negativen Werth, der um eine endliche Grösse *) kleiner ist als der Werth $-\frac{1}{\gamma^2}$ und der dieser Grenze später unendlich nahe gebracht werden soll. Da mithin die Variable t in W negative Werthe annimmt, so

*) algebraisch genommen

ist zu erwähnen, dass an die Stelle des Ausdrucks $\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{P^{\frac{1}{2}}}$ der positive Werth der Quadratwurzel $\frac{1}{(tP)^{\frac{1}{2}}}$ tritt, und dass die Werthe von $\frac{1}{((\varepsilon-i)(T+\eta t')\pm i)^{\frac{1}{2}p-1}}$ für ein beliebiges t' und $t=+\infty$ oder $t=-\infty$ zusammenfallen müssen, während sie sich überall nach der Stetigkeit ändern.

Ein Blick auf den in der Gleichung (43.) enthaltenen Ausdruck von T lehrt, dass in dem durch die Ungleichheiten (46.) bezeichneten Raume der Integration von W das Aggregat $T+\eta t'>1$ bleibt, so lange $\Sigma\frac{x^2}{a^2}-1>0$ ist; deshalb kommen bei abnehmendem ε zu dem Werthe von $\mathfrak{W}$ nur Elemente hinzu, für welche die Gleichungen (33.) und (34.) gelten, und die folglich verschwinden, so dass die zweite von den über die Function W gemachten Behauptungen erledigt ist.

Die erste Behauptung, dass nämlich W das Potential einer Massenvertheilung darstelle, rechtfertigt sich dadurch, dass diese Function die pg. 24 angegebenen Eigenschaften eines solchen Potentials besitzt; nur die Dichtigkeit ν_W, welche jedem Punkte der Masse zukommt, muss a posteriori durch die Gleichung

$$(47.)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=-4\pi\nu_W$$

gefunden werden. Wenn die Grösse ω in ihre Grenze $-\frac{1}{\gamma^2}$ übergeht, so lässt sich dieser Werth ν_W ohne Integralzeichen ausdrücken, und wenn dann die Grösse ε sich der Null nähert, so zeigt derselbe das eigenthümliche Verhalten, falls p eine ungerade die Eins übertreffende Zahl bedeutet, im ganzen Raume gegen die Null abzunehmen, und nur in der Nähe einer gewissen nicht geschlossenen Fläche über jeden Werth hinaus zu wachsen. In dem Grenzfalle darf man dieser Massenvertheilung eine Belegung der erwähnten Fläche von bestimmter Dichtigkeit substituiren, und es erhellt, dass alsdann der Werth von W für $\varepsilon=0$ und $\eta=0$ mit der oben definirten Function $\overline{\mathfrak{V}}_{-p}$, die betreffende Fläche mit der Fläche Φ_{-p} und jene Dichtigkeit mit der Dichtigkeit $\bar{\nu}$ zusammenfällt. Aus dem Nachweise dieser Resultate wird also die Existenz der Flächen Φ_{-p} für jeden ganzzahligen ungeraden über der Einheit liegenden Werth von p, und zugleich die Thatsache folgen, dass diese Flächen sämmtlich identisch sind. Bei den übrigen Werthen von p verschwindet die Dichtigkeit ν_W für $\varepsilon=0$ und $\eta=0$ nur ausserhalb des Raumes, der von der erwähnten Fläche und der xy-Ebene eingeschlossen wird, und nicht inner-

halb desselben, und nachdem sich dies gezeigt hat, werde ich die Betrachtung der betreffenden Functionen abbrechen.

§. 6.

Bei der Bildung des Ausdrucks $\Sigma\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ bemerkt man sogleich, dass die Variabeln x, y, z allein in der Function T unter den Integralzeichen vorkommen und dass man die Differentiation vor der Integration ausführen darf. Wenn man dies thut und sich zur Reduction der Gleichungen

$$\Sigma\Big(\frac{\partial T}{\partial x}\Big)^2 = 4t^2\frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\Sigma\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 6t - \frac{2t^2}{P}\frac{\partial P}{\partial t}$$

bedient, so findet man die Gleichung

$$(48.)\quad \left\{\begin{aligned} &(tP)^{-\frac{1}{2}}\Sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big((\varepsilon-i)(T+\eta t')\pm i\big)^{-\frac{1}{2}p+1} \\ &= 4(-\tfrac{1}{2}p+1)(\varepsilon-i)\frac{\partial}{\partial t}\big\{t^{\frac{3}{2}}P^{-\frac{1}{2}}\big((\varepsilon-i)(T+\eta t')\pm i\big)^{-\frac{1}{2}p}\big\}. \end{aligned}\right.$$

Dieselbe gestattet in dem Ausdruck $\Sigma\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ die Integration nach ∂t auszuführen; für den durch die Ungleichheiten $t>0$, $t'>0$ bezeichneten Raum hat man die Grenzen $t=0$ und $t=+\infty$, für den durch die Ungleichheiten $t+t'<\omega$, $t'>0$ beschränkten Raum die Grenzen $t=-\infty$ und $t=\omega-t'$ anzuwenden. Nun verschwindet der Ausdruck

$$t^{\frac{3}{2}}P^{-\frac{1}{2}}\big((\varepsilon-i)(T+\eta t')\pm i\big)^{-\frac{1}{2}p}$$

bei $t=0$ und nimmt bei $t=+\infty$ und bei $t=-\infty$ denselben Werth an, folglich bleibt von den beiden Differenzen nur der Werth des Ausdrucks für $t=\omega-t'$. Die betreffenden Werthe von P und T mögen mit P_ω und T_ω bezeichnet werden, dann kommt

$$(49.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \\ &4i(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}p}\int_0^\infty \frac{(t'-\omega)^{\frac{3}{2}}t'^{\frac{1}{2}p-1}}{(-P_\omega)^{\frac{1}{2}}}\Big(\frac{1}{((\varepsilon-i)(T_\omega+\eta t')-i)^{\frac{1}{2}p}}-\frac{1}{((\varepsilon-i)(T_\omega+\eta t')+i)^{\frac{1}{2}p}}\Big)\partial t', \end{aligned}\right.$$

indem die übrig bleibende Integration nach $\partial t'$ von 0 bis ∞ auszudehnen ist, und wie oben nur der reelle Theil der rechten Seite genommen werden soll.

Man sucht nun den Werth dieses Integrals für den Fall, dass die positive Grösse $-\Big(\omega+\frac{1}{\gamma^2}\Big)$ sich der Null nähert. Die Constante P_ω enthält

diese Grösse als Factor und T_ω ist eine ganze Function zweiten Grades der Variable t', in welcher $\left(\omega+\frac{1}{\gamma^2}\right)$ als Nenner vorkommt. Der bequemeren Uebersicht wegen werde

$$(50.) \qquad T+\eta t' = At'^2+2Bt'+C$$

gesetzt, so haben A, $2B$, C folgende Werthe:

$$(51.) \qquad \begin{cases} A = -\Sigma\frac{\alpha^2(x-\mathfrak{x})^2}{\alpha^2\omega+1}, \\ 2B = \Sigma(x-\mathfrak{x})^2-2\Sigma\frac{(x-\mathfrak{x})x}{\alpha^2\omega+1}+\eta, \\ C = \Sigma\frac{x^2\omega}{\alpha^2\omega+1}, \end{cases}$$

und aus denselben erhält man für die Determinante $D=AC-B^2$ den Ausdruck

$$(52.) \qquad \begin{cases} 4D = -(r^2+\eta)^2+4\eta\Sigma\frac{x(x-\mathfrak{x})}{\alpha^2\omega+1} \\ \qquad +4\Sigma\frac{\alpha^2}{\alpha^2\omega+1}\left(-\mathfrak{x}x\frac{r^2}{\alpha^2}+\frac{(\mathfrak{y}x-\mathfrak{x}y)^2}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{(\mathfrak{z}x-\mathfrak{x}z)^2}{\alpha^2-\gamma^2}\right). \end{cases}$$

Das letzte Summenzeichen hat hier die erweiterte Bedeutung, dass die drei Complexe von Grössen

$$x,\ \mathfrak{x},\ \alpha; \qquad y,\ \mathfrak{y},\ \beta; \qquad z,\ \mathfrak{z},\ \gamma$$

cyclisch permutirt werden sollen. Bringt man jetzt die in dem Integral vorkommenden Nenner in die Form

$$((\varepsilon-i)(T+\eta t')\pm i)^{\frac{1}{2}p} = \left((\varepsilon-i)A\left(t'+\frac{B}{A}\right)^2+(\varepsilon-i)\frac{D}{A}\pm i\right)^{\frac{1}{2}p},$$

so erhellt, dass das Integral für ein abnehmendes $\left(\omega+\frac{1}{\gamma^2}\right)$ sich dem Werthe Null nähert, sobald $t'+\frac{B}{A}$ innerhalb der Integrationsgrenzen nicht verschwindet, da nämlich die Grösse p jedenfalls die Einheit übertrifft, und dass, wenn $-\frac{B}{A}>0$ ist, der Werth des Integrals nur von den Elementen abhängt, die dem Werthe $-\frac{B}{A}$ von t' sehr nahe liegen.

Es sei f die Charakteristik für eine beliebige Function, h eine kleine positive Grösse, so betrachte ich das Integral

$$(53.) \qquad \int_{-\frac{B}{A}-h}^{-\frac{B}{A}+h} \frac{f\left(t'+\frac{B}{A}\right)}{\left(-\omega-\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial t'}{\left((\varepsilon-i)A\left(t'+\frac{B}{A}\right)^2+(\varepsilon-i)\frac{D}{A}\pm i\right)^{\frac{1}{2}p}}$$

und führe statt t' die neue Variable

$$s = \left(t' + \frac{B}{A}\right) \frac{1}{\left(-\omega - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ein, dann geht (53.) in folgendes Integral über:

$$(54.) \quad \int_{\frac{-h}{\left(-\omega-\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}}^{\frac{h}{\left(-\omega-\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}} \frac{f\left(\left(-\omega-\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}} s\right) \partial s}{\left((\varepsilon - i)\left(-\omega - \frac{1}{\gamma^2}\right) A s^2 + (\varepsilon - i)\frac{D}{A} \pm i\right)^{\frac{1}{2}p}}.$$

Lässt man hier h und $\left(-\omega - \frac{1}{\gamma^2}\right)$ in der Weise abnehmen, dass $\frac{h}{\left(-\omega-\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$ wächst, so geht (54.) in folgenden Grenzausdruck über:

$$(55.) \quad f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial s}{\left((\varepsilon - i)\left(-\omega - \frac{1}{\gamma^2}\right) A s^2 + (\varepsilon - i)\frac{D}{A} \pm i\right)^{\frac{1}{2}p}};$$

nachdem aber der Werth des bestimmten Integrals durch bekannte Methoden ausgemittelt ist, kommt das Resultat:

$$(56.) \quad f(0) \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}p\right)} \lim. \frac{1}{(\varepsilon - i)^{\frac{1}{2}}\left(-\omega - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \left((\varepsilon - i)\frac{D}{A} \pm i\right)^{\frac{1}{2}p}}.$$

Um dasselbe anzuwenden, hat man zunächst mehrere Grenzausdrücke für $\omega + \frac{1}{\gamma^2} = 0$ zu bilden; es ist

$$(57.) \quad \begin{cases} \lim. \dfrac{-B}{A} = \dfrac{-z}{\gamma^2(z-\delta)}, \\ \lim.\left(-\omega - \dfrac{1}{\gamma^2}\right) A = (z-\delta)^2, \\ \lim. \dfrac{D}{A} = \dfrac{\delta z \dfrac{r^2}{\gamma^2} + \dfrac{(xz - \delta x)^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \dfrac{(yz - \delta y)^2}{\beta^2 - \gamma^2} - \dfrac{\eta z (z-\delta)}{\gamma^2}}{(z-\delta)^2} \\ \qquad = \dfrac{\Delta}{(z-\delta)^2}. \end{cases}$$

Demnach tritt an die Stelle der Bedingung $-\frac{B}{A} > 0$ die folgende

$$(58.) \quad -\frac{z}{\gamma^2(z-\delta)} > 0,$$

d. h. das Integral (49.) hat für $\omega+\frac{1}{\gamma^2}=0$ nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn z zwischen den Grenzen $z=0$ und $z=\mathfrak{z}$ liegt. Wir schliessen deshalb den Werth $\mathfrak{z}=0$ von der Betrachtung aus und setzen, um unnütze Unterscheidungen zu vermeiden, fest, dass $\mathfrak{z}$ positiv sei, mithin die Differenz $\mathfrak{z}-z$ nur positive Werthe erhalte. Der in der Formel (56.) mit $f(0)$ bezeichnete Ausdruck entsteht in dem vorliegenden Fall aus dem folgenden:

$$4i(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}p}\frac{(t'-\omega)^{\frac{3}{2}}t'^{\frac{1}{2}p-1}}{(-P_\omega)^{\frac{1}{2}}}\left(-\omega-\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

indem $t'=-\frac{B}{A}$ und dann $\omega+\frac{1}{\gamma^2}=0$ gesetzt wird; also kommt $\frac{z}{\gamma^2(\mathfrak{z}-z)}$ für t', $\frac{\mathfrak{z}}{\gamma^2(\mathfrak{z}-z)}$ für $t'-\omega$, $\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)$ für $\frac{P_\omega}{\omega+\frac{1}{\gamma^2}}$, und daher

$$(59.)\qquad f(0)=4i(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}p}\frac{\alpha\beta\gamma^2}{(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\gamma^2(\mathfrak{z}-z)}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{z}{\gamma^2(\mathfrak{z}-z)}\right)^{\frac{1}{2}p-1}.$$

Setzt man nun die Constante

$$(60.)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}p\right)}\frac{\alpha\beta\gamma^2}{(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}=E,$$

so entsteht endlich die Gleichung

$$(61.)\quad \left\{\begin{aligned}\lim.\Sigma\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}&=4iE\left(\frac{\mathfrak{z}}{\gamma^2(\mathfrak{z}-z)}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{z}{\gamma^2(\mathfrak{z}-z)}\right)^{\frac{1}{2}p-1}\frac{1}{\mathfrak{z}-z}\\&\quad\times\left(\frac{(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{\left((\varepsilon-i)\frac{\Delta}{(\mathfrak{z}-z)^2}-i\right)^{\frac{1}{2}(p-1)}}-\frac{(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{\left((\varepsilon-i)\frac{\Delta}{(\mathfrak{z}-z)^2}+i\right)^{\frac{1}{2}(p-1)}}\right),\end{aligned}\right.$$

durch welche nach (47.) der Werth der Dichtigkeit ν_W vollständig bestimmt wird, und die ebenso zu verstehen ist wie die Gleichung (49.). Wegen der Ungleichheit (58.) gilt aber der gefundene Ausdruck nur für diejenigen Punkte (x, y, z), die zwischen den Ebenen $z=0$ und $z=\mathfrak{z}$ liegen, während für den übrigen Raum $\nu_W=0$ ist.

§. 7.

Es handelt sich jetzt um die Beantwortung der Frage, in welchen Werth der reelle Theil der rechten Seite von (61.) oder die Grösse $-4\pi\nu_W$ übergehe, sobald ε gegen die Null abnimmt. Man erkennt nun sogleich, dass der Ausdruck

$$\Delta=\mathfrak{z}z\frac{r^2}{\gamma^2}+\frac{(xz-\mathfrak{z}x)^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{(yz-\mathfrak{z}y)^2}{\beta^2-\gamma^2}-\frac{\eta z(z-\mathfrak{z})}{\gamma^2}$$

unter der hier obwaltenden Bedingung $\frac{z}{\vartheta - z} > 0$ stets positiv ist, und deshalb gelten für die Grenzwerthe der Ausdrücke

$$(62.) \qquad \frac{(\varepsilon - i)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{\left((\varepsilon - i)\frac{\Delta}{(\vartheta - z)^2} - i\right)^{\frac{1}{2}(p-1)}}, \qquad \frac{(\varepsilon - i)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{\left((\varepsilon - i)\frac{\Delta}{(\vartheta - z)^2} + i\right)^{\frac{1}{2}(p-1)}}$$

dieselben Betrachtungen, deren Resultat in (33.), (34.), (35.) ausgesprochen ist; man hat nur statt $T + \eta t'$ die Grösse $\frac{\Delta}{(\vartheta - z)^2}$, statt $\frac{1}{2}p - 1$ den Exponenten $\frac{1}{2}(p-1)$ zu setzen. Mithin giebt der erste der Ausdrücke (62.) für seinen rein imaginären Theil immer den Grenzwerth Null, der zweite giebt den Grenzwerth Null, wenn

$$\frac{\Delta}{(\vartheta - z)^2} - 1 \geqq h$$

ist, und einen von Null verschiedenen Werth, sobald $\frac{1}{2}(p-1)$ keine ganze Zahl und

$$\frac{\Delta}{(\vartheta - z)^2} - 1 \leqq -h$$

ist *). Wenn aber $\frac{1}{2}(p-1)$ eine ganze Zahl, also p eine die Einheit übertreffende ungerade Zahl ist, so verschwinden die rein imaginären Theile von beiden Ausdrücken (62.), folglich verschwindet auch die Dichtigkeit ν_W für alle Punkte (x, y, z), und nur diejenigen sind ausgenommen, die der Fläche

$$(63.) \qquad \frac{\Delta}{(\vartheta - z)^2} - 1 = 0$$

sehr nahe liegen.

Von hier ab betrachte ich nur die ungeraden Zahlen als Werthe von p, und setze in der Gleichung (63.) die Grösse $\eta = 0$. Es sei ϑ die Normale der Fläche, in dem Punkte (x_0, y_0, z_0) errichtet und in einem bestimmten Sinne von der Fläche an gemessen, ϑ_1 ein kleiner positiver Werth, so kann man bei einem endlichen ε die Summe der Dichtigkeit ν_W für die Punkte bilden, welche auf dieser Normale zwischen den Grenzen $\vartheta = -\vartheta_1$ und $\vartheta = \vartheta_1$ liegen. Lässt man darauf ε unendlich klein werden, so nähert sich das betreffende Integral einem festen Werthe, und man sieht leicht, dass derselbe

*) Hierdurch wird die obige Bemerkung in Bezug auf die Functionen, bei denen $\frac{1}{2}(p-1)$ keine ganze Zahl ist, erwiesen, wenn man die später zu entwickelnden Eigenschaften der Function $\frac{\Delta}{(\vartheta - z)^2} - 1$ zu Hülfe nimmt.

die Dichtigkeit $\bar{\nu}$ derjenigen Flächenbelegung darstellt, in welche sich die Massenvertheilung von der Dichtigkeit ν_W verwandelt hat.

Wenn das Aggregat $\frac{\Delta}{(\delta-z)^2}-1$ durch $f(x,y,z)$ und nach *Lagrange* $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ durch $f'x$ bezeichnet wird, wenn man ferner die Grösse

$$\sqrt{(f'x_0)^2+(f'y_0)^2+(f'z_0)^2} = L$$

setzt, so gelten bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von ϑ die Gleichungen

$$x = x_0+\frac{f'x_0}{L}\vartheta, \qquad y = y_0+\frac{f'y_0}{L}\vartheta, \qquad z = z_0+\frac{f'z_0}{L}\vartheta,$$

$$f(x,y,z) = L\vartheta.$$

Diese Ausdrücke werden in die rechte Seite von (61.) substituirt, dann ist $\frac{\Delta}{(\delta-z)^2} = 1+L\vartheta$, und es sei

$$(64.) \qquad E\Big(\frac{\delta}{\gamma^2(\delta-z)}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{z}{\gamma^2(\delta-z)}\Big)^{\frac{1}{2}p-1}\frac{1}{\delta-z} = F(L\vartheta).$$

Da nun der erste von den Brüchen (62.) bei $\varepsilon=0$ zu dem Werthe von $\bar{\nu}$ nichts beiträgt, so gilt die Gleichung

$$(65.) \qquad \lim.-4\pi\int_{-\vartheta_1}^{+\vartheta_1}\nu_W\partial\vartheta = \lim.-4i\int_{-\vartheta_1}^{+\vartheta_1}\frac{F(L\vartheta)(\varepsilon-i)^{\frac{1}{2}(p-1)}\partial\vartheta}{((\varepsilon-i)(1+L\vartheta)+i)^{\frac{1}{2}(p-1)}}.$$

Der reelle Theil der rechten Seite, der hier allein zu beachten ist, hat bekanntlich für $p=3$ den Werth $-4\pi\frac{F(0)}{L}$, und in ähnlicher Weise findet man allgemein

$$(66.) \qquad -4\pi\bar{\nu} = -\frac{4\pi}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\frac{F^{\frac{1}{2}(p-3)}(0)}{L},$$

wo $\bar{\nu}$ nach dem oben Bemerkten $=\lim.\int_{-\vartheta_1}^{+\vartheta_1}\nu_W\partial\vartheta$, und

$$F^{\frac{1}{2}(p-3)}(u) = \frac{d^{\frac{1}{2}(p-3)}F(u)}{du^{\frac{1}{2}(p-3)}}$$

ist. Da $F(L\vartheta)$ gleich einer Function von z, ohne x und y, ist, so kann man die Differentiation nach ϑ mittelst der Gleichung

$$dz = \frac{f'z_0}{L^2}Ld\vartheta$$

durch eine Differentiation nach z ersetzen, und nach Ausführung derselben z_0 für z schreiben. Dadurch verwandelt sich die Gleichung (66.) in folgende:

$$(67.)\qquad \bar{\nu} = \frac{E}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\gamma^{-p-1}\delta^{\frac{3}{2}}\frac{d^{\frac{1}{2}(p-3)}\left(z^{\frac{1}{2}p-1}(\delta-z)^{-\frac{1}{2}(p+3)}\right)}{dz^{\frac{1}{2}(p-3)}}\,\frac{(f'z_0)^{\frac{1}{2}(p-3)}}{L^{p-2}},$$

die aber noch etwas zu vereinfachen ist. Aus (60.) folgt

$$(68.)\qquad \frac{E}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\gamma^{-p-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\,\frac{\alpha\beta\gamma^{-p+1}}{(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}} = E_1,$$

wo der Quotient $\frac{\Gamma(\frac{1}{2}p)}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ den Werth $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(\frac{1}{2}p-1)$ hat, da p eine ungerade Zahl bedeutet. Ferner werde statt $f(x, y, z)$ die Function

$$(69.)\qquad \varphi(x, y, z) = (\delta - z)^2 f(x, y, z) = \Delta - (\delta - z)^2$$

eingeführt, und bei x, y, z das Zeichen 0 fortgelassen, da hier *nur* von Punkten der Fläche die Rede ist; dann ist

$$f'z = \frac{\varphi' z}{(\delta - z)^2}, \qquad L = \frac{\sqrt{(\varphi' x)^2 + (\varphi' y)^2 + (\varphi' z)^2}}{(\delta - z)^2} = \frac{\Delta}{(z-\delta)^2},$$

und für die Dichtigkeit $\bar{\nu}$ der gesuchten Massenschicht entsteht der Ausdruck

$$(70.)\qquad \bar{\nu} = E_1\delta^{\frac{3}{2}}(\delta - z)^{p-1}\,\frac{d^{\frac{1}{2}(p-3)}\left(z^{\frac{1}{2}p-1}(\delta-z)^{-\frac{1}{2}(p+3)}\right)}{dz^{\frac{1}{2}(p-3)}}\,\frac{(\varphi' z)^{\frac{1}{2}(p-3)}}{\Delta^{p-2}}.$$

Das Potential dieser Massenschicht ist nach dem früher Bemerkten gleich der Function $\bar{\mathfrak{V}}_{-p}$, also für den ausserhalb S befindlichen Raum gleich der Function $\mathfrak{V}_{-p}$, und der Satz I. kommt in Anwendung, da seine Praemissen gültig sind. Der durch die Ungleichheiten $z > 0$, $z < \delta$ bezeichnete Theil der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ stellt für jeden ungeraden die Einheit übertreffenden Werth von p die Fläche Φ_{-p} dar, und soll daher von nun ab Φ genannt werden.

Der Fall, dass $\delta = 0$ ist, wurde oben von der Untersuchung ausgeschlossen; man übersieht aber, dass für denselben die Fläche Φ in ein Stück der xy-Ebene übergehen muss, und kann die Begrenzung desselben sowie die entsprechende Belegung aus dem Werthe von $\bar{\nu}$ ableiten, der für ein sehr kleines δ gilt. Es sei $\varkappa$ eine neue Variable und $z = \delta\varkappa$, so wird durch die Einführung derselben

$$(71.)\qquad \varphi(x, y, z) = \delta^2\varphi_0(x, y, \varkappa),$$

wo die Function $\varphi_0(x, y, \varkappa)$ aus zwei Theilen besteht, deren einer von δ frei ist, der andere den Factor δ^2 besitzt. Durch Vernachlässigung des letzteren kommt die Gleichung

$$(72.)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x, y, \varkappa) = \dfrac{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2}{\gamma^2}\varkappa + \dfrac{(x-\mathfrak{x}\varkappa)^2}{\alpha^2-\gamma^2} + \dfrac{(y-\mathfrak{y}\varkappa)^2}{\beta^2-\gamma^2} - (1-\varkappa)^2 \\ \qquad\qquad = A_0\varkappa^2 + 2B_0\varkappa + C_0, \end{cases}$$

wo die Coefficienten der Function zweiten Grades in Bezug auf $\varkappa$ folgende Werthe haben:

$$(73.)\quad \begin{cases} A_0 = \dfrac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2-\gamma^2} - 1, \\ B_0 = \dfrac{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}{2\gamma^2} - \dfrac{\mathfrak{x}x}{\alpha^2-\gamma^2} - \dfrac{\mathfrak{y}y}{\beta^2-\gamma^2} + 1, \\ C_0 = \dfrac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2-\gamma^2} - 1. \end{cases}$$

Die Bedingungen $z>0$, $z<\mathfrak{z}$ nehmen die Form an $\varkappa>0$, $\varkappa<1$, und man kann beweisen, dass die der zweiten entgegengesetzte Annahme $\varkappa>1$ mit der Gleichung $\varphi_0(x,y,\varkappa)=0$ unvereinbar ist. Die erste Bedingung $\varkappa>0$ kann entweder so erfüllt werden, dass diese Gleichung, nach $\varkappa$ aufgelöst, eine positive und eine negative Wurzel hat, oder so, dass ihre beiden Wurzeln reell und positiv sind. Da die Grössen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ hier so beschaffen sein müssen, dass $\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2}>1$, folglich gewiss $A_0>0$ ist, so hat man nach den unterschiedenen Fällen entweder die Ungleichheit

$$(74.)\qquad C_0<0,$$

oder die Ungleichheiten

$$(75.)\qquad C_0>0,\quad B_0^2-A_0C_0>0,\quad B_0<0.$$

Um die rechte Seite von (70.) umzuformen, bemerkt man, dass $\varphi' x=\mathfrak{z}^2\varphi_0' x$, $\varphi' y=\mathfrak{z}^2\varphi_0' y$, $\varphi' z=\mathfrak{z}\varphi_0'\varkappa$ ist, und dass folglich wegen der Vernachlässigung von $\mathfrak{z}^2$ die Grösse $\dfrac{\varphi' z}{A}=\dfrac{\varphi_0'\varkappa}{\sqrt{(\varphi_0'\varkappa)^2}}=\pm 1$ wird; ferner ist

$$\frac{d^{\frac{1}{2}(p-3)}\left(z^{\frac{1}{2}p-1}(\mathfrak{z}-z)^{-\frac{1}{2}(p+3)}\right)}{dz^{\frac{1}{2}(p-3)}} = \frac{d^{\frac{1}{2}(p-3)}\left(\varkappa^{\frac{1}{2}p-1}(1-\varkappa)^{-\frac{1}{2}(p+3)}\right)}{d\varkappa^{\frac{1}{2}(p-3)}}\,\frac{1}{\mathfrak{z}^{\frac{1}{2}p+1}}.$$

Daher kommt für die Dichtigkeit $\bar{\nu}$ der Werth

$$(76.)\qquad \bar{\nu} = E_1(1-\varkappa)^{p-1}\frac{d^{\frac{1}{2}(p-3)}\left(\varkappa^{\frac{1}{2}p-1}(1-\varkappa)^{-\frac{1}{2}(p+3)}\right)}{d\varkappa^{\frac{1}{2}(p-3)}}\,\frac{\pm 1}{(\varphi_0'\varkappa)^{\frac{1}{2}(p-1)}},$$

in welchen für die Punkte, die der Ungleichheit (74.) genügen, die positive Wurzel $\varkappa$ der Gleichung $\varphi_0(x,y,\varkappa)=0$ einzusetzen ist, dagegen für die Punkte, die den Ungleichheiten (75.) entsprechen, beide Wurzeln dieser Gleichung anzuwenden sind, und die Dichtigkeit gleich der Summe der betreffenden beiden Ausdrücke wird. Diese Erscheinung erklärt sich daraus, dass die Fläche Φ, indem sie bei $\mathfrak{z}=0$ in die xy-Ebene fällt, den ersten Raum einfach den zweiten aber doppelt bedeckt, wie die im Folgenden vorzunehmende Discussion ergeben wird.

§. 8.

Wenn die Fläche Φ als derjenige Theil der Fläche

$$(77.) \quad \varphi(x, y, z) = \delta z \frac{r^2}{\gamma^2} + \frac{(xz - \delta x)^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{(yz - \delta y)^2}{\beta^2 - \gamma^2} - (z - \delta)^2 = 0$$

definirt wird, der den Ungleichheiten $z > 0$, $z < \delta$ genügt, so ist dabei die früher erwähnte Voraussetzung wesentlich, dass der Werth δ positiv sein soll, da in dem entgegengesetzten Falle die Ungleichheiten $z < 0$, $z > \delta$ anzuwenden wären. Bei der analytischen Darstellung der Fläche $\Phi'_{-\delta}$ ist die Gleichung der Kegelfläche gebildet worden, die ihre Spitze im Punkte A hat, und durch die Ellipse (14.) hindurchgeht, nämlich

$$(78.) \quad \frac{(xz - \delta x)^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{(yz - \delta y)^2}{\beta^2 - \gamma^2} - (z - \delta)^2 = 0.$$

Der Umstand, dass die Function $\varphi(x, y, z)$ ausser den Gliedern der linken Seite dieser Gleichung nur das eine Glied $\delta z \frac{r^2}{\gamma^2}$ enthält, leitet darauf hin, die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ mit der betreffenden Kegelfläche zu vergleichen. Da die linke Seite von (78.) negativ oder positiv ist, je nachdem der Punkt (x, y, z) innerhalb oder ausserhalb der Kegelfläche liegt, und da der Ausdruck $\delta z \frac{r^2}{\gamma^2}$ das Vorzeichen der Grösse z hat, so erkennt man, dass derjenige Theil der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, für den $z > 0$ ist, innerhalb, der andere Theil derselben Fläche ausserhalb der Kegelfläche befindlich ist. Die Durchschnittslinie der beiden Flächen fällt in die Ebene $z = 0$ und ist die Ellipse (14.)

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2 - \gamma^2} - 1 = 0,$$

welche den Rand der ebenen Fläche Φ_0 bildet. Man bemerkt ferner, dass die Ungleichheit $z < \delta$ den Theil der Kegelfläche bezeichnet, welcher dem Ellipsoid S zugewandt ist, dagegen die Ungleichheit $z > \delta$ den diesem congruenten zweiten Theil, der von dem Ellipsoid S abgewandt ist. Mithin ist die Fläche Φ derjenige Theil der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, welcher innerhalb des dem Ellipsoid S zugekehrten Theiles der Kegelfläche (78.) liegt *).

---

*) Es wird sich später zeigen, dass durch die Ungleichheit $z < \delta$ kein Theil der Fläche, sondern nur der isolirte Punkt A abgeschnitten wird.

Aus dem Gange der Untersuchung, welche zu der Definition der Fläche Φ geführt hat, folgt schon mit Nothwendigkeit, dass diese Fläche durchaus innerhalb des Ellipsoids S liegt. Ein unabhängiger Beweis dafür ergiebt sich aber aus der folgenden Darstellung der Function $\varphi(x, y, z)$:

$$(79.)\quad \begin{cases} \varphi(x,y,z) = \left(\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-1\right)(z-\mathfrak{z})^2 - z(z-\mathfrak{z})\frac{r^2}{\gamma^2} \\ \qquad + \frac{(\alpha^2(x-\mathfrak{x})z-\gamma^2(z-\mathfrak{z})x)^2}{\alpha^2\gamma^2(\alpha^2-\gamma^2)} + \frac{(\beta^2(y-\mathfrak{y})z-\gamma^2(z-\mathfrak{z})y)^2}{\beta^2\gamma^2(\beta^2-\gamma^2)}. \end{cases}$$

Die beiden letzten Glieder derselben sind stets positiv, und das Glied $-z(z-\mathfrak{z})\frac{r^2}{\gamma^2}$ hat diese Eigenschaft wegen der Ungleichheiten $z>0$, $z<\mathfrak{z}$ gerade für die Punkte der Fläche Φ; deshalb giebt die Gleichung $\varphi(x, y, z)=0$ für den Ausdruck $\left(\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-1\right)(z-\mathfrak{z})^2$ niemals einen positiven Werth, d. h. die Punkte (x,y,z), die der Fläche Φ angehören, liegen niemals ausserhalb des Ellipsoids S.

Ich werde nun die Punkte der Fläche $\varphi(x, y, z)=0$ aufsuchen, in denen der Werth der z-Coordinate ein Maximum oder ein Minimum wird; die Coordinaten derselben finden sich aus den Gleichungen

$$\varphi(x, y, z)=0, \qquad \varphi' x=0, \qquad \varphi' y=0.$$

Es ist aber

$$(80.)\quad \begin{cases} \varphi' x = 2\mathfrak{z}z\frac{(x-\mathfrak{x})}{\gamma^2} - 2\mathfrak{z}\frac{(\mathfrak{x}z-\mathfrak{z}x)}{\alpha^2-\gamma^2}, \\ \varphi' y = 2\mathfrak{z}z\frac{(y-\mathfrak{y})}{\gamma^2} - 2\mathfrak{z}\frac{(\mathfrak{y}z-\mathfrak{z}y)}{\beta^2-\gamma^2}, \end{cases}$$

und das Verschwinden dieser Ausdrücke zieht entweder die Gleichungen

$$(81.)\qquad x-\mathfrak{x}=0, \qquad y-\mathfrak{y}=0, \qquad z-\mathfrak{z}=0,$$

oder die Proportion

$$(82.)\qquad x-\mathfrak{x} : y-\mathfrak{y} : z-\mathfrak{z} = \frac{x}{\alpha^2} : \frac{y}{\beta^2} : \frac{z}{\gamma^2}$$

nach sich. Die letztere, von der zuerst gesprochen werden soll, erlaubt die Einführung einer Grösse σ, vermöge deren x, y, z folgende Werthe bekommen:

$$(83.)\qquad x=\frac{\alpha^2\mathfrak{x}}{\alpha^2+\sigma}, \qquad y=\frac{\beta^2\mathfrak{y}}{\beta^2+\sigma}, \qquad z=\frac{\gamma^2\mathfrak{z}}{\gamma^2+\sigma}.$$

Durch die Substitution derselben geht $\varphi(x, y, z)=0$ in die folgende cubische Gleichung für σ über:

$$(84.)\qquad \frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2+\sigma}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2+\sigma}+\frac{\mathfrak{z}^2}{\gamma^2+\sigma}-1=0,$$

deren Form genau diejenige von (13.) ist, und die bekanntlich stets drei

reelle Wurzeln hat. Also giebt es in der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ immer drei Punkte, in denen die Tangentialebene der xy-Ebene parallel ist, und die Coordinaten von diesen werden aus (83.) durch Einsetzung der drei Wurzeln σ_1, σ_2, σ_3 für σ erhalten. Da dieselben so beschaffen sind, dass für die grösste σ_1

$$\alpha^2+\sigma_1>0, \quad \beta^2+\sigma_1>0, \quad \gamma^2+\sigma_1>0,$$

für die mittlere σ_2

$$\alpha^2+\sigma_2>0, \quad \beta^2+\sigma_2>0, \quad \gamma^2+\sigma_2<0,$$

und für die kleinste σ_3

$$\alpha^2+\sigma_3>0, \quad \beta^2+\sigma_3<0, \quad \gamma^2+\sigma_3<0$$

wird, so sieht man leicht, dass durch die Substitution von σ_1 allein die z-Coordinate in (83.) einen positiven Werth erhält. Also liegt nur dieser eine Punkt in der Fläche Φ.

Um zu entscheiden, ob in einem bestimmten von den drei Punkten der Werth von z ein Maximum oder ein Minimum wird, sind die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{2\mathfrak{z}z}{\gamma^2}+\frac{2\mathfrak{z}^2}{\alpha^2-\gamma^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{2\mathfrak{z}z}{\gamma^2}+\frac{2\mathfrak{z}^2}{\beta^2-\gamma^2}$$

in Betracht zu ziehen. Die Gleichungen (83.) geben

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{2\mathfrak{z}^2}{\alpha^2-\gamma^2}\,\frac{\alpha^2+\sigma}{\gamma^2+\sigma}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{2\mathfrak{z}^2}{\beta^2-\gamma^2}\,\frac{\beta^2+\sigma}{\gamma^2+\sigma},$$

und deshalb

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)=\frac{4\mathfrak{z}^4}{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)}\,\frac{(\alpha^2+\sigma)(\beta^2+\sigma)}{(\gamma^2+\sigma)^2};$$

da nun dieser Ausdruck für $\sigma=\sigma_1$ und $\sigma=\sigma_2$ das positive, für $\sigma=\sigma_3$ das negative Vorzeichen bekommt, so existirt in dem ersten und zweiten Punkte, die den Wurzeln $\sigma=\sigma_1$ und σ_2 entsprechen, ein sogenanntes absolutes Maximum oder Minimum, in dem dritten Punkte aber nicht. Der Werth von $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ fällt für alle drei Punkte positiv aus, und daher der Ausdruck $\dfrac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$ für $\sigma=\sigma_1$ negativ, für $\sigma=\sigma_2$ positiv; mithin hat z im ersten, der Fläche Φ angehörigen, Punkte einen grössten Werth, im zweiten Punkte einen kleinsten Werth.

Dieser erste Punkt, dessen Coordinaten

$$(83^a.) \qquad x=\frac{\alpha^2\mathfrak{x}}{\alpha^2+\sigma_1}, \quad y=\frac{\beta^2\mathfrak{y}}{\beta^2+\sigma_1}, \quad z=\frac{\gamma^2\mathfrak{z}}{\gamma^2+\sigma_1}$$

sind, bildet den Gipfel der Fläche Φ, wenn man sich die positive z-Axe vertikal und nach oben gerichtet vorstellt. Derselbe hat die beachtenswerthe Eigenschaft, sobald die Axen des Ellipsoids einander gleich werden und dasselbe sich in eine Kugel verwandelt, in das zu dieser gehörende Spiegelbild des Punktes (x, y, z) überzugehen; denn aus der Annahme $\alpha = \beta = \gamma$ folgt $\alpha^2 + \sigma_1 = x^2 + y^2 + z^2$ und

$$x = \frac{\alpha^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \qquad y = \frac{\alpha^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \qquad z = \frac{\alpha^2 z}{x^2+y^2+z^2},$$

wie behauptet wurde.

Die Voraussetzung (81.) liefert kein Maximum oder Minimum für z; denn durch dieselbe wird ausser der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ auch die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ erfüllt. Der betreffende Punkt A*) ist nämlich, wie sich zeigen wird, im Allgemeinen ein von der übrigen Fläche isolirter Punkt, und fällt nur dann mit einem Punkte der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ zusammen, wenn derselbe — unserer Annahme entgegen — in der Oberfläche des Ellipsoids S liegt; dann geht er aber in den Gipfel der Fläche Φ über.

§. 9.

Da die Fläche Φ mit den Flächen Φ_3, Φ_5 ... zusammenfällt, so lehrt der Satz I., dass das sphärische Spiegelbild Φ' der Fläche Φ mit den sämmtlichen Flächen Φ'_{-2}, Φ'_0, Φ'_2, Φ'_4, ... identisch ist, und das eine dieselbe bedeckende Massenschicht von der Dichtigkeit $\overline{\mu} = \frac{\overline{\nu}}{r'^3}$ die Potentiale $\overline{\mathfrak{U}}_{-2}$, $\overline{\mathfrak{U}}_0$, $\overline{\mathfrak{U}}_2$, $\overline{\mathfrak{U}}_4$, ... erzeugt, wenn man der Zahl p in dem Ausdruck $\overline{\nu}$ respective die Werthe 3, 5, 7, 9, ... beilegt. Von diesen Potentialen nimmt $\overline{\mathfrak{U}}_0$ das grösste Interesse in Anspruch, weil das Potential $\mathfrak{U}_0$, mit dem dasselbe für Punkte ausserhalb S' übereinstimmt, die Wirkung des homogenen Körpers mit der Grenzfläche S' darstellt, und daher nur von dieser Begrenzung selbst abhängt, während bei allen übrigen Potentialen $\mathfrak{U}_{p-5}$ das Gesetz der Dichtigkeitsänderung hinzukommt. Es hat daher die Fläche Φ' für den durch S' begrenzten Körper dieselbe Bedeutung, wie die Fläche Φ_0 für den durch das Ellipsoid S begrenzten Körper, und durch diese Ueberlegung wird es erklärlich, dass die Fläche Φ', wie wir sogleich sehen werden, durch ein einfacheres Gesetz bestimmt ist, als die Fläche Φ, welche bei der Untersuchung vor jener

*) welcher übrigens wegen der Bedingung $z < \zeta$ in der Fläche Φ nicht vorkommen kann.

gefunden wurde. In der That, wenn man in die Function $\varphi(x, y, z)$ für x, y, z die Werthe aus (3.) einsetzt, so kommt:

$$(77^a.)\quad \begin{cases} \varphi(x, y, z) = r^4\left\{\dfrac{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}r'^2+z'-\mathfrak{z})}{\gamma^2}+\dfrac{(\mathfrak{x}z'-\mathfrak{z}x')^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\dfrac{(\mathfrak{y}z'-\mathfrak{z}y')^2}{\beta^2-\gamma^2}-(z'-\mathfrak{z})^2\right\} \\ \qquad = r^4\psi(x', y', z'), \end{cases}$$

und die Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ wird entweder durch die Annahme $r^4 = 0$, oder durch die Annahme

$$\psi(x', y', z') = 0$$

befriedigt. Die Gleichung $r^4 = 0$ stellt den Punkt A dar *), die Gleichung $\psi(x', y', z') = 0$ ist aber in Bezug auf x', y', z' die Gleichung des sphärischen Spiegelbildes von der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, und bedeutet eine Fläche zweiten Grades. Also ist die Fläche Φ' ein Stück einer Fläche zweiten Grades, während Φ ein Stück einer Fläche dritten Grades ist; und zwar ist diese eine solche, die durch sphärische Spiegelung aus einer Fläche zweiten Grades entstanden ist und daher derselben Gattung von Flächen angehört, wie die Oberfläche S'.

Aus einer bei Veranlassung der Gleichung (11.) von S' gemachten Bemerkung kann man folgern, dass der Punkt A in der Fläche $\psi(x', y', z') = 0$ selbst liegen muss, und die Einsetzung der Werthe

$$x' = \mathfrak{x},\quad y' = \mathfrak{y},\quad z' = \mathfrak{z}$$

bestätigt dies. Man bemerkt ferner, dass für diese Werthe die Differentialquotienten $\frac{\partial\psi}{\partial x'}$ und $\frac{\partial\psi}{\partial y'}$ verschwinden, d. h. im Punkte A fällt die Normale der Richtung nach mit der Axe der z zusammen. Sucht man jetzt den zweiten Punkt auf, in dem

$$\frac{\partial\psi}{\partial x'} = \frac{2\mathfrak{z}^2}{\gamma^2}(x'-\mathfrak{x})-\frac{2\mathfrak{z}(\mathfrak{x}z'-\mathfrak{z}x')}{\alpha^2-\gamma^2} = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y'} = \frac{2\mathfrak{z}^2}{\gamma^2}(y'-\mathfrak{y})-\frac{2\mathfrak{z}(\mathfrak{y}z'-\mathfrak{z}y')}{\beta^2-\gamma^2} = 0$$

wird, so kommt zuerst

$$x'-\mathfrak{x} : y'-\mathfrak{y} : z'-\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}}{\alpha^2} : \frac{\mathfrak{y}}{\beta^2} : \frac{\mathfrak{z}}{\gamma^2},$$

und dann wegen der Gleichung $\psi(x', y', z') = 0$,

$$(85.)\quad \begin{cases} x'-\mathfrak{x} = -\dfrac{\mathfrak{x}}{\alpha^2}\dfrac{1}{f},\quad y'-\mathfrak{y} = -\dfrac{\mathfrak{y}}{\beta^2}\dfrac{1}{f},\quad z'-\mathfrak{z} = -\dfrac{\mathfrak{z}}{\gamma^2}\dfrac{1}{f}, \\ f = \dfrac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2}+\dfrac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2}+\dfrac{\mathfrak{z}^2}{\gamma^2}-1. \end{cases}$$

*) der durch die Bedingung $z < \mathfrak{z}$ von der Fläche Φ ausgeschlossen ist.

Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Punkte A ist ein Durchmesser der Fläche $\psi(x', y', z') = 0$, und daher sind die Coordinaten ihres Mittelpunktes die folgenden:

$$(86.) \qquad x' = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{x}}{2\alpha^2 f}, \quad y' = \mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{y}}{2\beta^2 f}, \quad z' = \mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{z}}{2\gamma^2 f}.$$

Es werde nun der Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Mittelpunkt verlegt, während die Richtung der Coordinatenaxen ungeändert bleibt, und es sei

$$(87.) \quad x' - \mathfrak{x}\left(1 - \frac{1}{2\alpha^2 f}\right) = x'_m, \quad y' - \mathfrak{y}\left(1 - \frac{1}{2\beta^2 f}\right) = y'_m, \quad z' - \mathfrak{z}\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2 f}\right) = z'_m,$$

so geht die Function ψ in folgende Form über:

$$(88.) \qquad \psi = \frac{\mathfrak{z}^2}{\gamma^2}(x'^2_m + y'^2_m + z'^2_m) + \frac{(\mathfrak{x} z'_m - \mathfrak{z} x'_m)^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{(\mathfrak{y} z'_m - \mathfrak{z} y'_m)^2}{\beta^2 - \gamma^2} - z'^2_m - \frac{\mathfrak{z}^2}{4\gamma^4}\frac{1}{f}.$$

Dieselbe ist gewählt worden, um die Hauptaxen der Fläche $\psi = 0$ aufzusuchen; die Auflösung dieser Aufgabe besteht aber bekanntlich darin, dass man statt der Veränderlichen x'_m, y'_m, z'_m drei neue Veränderliche ξ_1, ξ_2, ξ_3 einführt, welche die Gleichung

$$(89.) \qquad x'^2_m + y'^2_m + z'^2_m = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

befriedigen, und die Function ψ in einen Ausdruck verwandeln, der nur die Quadrate der Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 und das constante Glied $-\frac{\mathfrak{z}^2}{4\gamma^4}\frac{1}{f}$ enthält.

Zu diesem Zwecke bemerke ich, dass der Ausdruck

$$(90.) \qquad \chi = \frac{(\mathfrak{x} z'_m - \mathfrak{z} x'_m)^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{(\mathfrak{y} z'_m - \mathfrak{z} y'_m)^2}{\beta^2 - \gamma^2} - z'^2_m,$$

gleich Null gesetzt, eine Kegelfläche bedeutet, welche durch Verschiebung im Raume und ohne Drehung mit der Kegelfläche der Gleichung (78.) zur Coincidenz gebracht werden kann. Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei neue Variable, welche die Gleichung (89.) erfüllen, so kann man bekanntlich mit Hülfe der drei Wurzeln σ_1, σ_2, σ_3 der Gleichung (84.) eine Form der Function χ aufstellen, bei der ξ_1, ξ_2, ξ_3 den Hauptaxen der Fläche $\chi = 0$ parallel genommene Coordinaten bedeuten, nämlich

$$(90'.) \qquad \chi = -\frac{\mathfrak{z}^2 \xi_1^2}{\sigma_1 + \gamma^2} - \frac{\mathfrak{z}^2 \xi_2^2}{\sigma_2 + \gamma^2} - \frac{\mathfrak{z}^2 \xi_3^2}{\sigma_3 + \gamma^2},$$

während die Richtung der Axen ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch Substitution der Werthe σ_1, σ_2, σ_3 für σ in die Proportion

$$(91.) \qquad x'_m : y'_m : z'_m = \frac{\mathfrak{x}}{\sigma + \alpha^2} : \frac{\mathfrak{y}}{\sigma + \beta^2} : \frac{\mathfrak{z}}{\sigma + \gamma^2}$$

gefunden wird. Nun ist die Function

$$\psi = \frac{\delta^2}{\gamma^2}(x_m'^2+y_m'^2+z_m'^2)+\chi-\frac{\delta^2}{4\gamma^4}\frac{1}{f},$$

also nimmt dieselbe durch Einsetzung der Variabeln ξ_1, ξ_2, ξ_3, welche durch die Relationen (89.) und (91.) bestimmt sind, folgende Gestalt an:

$$\psi = \frac{\delta^2}{\gamma^2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)-\delta^2\Big(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1+\gamma^2}+\frac{\xi_2^2}{\sigma_2+\gamma^2}+\frac{\xi_3^2}{\sigma_3+\gamma^2}+\frac{1}{4\gamma^4 f}\Big),$$

welche noch einfacher so dargestellt wird:

$$(92.)\qquad \psi = \frac{\delta^2}{\gamma^2}\Big(\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\gamma^2}\xi_1^2+\frac{\sigma_2}{\sigma_2+\gamma^2}\xi_2^2+\frac{\sigma_3}{\sigma_3+\gamma^2}\xi_3^2-\frac{1}{4\gamma^2 f}\Big).$$

Dies ist die Form von ψ, welche gesucht wurde und aus welcher hervorgeht, dass die Hauptaxen der Fläche $\psi=0$ mit den Hauptaxen der Kegelfläche (78.) gleiche Richtungen haben. Bei der hier festzuhaltenden Annahme, dass der Punkt A ausserhalb des Ellipsoids S liegt, ist die Fläche $\psi=0$ stets ebenfalls ein Ellipsoid; denn die Quadrate der halben Axen

$$\frac{\sigma_1+\gamma^2}{4\gamma^2 f\sigma_1},\qquad \frac{\sigma_2+\gamma^2}{4\gamma^2 f\sigma_2},\qquad \frac{\sigma_3+\gamma^2}{4\gamma^2 f\sigma_3}$$

sind positiv, da wegen der angeführten Bedingung $f>0$, $\sigma_1>0$, ferner $\sigma_1+\gamma^2>0$, $\sigma_2+\gamma^2<0$, $\sigma_3+\gamma^2<0$ ist. Auch schliesst man leicht aus den über die Wurzeln σ_1, σ_2, σ_3 gemachten Bemerkungen, dass die ξ_1-Axe die grösste, die ξ_2-Axe die kleinste von den Axen ist.

Wenn der Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ der Oberfläche S genähert wird, so nimmt der Ausdruck f stets ab, die Wurzel σ_1 wird demselben proportional, und der Mittelpunkt der Fläche $\psi=0$ rückt auf einer durch den Punkt A gehenden, der Axe ξ_1 beinahe parallelen Linie so vorwärts, dass seine Entfernung vom Punkte A der Grösse $\frac{1}{f}$ proportional zunimmt. Mithin geht die Fläche $\psi=0$ in ein Paraboloid über, dessen unendliche grösste Axe, wenn man diesen Ausdruck brauchen darf, die Richtung von ξ_1 hat.

Die Fläche Φ war als derjenige Theil der Fläche $\varphi(x, y, z)=0$ bezeichnet worden, der innerhalb des dem Ellipsoid S zugekehrten Theiles der Kegelfläche (78.) liegt. Da nun durch die sphärische Spiegelung diese Kegelfläche in sich selbst und die Fläche $\varphi(x, y, z)=0$ in die Fläche $\psi=0$ verwandelt wird, so ist die Fläche Φ' derjenige Theil der Fläche $\psi=0$, der innerhalb des dem Ellipsoid S zugekehrten Theiles derselben Kegelfläche liegt. Man sieht aber sogleich, dass kein Theil der Fläche $\psi=0$ innerhalb des

anderen Theiles der Kegelfläche liegt, so lange die Voraussetzung, dass der Punkt A nicht in das Innere des Ellipsoids S eintreten darf, festgehalten wird. Mithin kann sowohl bei der Bestimmung von Φ wie auch bei der Bestimmung von Φ' die Hervorhebung eines Theiles der Kegelfläche fortfallen.

Da die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ nach den Gleichungen (81.) aus dem Punkte A und dem sphärischen Spiegelbilde der Fläche zweiten Grades $\psi = 0$ besteht, so kann man aus den bekannten Eigenschaften der letzteren die Eigenschaften der ersteren ableiten, was ich andeutungsweise thun will. Wenn der Punkt A ausserhalb des Ellipsoids S liegt, so ist die Fläche $\psi = 0$ ein Ellipsoid, und hat als solches in keinem Punkte eine Unterbrechung der Stetigkeit in Betreff der Krümmung und keinen unendlich entfernten Punkt. Daraus folgt, dass bei dem sphärischen Spiegelbilde derselben keine Unterbrechung der Stetigkeit in Bezug auf die Krümmung vorkommt, dass das Spiegelbild eine einzige stetig zusammenhängende Fläche bildet, und dass der Punkt A kein Punkt dieser Fläche wird. Wenn aber der Punkt A in die Oberfläche S tritt, so wird die Fläche $\psi = 0$ ein Paraboloid, und besitzt als solches einen unendlich entfernten Punkt, während die Stetigkeit der Krümmung ebenfalls an keiner Stelle eine Unterbrechung erfährt. Daraus schliesst man, dass der Punkt A ein Punkt des sphärischen Spiegelbildes der Fläche wird, und zwar der äusserste Punkt einer Spitze, bei der eine dem Punkte A unendlich nahe und senkrecht gegen die Axe ξ_1 geführte Ebene einen unendlich viel kleineren Durchschnitt liefert als bei der Kegelfläche (78.), dass ferner in den übrigen Punkten der Fläche die Stetigkeit der Krümmung nicht verletzt wird und dass dieselbe ein einziges stetig zusammenhängendes Flächenstück ausmacht. Hiermit sind zugleich die am Schlusse des vorigen §. über den Punkt A aufgestellten Behauptungen erwiesen. Da der Punkt A (das Centrum der spiegelnden Kugelfläche, welche hier immer vorausgesetzt wird) stets in der Fläche $\psi = 0$ liegt, so dehnt sich das sphärische Spiegelbild von dieser ins Unendliche aus, und für jeden durch die Normale im Punkte A gelegte Ebene liefert die Abbildung des Krümmungskreises diejenige gerade Linie, welcher sich der betreffende Durchschnitt der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ im Unendlichen asymptotisch anschliesst; diese sämmtlichen Linien stehen senkrecht auf der z-Axe.

Es mögen nun noch die drei Punkte der Fläche $\psi = 0$ bestimmt werden, deren sphärische Spiegelbilder die drei Punkte sind, in welchen die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ eine mit der xy-Ebene parallele Tangentialebene hat. Das sphärische Spiegelbild einer Ebene $z = \text{Const.}$ ist eine Kugelfläche, deren

Mittelpunkt in einer durch den Punkt A gezogenen Parallele zur z-Axe liegt, und die durch den Punkt A hindurchgeht. Bei der Fläche $\psi = 0$ ist aber eine solche Parallele zur z-Axe nichts Anderes, als die im Punkte A errichtete Normale der Fläche $\psi = 0$, wie oben erwähnt worden. Es erfordert also die gestellte Aufgabe nur das Aufsuchen der Punkte, in welchen eine die Fläche $\psi = 0$ im Punkte A berührende Kugel diese Fläche zum zweiten Male berühren kann. Diese Punkte werden offenbar erhalten, indem man durch den Punkt A zu den Hauptaxen der Fläche ξ_1, ξ_2, ξ_3 Parallelen zieht und die Fläche von diesen zum zweiten Male schneiden lässt. Nennt man diese Punkte respective den ersten, zweiten, dritten, so folgt aus einer näheren Erwägung, dass die Kugel, welche zugleich in A und im ersten Punkte berührt, das Ellipsoid $\psi = 0$ gänzlich umschliesst, dass die Kugel, welche zugleich in A und im zweiten Punkte berührt, von dem Ellipsoid $\psi = 0$ gänzlich umschlossen wird, und dass die Kugel, welche zugleich in A und dem dritten Punkte berührt, das Ellipsoid schneidet. Mithin sind die sphärischen Spiegelbilder des ersten, zweiten und dritten Punktes respective der erste, zweite und dritte Punkt der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, deren Coordinaten durch Einsetzung der Werthe σ_1, σ_2, σ_3 für σ in die Ausdrücke (83.) entstehen, und man schliesst zugleich aus dem Gesagten, dass die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ durch die beiden Ebenen $z = \frac{\gamma^2 \delta}{\gamma^2 + \sigma_1}$ und $z = \frac{\gamma^2 \delta}{\gamma^2 + \sigma_2}$ vollständig eingeschlossen wird.

§. 10.

Es bleibt jetzt die Untersuchung der Fläche übrig, in welche sich die Fläche Φ verwandelt, sobald der Punkt A der xy-Ebene genähert wird, um zuletzt in dieselbe hineinzufallen. Nach den vorhergehenden Paragraphen wird die Fläche Φ beständig durch die Ellipse

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2 - \gamma^2} = 1$$

begrenzt und bildet ein stetig zusammenhängendes Flächenstück, das innerhalb der Kegelfläche (78.) liegt und zwar zwischen der Spitze derselben im Punkte A und der xy-Ebene. Wenn der Punkt A gegen die xy-Ebene geneigt wird, so nähert sich die Kegelfläche einem zweifach genommenen durch zwei sich schneidende gerade Linien begrenzten Stücke dieser Ebene; mithin geht die Fläche Φ auf die Weise in einen Theil dieser Ebene über, dass das Innere der Ellipse (14.) von der Fläche einfach, ein ausserhalb dieser Ellipse

liegendes, mit ihrem inneren Flächenraume stetig zusammenhängendes Stück aber doppelt bedeckt wird. Zugleich sieht man, dass dabei der über das Innere der Ellipse (14.) oder die Fläche Φ_0 ausgebreitete Theil der Fläche Φ immer vorhanden sein muss, während das dazu kommende Stück der Ebene auch fehlen kann.

Diese Betrachtung steht mit den Resultaten des §. 7 in vollständigem Einklange, indem das Innere der Ellipse (14.) oder die Fläche Φ_0 durch die Ungleichheit

$$(74.) \qquad C_0 < 0,$$

das ausserhalb derselben liegende Stück der Ebene durch die Ungleichheiten

$$(75.) \qquad C_0 > 0, \quad B_0^2 - A_0 C_0 > 0, \quad B_0 < 0$$

bezeichnet wird. Es kommt nun darauf an, für das letztere die Beschaffenheit seiner Begrenzung und, was damit auf das Genaueste zusammenhängt, die Bedingungen seines Verschwindens zu entwickeln.

Die Gleichung $B_0^2 - A_0 C_0 = 0$ bedeutet eine geschlossene Curve vierten Grades und $B_0^2 - A_0 C_0 > 0$ den ausserhalb derselben befindlichen Flächenraum, wie nachher gezeigt werden wird. Da A_0 stets positiv ist, so wird diese Ungleichheit immer erfüllt, wenn $C_0 < 0$ ist, d. h. der erwähnte Flächenraum schliesst die Ellipse $C_0 = 0$ in sich. Es kann ferner nicht zugleich $B_0^2 - A_0 C_0 = 0$ und $C_0 = 0$ sein, ohne dass $B_0 = 0$ ist. Die Gleichung $B_0 = 0$ bedeutet einen Kreis, und so folgert man, dass die Curven $B_0^2 - A_0 C_0 = 0$ und $C_0 = 0$ in den Punkten und nur in den Punkten zusammentreffen, in welchen der Kreis $B_0 = 0$ und die Ellipse $C_0 = 0$ sich schneiden. Also ist das Schneiden dieser beiden Curven ins Auge zu fassen, und da die Berührung in dem Zusammenfallen mehrerer Schnittpunkte besteht, so genügt die Unterscheidung der folgenden Fälle:

1. Der Kreis schneidet die Ellipse in vier Punkten. Es wird der Beweis gegeben werden, dass dieser Fall unter den vorliegenden Umständen nicht eintreten kann.

2. Der Kreis schneidet die Ellipse in zwei Punkten. Alsdann zerfällt die Contour der Ellipse in zwei Stücke, von denen das eine innerhalb des Kreises liegt und die Ungleichheit $B_0 < 0$ befriedigt, das andere ausserhalb des Kreises liegt und die Ungleichheit $B_0 > 0$ erfüllt. Da nun die Curve $B_0^2 - A_0 C_0 = 0$ in denselben beiden Punkten von dem Kreise $B_0 = 0$ geschnitten wird, so zerfällt ihre Contour ebenfalls in zwei Stücke, in denen respective $B_0 < 0$ und $B_0 > 0$ ist. Dagegen theilt der Bogen der Ellipse den inneren

Raum des Kreises $B_0 < 0$ in zwei Stücke, für die respective $C_0 > 0$ und $C_0 < 0$ ist, und der Bogen der Curve vierten Grades theilt den inneren Raum des Kreises auch in zwei Stücke, für die respective $B_0^2 - A_0 C_0 > 0$ und $B_0^2 - A_0 C_0 < 0$ ist; das Stück $B_0^2 - A_0 C_0 > 0$ begreift aber das Stück $C_0 < 0$ in sich. Folglich wird das durch die Ungleichheiten (75.) bestimmte Flächenstück von dem Ellipsenbogen, in welchem $B_0 < 0$ ist und dem Bogen der Curve $B_0^2 - A_0 C_0 = 0$, in welchem $B_0 < 0$ ist, begrenzt und zwischen den beiden Bogen findet in den beiden Punkten ihres Zusammentreffens Berührung Statt.

3. Der Kreis schneidet die Ellipse nicht. Dann ist es denkbar, dass derselbe entweder innerhalb der Ellipse, oder ausserhalb derselben und im Raume $B_0^2 - A_0 C_0 > 0$, oder ausserhalb derselben und im Raume $B_0^2 - A_0 C_0 < 0$ liegt. Das erste ist hier nicht möglich, weil der Mittelpunkt des Kreises die Coordinaten $x = \frac{\alpha^2 \mathfrak{x}}{\alpha^2 - \gamma^2}$, $y = \frac{\beta^2 \mathfrak{y}}{\beta^2 - \gamma^2}$ hat und daher stets ausserhalb der Ellipse $C_0 = 0$ liegt; das zweite ist nicht möglich, weil dabei die Bedingung $B_0 < 0$ durch einen von der Ellipse $C_0 = 0$ abgesonderten Kreis erfüllt würde, und somit die Fläche Φ aus zwei getrennten Stücken bestünde; daher ist nur die dritte Annahme zulässig, bei welcher der durch die Ungleichheiten (75.) bezeichnete Raum verschwunden ist. Hieraus folgt, dass ein den Ungleichheiten (75.) genügender Flächenraum existirt oder nicht existirt, je nachdem der Kreis $B_0 = 0$ die Ellipse $C_0 = 0$ schneidet oder nicht schneidet, und im ersteren Falle ist die Art seiner Begrenzung unter 2. beschrieben worden. Die analytische Bedingung, von der das Schneiden der beiden Curven abhängt, ist zugleich mit dem zu 1. nachzuliefernden Beweise, dass ein Schneiden in 4 Punkten nicht vorkommen kann, aufzusuchen. Die Elimination einer der Grössen x oder y aus den Gleichungen $B_0 = 0$, $C_0 = 0$ liefert für die übrig bleibende eine Gleichung vierten Grades, deren Betrachtung zu dem betreffenden Ziele führen muss; der folgende Weg schien mir aber einfacher zu sein.

Jedes Paar von reellen Werthen x und y, welche die Gleichung $C_0 = 0$ befriedigen, wird erhalten und jedes nur *ein* Mal, wenn man in den Ausdrücken

$$x = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}\,\frac{2\zeta}{1+\zeta^2}, \qquad y = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$$

der Grösse ζ alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt. Setzt man daher diese Ausdrücke in die Gleichung $B_0 = 0$ ein, so hat die resultirende Glei-

chung vierten Grades die Eigenschaft, dass die Zahl ihrer reellen Wurzeln die Zahl der Punkte angiebt, in denen der Kreis $B_0 = 0$ und die Ellipse $C_0 = 0$ sich schneiden. Diese Gleichung nimmt durch Einführung der Abkürzungen

$$x^2+\mathfrak{y}^2+\beta^2+\gamma^2 = m, \quad \frac{\alpha^2 x}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}} = a', \quad \frac{\beta^2 \mathfrak{y}}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}} = b'$$

die Form an:

$$(93.) \qquad (m+2b')\zeta^4 - 4a'\zeta^3 + (4\alpha^2 - 4\beta^2 + 2m)\zeta^2 - 4a'\zeta + m - 2b = 0,$$

und ihre Wurzeln sind in dem Ausdruck enthalten:

$$\zeta = \frac{a'}{m+2b'} + \sqrt{\vartheta_1} + \sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_3},$$

wo ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 die Wurzeln einer gewissen cubischen Gleichung sind. Da das Product derselben stets positiv ist, so ist eine dieser Wurzeln ebenfalls positiv, und die *beiden* übrigen sind entweder positiv oder negativ oder complex; dem entsprechend liefert aber die Gleichung (93.) für ζ vier reelle oder vier complexe oder zwei reelle und zwei complexe Wurzeln.

Nun geht die Gleichung für ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, die ich nicht hinschreibe, durch die Substitution

$$\vartheta = -\frac{a'^2}{(m+2b')^2} - \frac{\alpha^2+s}{m+2b'}$$

in die Gleichung

$$(94.) \qquad \frac{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\gamma^2}x^2}{\alpha^2+s} + \frac{\frac{\beta^2}{\beta^2-\gamma^2}\mathfrak{y}^2}{\beta^2+s} + \frac{\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}-\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2-\gamma^2}\right)\gamma^2}{s} = 1$$

über, von der man sogleich die Eigenschaft erkennt, dass wenigstens eine ihrer Wurzeln grösser als $-\alpha^2$ sein muss. Aus einer solchen Wurzel folgt ein negativer Werth für ϑ, weil m wesentlich positiv ist und b' immer positiv angenommen werden darf; es müssten aber die sämmtlichen Wurzeln ϑ positiv sein, wenn die Gleichung (93.) für ζ vier reelle Wurzeln liefern sollte, und daher ist diese Möglichkeit ausgeschlossen und mit derselben das Schneiden der Curven $B_0 = 0$ und $C_0 = 0$ in vier Punkten, w. z. b. w.

Ob die Gleichung (93.) zwei reelle Wurzeln oder keine reelle Wurzel besitzt, das hängt jetzt davon ab, ob die Gleichung für ϑ nur eine oder drei reelle Wurzeln hat, oder auch davon, ob die Gleichung (94.) für s in dem einen oder dem andern Falle ist. Wenn man dieselbe ordnet, so kommt

$$(94^a.) \qquad s^3 + c's^2 + c''s + c''' = 0,$$

wo

$$(94^b.)\qquad \begin{cases} c' &= \alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2, \\ c'' &= (\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)\Big(\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2-\gamma^2}-1\Big), \\ c''' &= \alpha^2\beta^2\gamma^2\Big(\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2-\gamma^2}-1\Big) \end{cases}$$

ist, und bekanntlich treten hier eine oder drei reelle Wurzeln auf, je nachdem die Discriminante

$$(95.)\qquad G = c'^2c''^2-4c''^3-4c'^3c'''-27c'''^2+18c'c''c'''$$

negativ oder positiv ist. Also ist die Ungleichheit

$$G<0$$

die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung (94.) zwei reelle Wurzeln hat, dass die Curven $C_0=0$ und $B_0=0$ sich in zwei Punkten schneiden, und dass der durch die Bedingungen (75.) bestimmte Flächenraum nicht verschwindet.

Der Ausdruck G, als Function von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ aufgefasst, enthält den algebraischen Factor $A_0=\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2-\gamma^2}-1$, da derselbe sowohl c'' als c''' theilt; der Quotient $\frac{G}{A_0}$ ist in Bezug auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ vom sechsten Grade, enthält aber nur die Quadrate dieser Grössen und ist im Allgemeinen nicht in Factoren zerlegbar. Da nur solche Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ betrachtet werden, für welche $A_0>0$ ist, so tritt unter den vorliegenden Verhältnissen die Ungleichheit $\frac{G}{A_0}<0$ an die Stelle der Ungleichheit $G<0$.

In Bezug auf die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnet mithin die Curve $\frac{G}{A_0}=0$ die Grenze zwischen den Punkten, für welche die Fläche Φ grösser ist als Φ_0 und den Punkten, für welche Φ mit Φ_0 zusammenfällt. Auf die allgemeine Discussion dieser Curve werde ich nicht eingehen und mich nur auf den Fall beschränken, dass $\alpha=\beta$ und die Fläche ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ist. Dann ist die Curve $C_0=0$, welche die Fläche Φ_0 einschliesst, ein Kreis

$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2-\gamma^2}-1=0,$$

und die Discriminante G geht in folgenden einfachen Ausdruck über:

$$(95^a.)\qquad G=\frac{\alpha^8}{(\alpha^2-\gamma^2)^2}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-\alpha^2-\gamma^2)\Big(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-\frac{(\alpha^2+\gamma^2)^2}{\alpha^2-\gamma^2}\Big),$$

aus welchem die Gleichung

$$\frac{G}{A_0} = \frac{\alpha^8}{\alpha^2-\gamma^2}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2\left(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-\frac{(\alpha^2+\gamma^2)^2}{\alpha^2-\gamma^2}\right)$$

folgt, da $A_0 = \frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}{\alpha^2-\gamma^2}-1$ ist. Demnach hat man $\frac{G}{A_0}<0$ oder $\frac{G}{A_0}>0$, je nachdem

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2<\frac{(\alpha^2+\gamma^2)^2}{\alpha^2-\gamma^2} \text{ oder } \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2>\frac{(\alpha^2+\gamma^2)^2}{\alpha^2-\gamma^2}$$

ist, und es entsteht der Satz, dass die Fläche Φ mit der Fläche Φ_0 identisch wird, wenn der Punkt A in der xy-Ebene ausserhalb des Kreises liegt, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt des Ellipsoids S und dessen Radius gleich der Grösse $\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$ ist. Die Flächen Φ und Φ_0 fallen aber für keine andere Lage des Punktes A zusammen, bei der A von dem Ellipsoide S in endlicher Entfernung bleibt; für die xy-Ebene ist dies im Vorhergehenden bewiesen, und für Punkte, die ausserhalb derselben befindlich sind, folgt es daraus, dass die z-Coordinate des Gipfels der Fläche Φ, $z=\frac{\gamma^2\mathfrak{z}}{\gamma^2+\sigma_1}$, bei endlichen Werthen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}>0$ nicht verschwinden kann.

In Betreff des sphärischen Spiegelbildes Φ' der Fläche Φ ist zu bemerken, dass, weil der Punkt A in der xy-Ebene liegt, auch dieses ein Stück dieser Ebene wird. Statt der Gleichungen (3.) sind hier die folgenden anzuwenden:

$$(96.)\qquad \begin{cases} x=\mathfrak{x}+\frac{x'-\mathfrak{x}}{r'^2}, \qquad y=\mathfrak{y}+\frac{y'-\mathfrak{y}}{r'^2}, \\ r'^2=(x'-\mathfrak{x})^2+(y'-\mathfrak{y})^2, \end{cases}$$

und vermöge derselben ist die Gleichung des Spiegelbildes der Ellipse $C_0=0$, bezogen auf den Punkt (x', y'), diese Gleichung vierten Grades:

$$(97.)\qquad \frac{(\mathfrak{x}r'^2+x'-\mathfrak{x})^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{(\mathfrak{y}r'^2+y'-\mathfrak{y})^2}{\beta^2-\gamma^2}-r'^4=0.$$

Die Gleichung des Spiegelbildes der Curve vierten Grades $B_0^2-A_0C_0=0$, bezogen auf den Punkt (x', y'), wird dagegen die folgende Gleichung zweiten Grades:

$$(98.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{4\gamma^4}-\frac{\mathfrak{x}(x'-\mathfrak{x})}{\gamma^2(\alpha^2-\gamma^2)}-\frac{\mathfrak{y}(y'-\mathfrak{y})}{\gamma^2(\beta^2-\gamma^2)}-\left(\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2-\gamma^2}-1\right)\frac{r'^2}{\gamma^2} \\ \qquad +\frac{(x'-\mathfrak{x})^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{(y'-\mathfrak{y})^2}{\beta^2-\gamma^2}-\frac{(\mathfrak{x}y'-\mathfrak{y}x')^2}{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)}=0. \end{cases}$$

welche eine Ellipse darstellt, so lange der Punkt A, der Annahme gemäss, ausserhalb des Ellipsoids S liegt. Da sich der Punkt A, wie leicht zu sehen, stets innerhalb dieser Ellipse befindet, so bezeichnet die Gleichung $B_0^2 - A_0 C_0 = 0$ eine geschlossene Curve, und aus der Form der Gleichung (98.) kann geschlossen werden, dass die Ungleichheit $B_0^2 - A_0 C_0 > 0$ in dem ausserhalb dieser Curve liegenden Flächenraume Gültigkeit hat, wie oben behauptet wurde. Somit dient die Betrachtung der Fläche Φ' wieder zur Ergänzung für die Untersuchung der Fläche Φ; in Betreff der Gestalt von Φ' bildet sich aber das Resultat, dass unter der Bedingung $\frac{G}{A_0} > 0$ Φ' durch die Curve vierten Grades (97.) begrenzt wird und mit Φ'_{-5} identisch ist, dass dagegen unter der Bedingung $\frac{G}{A_0} < 0$ Φ' aus der Fläche Φ'_{-5} und einem anderen Stück der xy-Ebene besteht, das von einem Bogen der Curve (97.) und einem Bogen der Ellipse (98.) eingeschlossen wird. Diese beiden Bogen werden aber durch die Ungleichheit

$$\frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\mathfrak{x}(x'-\mathfrak{x})}{\alpha^2-\gamma^2} - \frac{\mathfrak{y}(y'-\mathfrak{y})}{\beta^2-\gamma^2} - \left(\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha^2-\gamma^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2-\gamma^2} - 1\right) r'^2 < 0$$

characterisirt, da sie ausserhalb des Kreises liegen müssen, der das sphärische Spiegelbild des Kreises $B_0 = 0$ ist; denn der Punkt A liegt immer innerhalb des Kreises $B_0 = 0$.

Bonn, den 6. November 1861.

Ueber eine der Theilung der Zahlen ähnliche Untersuchung und deren Anwendung auf die Theorie der quadratischen Reste.

(Von Herrn *Stern* zu Göttingen.)

---

1) Die Theilung der Zahlen besteht, wie bekannt, in der Aufgabe, zu finden, auf wie viel Weisen sich eine gegebene Zahl aus gegebenen Elementen, die nach einer vorgeschriebenen Regel zusammengesetzt werden, bilden lässt. Eine ähnliche Aufgabe ist folgende: Es ist eine Anzahl Elemente gegeben, und es soll gefunden werden, wie viel aus denselben gebildete Zusammensetzungen einer gegebenen Zahl, nach einem gegebenen Modul, congruent sind. Im Folgenden sollen diese Zusammensetzungen *ausschliesslich* Combinationen ohne Wiederholung bedeuten, so dass die einzelnen Elemente jeder Combination durch *Addition* verbunden sind. Solche Combinationen werde ich daher, da keine anderen vorkommen, kurzweg Combinationen nennen. Es wird zugleich vorausgesetzt, dass der Modul eine *Primzahl* ist.

Sind unter den Combinationen, die sich aus den gegebenen Elementen bilden lassen, m Combinationen enthalten, welche einer Zahl n nach dem Modul p congruent sind, so werde ich dies so ausdrücken, dass ich sage: die Zahl n kommt m mal unter den Combinationen vor.

Während nun die Anzahl der Darstellungen einer Zahl aus gegebenen Elementen nur durch sehr verwickelte Formeln ausgedrückt werden kann, ist der Ausdruck, welcher angiebt, wie oft eine gegebene Zahl unter den Combinationen vorkommt, in den Fällen, die hier betrachtet werden sollen, ein ziemlich einfacher.

2) Eine einfache Aufgabe dieser Art erhält man, wenn die gegebenen Elemente $1, 2, 3, \ldots p-1$ sind, der Modul p. Ist z. B. $p=5$, also die gegebenen Elemente 1, 2, 3, 4, so sind die sämmtlichen Combinationen:

$$1\equiv 1,\ 2\equiv 2,\ 3\equiv 3,\ 4\equiv 4,\ 1+2\equiv 3,\ 1+3\equiv 4,\ 1+4\equiv 0,\ 2+3\equiv 0,$$
$$2+4\equiv 1,\ 3+4\equiv 2,\ 1+2+3\equiv 1,\ 1+2+4\equiv 2,\ 1+3+4\equiv 3,\ 2+3+4\equiv 4,$$
$$1+2+3+4\equiv 0.$$

Es sind demnach

die Combinationen	$1+4;\ 2+3;\ 1+2+3+4$	$\equiv 0,$
	$1;\ 2+4;\ 1+2+3$	$\equiv 1,$
	$2;\ 3+4;\ 1+2+4$	$\equiv 2,$
	$3;\ 1+2;\ 1+3+4$	$\equiv 3,$
	$4;\ 1+3;\ 2+3+4$	$\equiv 4,$

und man sieht hieraus, dass jede der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 gleich oft, nämlich dreimal, unter den Combinationen vorkommt.

Das allgemeine Gesetz ergiebt sich aus folgenden Betrachtungen. Setzt man

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{p-1}) = 1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_tx^t+\cdots,$$

so ist bekanntlich a_t die Zahl, welche angiebt, wie oft sich die Zahl t aus den Elementen 1, 2, ... $p-1$ zusammensetzen lässt. Setzt man aber $x^p=1$, so dass x eine der Wurzeln der Gleichung $x^p-1=0$ bedeutet, so ist mithin $x^t = x^{p+t} = x^{2p+t}$ u. s. w. Zieht man daher alle Glieder, welche Potenzen von x enthalten, deren Exponenten nach dem Modul p congruent sind, in ein einziges zusammen, so hat man

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{p-1}) = 1+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_tx^t+\cdots+A_px^p.$$

Hier bedeutet nun offenbar A_t die Zahl, welche angiebt, wie oft t unter den Combinationen aus den Elementen 1, 2, ... $p-1$ vorkommt, A_p bezeichnet, wie oft Null unter diesen Combinationen vorkommt. Setzt man $1+A_p = A_0$, so hat man demnach

$$(1.)\quad (1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{p-1}) = A_0+A_1x+\cdots+A_tx^t+\cdots+A_{p-1}x^{p-1};$$

es kommt also nur darauf an, die Grössen A_0, A_1 u. s. w. zu bestimmen.

Bezeichnet r eine Wurzel der Gleichung $x^p-1=0$ (die Einheit ausgenommen) und man setzt $\frac{2\pi}{p}=\omega$, so kann man $r=\cos\omega+\sin\omega\,.\,i$ setzen, und es sind dann die übrigen Wurzeln r^2, r^3, ... r^{p-1}. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{x^p-1}{x-1} = x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

folgt aber

$$(2.)\quad (x-r)(x-r^2)\ldots(x-r^{p-1}) = x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

und, wenn man $x=-1$ setzt,

$$(1+r)(1+r^2)\ldots(1+r^{p-1}) = 1,$$

also nach Gleichung (1.), wenn man $x = r$ setzt,

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \cdots + A_{p-1} r^{p-1} = 1$$

oder

$$A_p + A_1 r + A_2 r^2 + \cdots + A_{p-1} r^{p-1} = 0.$$

In Folge der bekannten Gleichung

$$(3.) \quad 1 + r + r^2 + \cdots + r^{p-1} = 0,$$

die man auch aus (2.) erhält, wenn man $x = r$ setzt, ergiebt sich hieraus:

$$A_p = A_1 = A_2 = \cdots = A_{p-1}.$$

Da die Gleichung (1.) auch für $x = 1$ ihre Geltung behält, so hat man auch

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_{p-1} = 2^{p-1},$$

oder

$$A_p + A_1 + \cdots + A_{p-1} = 2^{p-1} - 1,$$

also

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_p = \frac{2^{p-1} - 1}{p}.$$

Es ergiebt sich demnach hieraus, dass jede der Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ gleich oft und zwar $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ mal unter den Combinationen aus den Elementen 1, 2, ... $p-1$ vorkommt.

3) Um zu erfahren, wie oft, unter Beibehaltung der bisherigen Voraussetzungen, die Zahlen 1, 2, ... $p-1$ unter den Combinationen mit einer geraden oder mit einer ungeraden Elementenzahl, welche ich kurz *gerade* oder *ungerade* Combinationen nennen werde, vorkommen, gehe man von der Gleichung

$$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{p-1}) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_t x^t + \cdots$$

aus. Hier bezeichnet b_t den Unterschied der Zahlen, welche angeben, wie oft sich die Zahl t aus geraden Combinationen zusammensetzen lässt, und wie oft aus ungeraden. Setzt man aber wieder $x^p = 1$ und

$$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{p-1}) = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_t x^t + \cdots + B_p x^p,$$

so bezeichnet nun B_t den Unterschied der Zahlen, welche angeben, wie oft die Zahl t unter den geraden und unter den ungeraden Combinationen vorkommt, B_p bezeichnet den Unterschied der Zahlen, welche angeben, wie oft Null unter den geraden und unter den ungeraden Combinationen vorkommt. Setzt man $1 + B_p = B_0$, so hat man auch

$$(4.) \quad (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{p-1}) = B_0 + B_1 x + \cdots + B_{p-1} x^{p-1}.$$

Aus der Gleichung (2.) ergiebt sich, wenn man $x=1$ setzt,

$$(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{p-1}) = p,$$

mithin

$$B_0+B_1r+\cdots+B_{p-1}r^{p-1} = p.$$

Hieraus folgt

$$B_0-p = B_1 = B_2 = \ldots = B_{p-1},$$

also

$$(5.) \qquad B_0-B_1 = p.$$

Da die Gleichung (4.) aber auch für $x=1$ gilt, so hat man auch

$$B_0+B_1+\cdots+B_{p-1} = 0,$$

oder

$$(6.) \qquad B_0+(p-1)B_1 = 0.$$

Aus den Gleichungen (5.) und (6.) folgt daher

$$B_1 = B_2 = \cdots = B_{p-1} = -1; \quad B_p = p-2,$$

d. h. jede der Zahlen 1, 2, ... $p-1$ kommt unter den ungeraden Combinationen einmal mehr vor als unter den geraden, die Null dagegen kommt unter den geraden Combinationen $p-2$ mal mehr vor als unter den ungeraden. So zeigt sich bei dem oben berechneten Beispiele für $p=5$, dass die Zahlen 1, 2, 3, 4 zweimal unter den ungeraden Combinationen vorkommen und nur einmal unter den geraden, während Null dreimal unter den geraden und gar nicht unter den ungeraden Combinationen vorkommt. Verbindet man dies mit dem Ergebniss in 2), so hat man den Satz:

Jeder der Zahlen 1, 2, 3, ... $p-1$ sind $\frac{2^{p-1}-1}{2p}-\frac{1}{2}$ gerade Combinationen und $\frac{2^{p-1}-1}{2p}+\frac{1}{2}$ ungerade Combinationen congruent, der Null dagegen sind $\frac{2^{p-1}-1}{2p}+\frac{p-2}{2}$ gerade Combinationen und $\frac{2^{p-1}-1}{2p}-\frac{p-2}{2}$ ungerade Combinationen congruent.

4) Verwickelter ist die Untersuchung, wenn die Combinationen aus den Elementen 1, 2, ... $\frac{1}{2}(p-1)$ gebildet werden, während der Modul, wie früher, p ist. Hier muss man von der Gleichung

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{\frac{1}{2}(p-1)}) = 1+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

ausgehen. Setzt man wieder $x^p=1$ und unter dieser Voraussetzung

$$(7.) \quad (1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{\frac{1}{2}(p-1)}) = C_0+C_1x+\cdots+C_tx^t+\cdots+C_{p-1}x^{p-1},$$

so bezeichnet nun C_t wie oft die Zahl t unter den Combinationen aus den Elementen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ vorkommt, und wenn man $C_0 = 1 + C_p$ setzt, so bedeutet C_p, wie oft Null unter diesen Combinationen vorkommt. Behalten r und ω ihre frühere Bedeutung aus 2), so hat man mithin

$$(8.) \quad (1+r)(1+r^2)\ldots(1+r^{\frac{1}{2}(p-1)}) = C_0 + C_1 r + \cdots + C_t r^t + \cdots + C_{p-1} r^{p-1}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 1+r &= 1+\cos\omega+\sin\omega\,.\,i = 2\cos\tfrac{1}{2}\omega\,(\cos\tfrac{1}{2}\omega+\sin\tfrac{1}{2}\omega\,.\,i), \\ 1+r^2 &= 2\cos\omega\,(\cos\omega+\sin\omega\,.\,i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1+r^{\frac{1}{2}(p-1)} &= 2\cos\Big(\frac{p-1}{2}\,\frac{\omega}{2}\Big)\Big[\cos\Big(\frac{p-1}{2}\,\frac{\omega}{2}\Big)+\sin\Big(\frac{p-1}{2}\,\frac{\omega}{2}\Big)i\Big]. \end{aligned}$$

Setzt man

$$k = \frac{1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)}{2},$$

so hat man mithin:

$$(1+r)(1+r^2)\ldots(1+r^{\frac{1}{2}(p-1)}) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)}\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\omega\ldots\cos\Big(\frac{p-1}{2}\,\frac{\omega}{2}\Big)[\cos k\omega+\sin k\omega\,.\,i].$$

Ist $1+2\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$ eine *gerade* Zahl, also k eine *ganze* Zahl, so ist $\cos k\omega+\sin k\omega\,.\,i$ die Wurzel r^k der Gleichung $x^p-1=0$. Ist aber $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$ *ungerade*, so ist $k+\frac{1}{2}p$ eine ganze Zahl, mithin $\cos k\omega+\sin k\omega\,.\,i = -r^{k+\frac{1}{2}p}$ und $r^{k+\frac{1}{2}p}$ wieder eine Wurzel der Gleichung $x^p-1=0$. Nun ist $1+2+\cdots+\frac{p-1}{2} = \frac{p^2-1}{8}$ gerade oder ungerade, je nachdem $p = 8n \pm 1$ oder $p = 8n \pm 3$. Bezeichnet daher h den kleinsten positiven Rest der Zahl k im ersten Falle oder der Zahl $k+\frac{1}{2}p$ im zweiten, nach dem Modul p, so dass jedenfalls

$$1+2+\cdots+\tfrac{1}{2}(p-1) \equiv 2h,$$

so ist r^h ein Werth aus der Reihe $r, r^2 \ldots r^{p-1}$, und man hat jedenfalls

$$\cos k\omega+\sin k\omega\,.\,i = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} r^h,$$

also auch

$$(1+r)(1+r^2)\ldots(1+r^{\frac{1}{2}(p-1)}) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)}\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\omega\ldots\cos\Big(\frac{p-1}{2}\,\frac{\omega}{2}\Big)(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} r^h.$$

Nun ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\omega\ldots\cos\Big(\frac{p-1}{2}\,\frac{\omega}{2}\Big) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(p-1)}},$$

also

$$(9.) \quad (1+r)(1+r^2)\ldots(1+r^{\frac{1}{2}(p-1)}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} r^h$$

und nach (7.)

$$C_0+C_1r+C_2r^2+\cdots+C_hr^h+\cdots+C_{p-1}r^{p-1} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}r^h,$$

es muss daher

$$C_0=C_1=C_2=\cdots=C_h-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=\cdots=C_{p-1}$$

sein. Da die Gleichung (7.) aber auch für $x=1$ statt hat, so ist auch

$$C_0+C_1+\cdots+C_{p-1} = 2^{\frac{1}{2}(p-1)},$$

mithin

$$(p-1)C_1+C_h = 2^{\frac{1}{2}(p-1)},$$

$$C_h-C_1 = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

also

$$C_1 = \frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p},$$

und überhaupt, wenn t einen anderen Werth als h und p bezeichnet,

$$(10.)\qquad C_t = \frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p},$$

$$(11.)\qquad C_h = \frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p}+(-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$(12.)\qquad C_p = C_0-1 = \frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p}-1,$$

wodurch für jede der Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ bestimmt ist, wie oft sie unter den Combinationen aus den Elementen 1, 2 ... $\frac{1}{2}(p-1)$ vorkommt*).

5) Setzt man in der Gleichung

$$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{\frac{1}{2}(p-1)}) = 1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots$$

wieder $x^p=1$, und alsdann

$$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{\frac{1}{2}(p-1)}) = 1+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots+\beta_tx^t+\cdots+\beta_px^p,$$

so bedeutet β_t die Differenz der Zahlen, welche angeben, wie oft die Zahl t unter den geraden und unter den ungeraden Combinationen aus den Elementen

---

*) Beiläufig ergiebt sich aus diesen Formeln der Charakter der Zahl 2 als quadratischer Rest. Denn da C_t eine ganze Zahl ist, muss $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ sein.

1, 2, ... $\frac{1}{2}(p-1)$ enthalten ist. Ist $\beta_0 = 1+\beta_p$, so ist demnach

$$(13.)\quad (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{\frac{1}{2}(p-1)}) = \beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\dots+\beta_{p-1}x^{p-1}$$

und ebenso

$$(1-x^{-1})(1-x^{-2})\dots(1-x^{-\frac{1}{2}(p-1)}) = \beta_0+\beta_1 x^{-1}+\beta_2 x^{-2}+\dots+\beta_{p-1}x^{-(p-1)}.$$

Mithin

$$(1-r)(1-r^2)\dots(1-r^{\frac{1}{2}(p-1)}) = \beta_0+\beta_1 r +\dots+\beta_{p-1}r^{p-1},$$
$$(1-r^{-1})(1-r^{-2})\dots(1-r^{-\frac{1}{2}(p-1)}) = \beta_0+\beta_1 r^{-1}+\dots+\beta_{p-1}r^{-(p-1)},$$

oder, da $r^{-1}=r^{p-1}$, $r^{-2}=r^{p-2}$, ... $r^{-\frac{1}{2}(p-1)}=r^{\frac{1}{2}(p+1)}$,

$$(1-r^{\frac{1}{2}(p+1)})(1-r^{\frac{1}{2}(p+3)})\dots(1-r^{p-1}) = \beta_0+\beta_1 r^{-1}+\dots+\beta_{p-1}r^{-(p-1)},$$

also, mit Rücksicht auf $(1-r)(1-r^2)\dots(1-r^{p-1})=p$ aus 3),

$$(\beta_0+\beta_1 r+\dots+\beta_{p-1}r^{p-1})(\beta_0+\beta_1 r^{-1}+\dots+\beta_{p-1}r^{-(p-1)}) = p$$

oder, wenn man entwickelt,

$$\beta_0^2+\beta_1^2+\dots+\beta_{p-1}^2+(\beta_0\beta_1+\beta_1\beta_2+\dots+\beta_{p-1}\beta_0)r+(\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_3+\dots+\beta_{p-1}\beta_1)r^2+\dots$$
$$+(\beta_0\beta_{p-1}+\beta_1\beta_0+\dots+\beta_{p-1}\beta_{p-2})r^{p-1} = p.$$

Damit diese Gleichung bestehen kann, müssen alle darin vorkommenden Potenzen von r denselben Coefficienten haben. Nennt man diesen g, so hat man

$$\beta_0^2+\beta_1^2+\dots+\beta_{p-1}^2+g(r+r^2+\dots+r^{p-1}) = p,$$

oder in Folge der Gleichung (3.)

$$(14.)\quad \beta_0^2+\beta_1^2+\dots+\beta_{p-1}^2 = p+g.$$

Ausserdem hat man das System von $p-1$ Gleichungen:

$$(15.)\quad \begin{cases} \beta_0\beta_1+\beta_1\beta_2+\dots+\beta_{p-1}\beta_0 = g, \\ \beta_0\beta_2+\beta_1\beta_3+\dots+\beta_{p-1}\beta_1 = g, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_0\beta_{p-1}+\beta_1\beta_0+\dots+\beta_{p-1}\beta_{p-2} = g. \end{cases}$$

Addirt man diese $p-1$ Gleichungen und bemerkt, dass

$$\beta_0(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{p-1}) = \beta_0(\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1})-\beta_0^2,$$
$$\beta_1(\beta_2+\beta_3+\dots+\beta_0) = \beta_1(\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1})-\beta_1^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\beta_{p-1}(\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-2}) = \beta_{p-1}(\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1})-\beta_{p-1}^2,$$

so folgt:

$$(16.)\quad (\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1})^2-(\beta_0^2+\beta_1^2+\dots+\beta_{p-1}^2) = (p-1)g.$$

Nun gilt die Gleichung (13.) auch wenn man $x=1$ setzt, dann verschwindet aber der erste Theil und man hat

$$(17.) \qquad \beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_{p-1} = 0.$$

Aus (16.) folgt demnach

$$\beta_0^2+\beta_1^2+\cdots+\beta_{p-1}^2 = -(p-1)g.$$

Verbindet man diese Gleichung mit (14.), so ergiebt sich

$$p+g = -(p-1)g,$$

oder

$$g = -1.$$

Demnach geht (14.) in

$$(18.) \qquad \beta_0^2+\beta_1^2+\cdots+\beta_{p-1}^2 = p-1$$

über, und das System (15.) in die $p-1$ Gleichungen

$$(19.) \quad \begin{cases} \beta_0\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \cdots + \beta_{p-1}\beta_0 = -1, \\ \beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \cdots + \beta_{p-1}\beta_1 = -1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_0\beta_{p-2} + \beta_1\beta_{p-1} + \cdots + \beta_{p-1}\beta_{p-3} = -1, \\ \beta_0\beta_{p-1} + \beta_1\beta_0 + \cdots + \beta_{p-1}\beta_{p-2} = -1. \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass diese $p-1$ Gleichungen paarweise identisch sind, nämlich die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte, u. s. w.

6) Aus der Gleichung (18.) folgt, dass nicht alle p Grössen β_0^2, $\beta_1^2 \ldots \beta_{p-1}^2$ zugleich $\gtreqless 1$ sein können. Es muss vielmehr entweder *nur* eine derselben Null sein, und dann sind alle übrigen der Einheit gleich, oder es müssen mehrere Null sein, während zugleich mehrere grösser als die Einheit sind. Es soll nun aber gezeigt werden, dass immer das Erstere der Fall ist, und zwar ist immer β_h *und nur dieses* $= 0$, wo h dieselbe Bedeutung wie oben in 4) hat.

Wird nämlich $\beta_t = 0$ gesetzt, so bedeutet dies, dass die Zahl t unter den geraden Combinationen ebenso oft vorkommt, als unter den ungeraden; es muss daher das entsprechende C_t in 4) eine *gerade* Zahl sein. Sobald aber t nicht $= h$ oder $= p$ ist, muss C_t nach (10.) eine *ungerade* Zahl sein, mithin kann das entsprechende β_t nicht Null sein. Ferner bedeutet β_0 die um die Einheit vermehrte Differenz der Zahlen, welche angeben, wie oft Null unter den geraden und unter den ungeraden Combinationen enthalten ist. Wäre $\beta_0 = 0$, so müsste diese Differenz $= -1$ sein, d. h. es müsste Null

unter den ungeraden Combinationen einmal mehr vorkommen als unter den geraden, also müsste C_p eine ungerade Zahl sein, während sie nach (12.) eine gerade ist. Es folgt hieraus, dass von den Zahlen $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{p-1}$ nur die Zahl β_h Null sein *kann* und daher auch sein *muss*. Die Zahl h kommt demnach unter den geraden Combinationen ebenso oft vor als unter den ungeraden und zwar nach (11.)

$$\frac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p} + \frac{(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2}$$

mal.

Mit Ausnahme von β_h^2 sind demnach sämmtliche Grössen $\beta_0^2, \beta_1^2, \ldots$ der Einheit gleich, und es ist nun noch zu untersuchen, ob die Grössen $\beta_0, \beta_1, \ldots$ der positiven oder der negativen Einheit gleich sind. Aus der Gleichung (17.) ergiebt sich, dass immer die Hälfte derselben der positiven und die andere Hälfte der negativen Einheit gleich sein muss. Mit Ausnahme der Zahl h kommt also von den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ jede entweder einmal mehr unter den geraden als unter den ungeraden, oder einmal mehr unter den ungeraden als unter den geraden Combinationen vor. Es ist nur noch zu untersuchen, wie sich die Zahlen unter diese zwei Klassen vertheilen.

7) In der Reihe

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \ldots\ 1+2+\cdots+p-1$$

haben die ersten Glieder, bis zum Mittelgliede $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$ einschliesslich, verschiedene kleinste positive Reste nach dem Modul p. Denn hätte man $1+2+\cdots+k \equiv \alpha$ und zugleich $1+2+\cdots+k+\cdots+k+l \equiv \alpha$, während $k < \frac{1}{2}(p-1)$ und $k+l \lesseqgtr \frac{1}{2}(p-1)$ ist, so wäre

$$(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+l) = l\left(k+\frac{l+1}{2}\right) = \frac{l}{2}(2k+l+1) \equiv 0,$$

welche Congruenz nicht bestehen kann, wenn $2k+l$, wie vorausgesetzt wird, $< p-1$ ist. Die Glieder, welche auf das Mittelglied folgen, (abgesehen von dem letzten) geben dieselben Reste, wie die vorhergehenden, nur in umgekehrter Ordnung. Denn es ist, wenn $k < \frac{1}{2}(p-1)$,

$$1+2+\cdots+k \equiv 1+2+\cdots+k+k+1+\cdots+p-k-1,$$

da $k+1+p-k-1 \equiv 0$, $k+2+p-k-2 \equiv 0$, u. s. w. Das Mittelglied ist also keinem anderen congruent. Endlich ist das letzte Glied

$$1+2+\cdots+p-1 = \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0.$$

Bezeichnet man durch $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{1}{2}(p-1)}$ die kleinsten positiven Reste der Zahlen $1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \ldots\ 1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass man statt der Reihe

$$(H.) \qquad 1+r^{-1}+r^{-(1+2)}+r^{-(1+2+3)}+\cdots+r^{-(1+2+\ldots+p-1)}$$

auch schreiben kann

$$(J.) \qquad 2+2r^{-a_1}+2r^{-a_2}+\cdots+2r^{-a_{\frac{1}{2}(p-3)}}+r^{-a_{\frac{1}{2}(p-1)}}.$$

Bezeichnet man nun aber diejenigen unter den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$, welche nicht einer der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{1}{2}(p-1)}$ gleich sind, durch $b_1, b_2, \ldots b_{\frac{1}{2}(p-1)}$, so ist

$$r^{-1}+r^{-2}+\cdots+r^{-(p-1)}=-1=r^{-a_1}+r^{-a_2}+\cdots+r^{-a_{\frac{1}{2}(p-1)}}+r^{-b_1}+r^{-b_2}+\cdots+r^{-b_{\frac{1}{2}(p-1)}}$$

oder

$$1+r^{-a_1}+r^{-a_2}+\cdots+r^{-a_{\frac{1}{2}(p-1)}} = -r^{-b_1}-r^{-b_2}-\cdots-r^{-b_{\frac{1}{2}(p-1)}}.$$

Man kann daher statt der Reihe $(J.)$ auch schreiben:

$$1+r^{-a_1}+r^{-a_2}+\cdots+r^{-a_{\frac{1}{2}(p-3)}}-r^{-b_1}-r^{-b_2}-\cdots-r^{-b_{\frac{1}{2}(p-1)}}.$$

Hier fehlt das Glied mit dem Exponenten $-a_{\frac{1}{2}(p-1)}$, die übrigen Glieder sind positiv oder negativ, je nachdem ihre Exponenten aus der Reihe $-a_1$ u. s. w. oder aus der Reihe $-b_1$ u. s. w. genommen sind.

Nun hat nach *Gauss* *) die Reihe $(H.)$ auch den Werth

$$(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots(1-r^{p-2}),$$

also ist

$$(1-r)(1-r^3)\ldots(1-r^{p-2})=1+r^{-a_1}+r^{-a_2}+\cdots+r^{-a_{\frac{1}{2}(p-3)}}-r^{-b_1}-r^{-b_2}-\cdots-r^{-b_{\frac{1}{2}(p-1)}},$$

so dass in dieser Entwickelung die Hälfte der Glieder positiv, die andere Hälfte negativ ist. Man setze aber in diesem Ausdruck r^{-1} statt r und schreibe die Factoren in umgekehrter Ordnung, so erhält man

$$(1-r^{-(p-2)})(1-r^{-(p-4)})\ldots(1-r^{-3})(1-r^{-1})$$
$$=1+r^{a_1}+r^{a_2}+\cdots+r^{a_{\frac{1}{2}(p-3)}}-r^{b_1}-r^{b_2}-\cdots-r^{b_{\frac{1}{2}(p-1)}}$$

oder, was dasselbe ist,

$$(20.) \quad (1-r^2)(1-r^4)\ldots(1-r^{p-1})=1+r^{a_1}+r^{a_2}+\cdots+r^{a_{\frac{1}{2}(p-3)}}-r^{b_1}-r^{b_2}-\cdots-r^{b_{\frac{1}{2}(p-1)}}.$$

Aus der Gleichung in 5):

$$(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{\frac{1}{2}(p-1)}) = \beta_0+\beta_1 r+\beta_2 r^2+\cdots+\beta_{p-1}r^{p-1}$$

---

*) Summatio quarundam serierum sing. in Comm. soc. Gott. T. 1.

ergiebt sich aber, wenn man r^2 statt r setzt,

$$(21.) \quad (1-r^2)(1-r^4)\ldots(1-r^{p-1}) = \beta_0+\beta_1 r^2+\beta_2 r^4+\cdots+\beta_{p-1} r^{2(p-1)}.$$

In dieser letzteren Reihe fehlt das Glied mit dem Exponenten $2h$, da in der vorhergehenden, aus welcher sie abgeleitet ist, das Glied mit dem Exponenten h fehlt. Nun ist $2h = a_{\frac{1}{2}(p-1)}$, also fehlt in (20.) wie in (21.) das Glied mit dem Exponenten $a_{\frac{1}{2}(p-1)}$.

8) Wenn aber zwei Ausdrücke

$$L+L_1 r+\cdots+L_{p-1} r^{p-1} \quad \text{und} \quad M+M_1 r+\cdots+M_{p-1} r^{p-1}$$

denselben Werth haben, und es sind L, L_1, ... L_{p-1} so wie M, M_1, ... M_{p-1} reelle Zahlen (oder Null), und zugleich der Coefficient einer Potenz r^k in beiden Ausdrücken derselbe, so müssen auch alle übrigen Coefficienten, die zu derselben Potenz gehören, dieselben sein. Denn da

$$L-M+(L_1-M_1)r+(L_2-M_2)r^2+\cdots+(L_{p-1}-M_{p-1})r^{p-1} = 0,$$

so muss $L-M = L_1-M_1 = \cdots = L_k-M_k = \cdots = L_{p-1}-M_{p-1}$ sein. Ist also, wie vorausgesetzt wird, $L_k = M_k$, so muss auch $L = M$, $L_1 = M_1$, u. s. w. sein. Da nun die beiden Reihen in (20.) und (21.) denselben Werth haben, und die Coefficienten der Potenz mit dem Exponenten $a_{\frac{1}{2}(p-1)}$ in beiden Entwickelungen dieselben, nämlich $=0$, sind, so müssen auch die übrigen Coefficienten, die zu derselben Potenz gehören, dieselben sein. Man hat also zunächst

$$\beta_0 = 1.$$

Bedenkt man nun, dass $\beta_0 = 1+\beta_p$ und also $\beta_p = 0$, so folgt hieraus nach 5) der Satz:

Unter den Combinationen aus 1, 2, ... $\frac{1}{2}(p-1)$ giebt es ebenso viel gerade als ungerade, die $\equiv 0$ sind, und zwar nach (12.) von jeder Gattung

$$\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2}.$$

Was die übrigen Coefficienten β_1, β_2, ... betrifft (insofern sie nicht etwa $=\beta_h$ sind), so wird allgemein β_m der positiven oder negativen Einheit gleich sein, je nachdem $2m$ einer der Zahlen a_1, a_2, ... $a_{\frac{1}{2}(p-3)}$ congruent ist oder nicht. Bezeichnet man daher durch l irgend eine der Zahlen 1, 2, ... $p-1$ (h ausgenommen), durch G wie oft sie unter den geraden, durch U wie oft sie unter den ungeraden Combinationen vorkommt, so hat man

$$G-U = \pm 1,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $2l$ einer der

Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ congruent ist oder nicht. Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung (10.)

$$G+U=C_t=\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p},$$

so findet man im ersten Falle

$$G=\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{1}{2};\qquad U=\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2},$$

und im zweiten

$$G=\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2};\qquad U=\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{1}{2}.$$

Durch die Erörterungen in 6) und 8) ist also nun vollständig bestimmt, wie oft jede der Zahlen 0, 1, 2, ... $p-1$ unter den geraden und unter den ungeraden Combinationen vorkommt.

9) Sobald der Modul p gegeben ist, kann man nach dem Vorhergehenden entscheiden, ob irgend einer der Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \ldots$ positiv oder negativ ist. Die vorhergehenden Betrachtungen führen aber auch zu einigen allgemeineren Bestimmungen.

Da

$$(1-r^{-1})(1-r^{-2})\ldots(1-r^{-\frac{1}{2}(p-1)})=(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}(r^{-1}-1)(r^{-2}-1)\ldots(r^{-\frac{1}{2}(p-1)}-1)$$
$$=(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}\frac{(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{\frac{1}{2}(p-1)})}{r^{1+2+\ldots+\frac{1}{2}(p-1)}}$$

und $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)\equiv 2h$, so ist

$$(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{\frac{1}{2}(p-1)})=r^{2h}(1-r^{-1})(1-r^{-2})\ldots(1-r^{-\frac{1}{2}(p-1)}),$$

d. h.

$$(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}(\beta_0+\beta_1 r+\cdots+\beta_{p-1}r^{p-1})=r^{2h}(\beta_0+\beta_1 r^{-1}+\beta_2 r^{-2}+\cdots+\beta_{p-1}r^{-(p-1)}),$$

mithin

$$(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}\beta_k=\beta_{2h-k}.$$

Ist namentlich $k=0$, so hat man, da $\beta_0=1$,

$$(22.)\qquad \beta_{2h}=(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)},$$

d. h. β_{2h} ist der positiven oder negativen Einheit gleich, je nachdem $p=4n+1$ oder $p=4n-1$; im ersten Falle enthalten also die geraden Combinationen und im zweiten die ungeraden eine Combination mehr, die $\equiv 2h$ ist. Nun gehört aber die Combination $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$, die ja selbst $\equiv 2h$ ist, zu den geraden oder ungeraden Combinationen, je nachdem $p=4n+1$ oder $=4n-1$ ist. Man kann daher auch sagen:

Von den geraden und ungeraden Combinationen, die $\equiv 2h$ sind, wird diejenige Gattung, zu der $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$ gehört, immer eine Combination mehr enthalten.

Einen anderen Zusammenhang unter den Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ findet man, wenn man von der Formel

$$(23.) \qquad \frac{(1-r^2)(1-r^4)\ldots(1-r^{p-1})}{(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{\frac{1}{2}(p-1)})} = (1+r)(1+r^2)\ldots(1+r^{\frac{1}{2}(p-1)})$$

ausgeht. Nach Gleichung (8.) folgt hieraus

$$(24.) \qquad \frac{\beta_0+\beta_1 r^2+\cdots+\beta_{p-1}r^{2p-2}}{\beta_0+\beta_1 r+\cdots+\beta_{p-1}r^{p-1}} = C_0+C_1 r+\cdots+C_{p-1}r^{p-1}.$$

Mithin

$$\beta_0 C_0+\beta_1 C_{p-1}+\beta_2 C_{p-2}+\cdots+\beta_{p-1}C_1 = \beta_0$$

oder, da nach 4) $C_h-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = C_1 = C_2$ u. s. w.,

$$(\beta_0+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{p-1})C_1+(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_{1-h} = \beta_0,$$

also, wegen (17.), $\beta_0 = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_{p-h}$, d. h.

$$(25.) \qquad \beta_{p-h} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Dies giebt den Satz:

Die Zahl $p-h$ kommt einmal mehr unter den geraden oder unter den ungeraden Combinationen vor, je nachdem $p = 8n \pm 1$ oder $= 8n \pm 3$ ist.

Aus (24.) findet man ferner

$$\beta_{\frac{1}{2}(p+1)} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_{p-h+1},$$

$$\beta_1 = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_{p-h+2},$$

$$\beta_{\frac{1}{2}(p+3)} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_{p-h+3},$$

u. s. w.

10) Berücksichtigt man die Gleichung (9.), so kann man die Gleichung (23.) auch in anderer Weise benutzen. Es folgt nämlich daraus

$$\frac{\beta_0+\beta_1 r^2+\beta_2 r^4+\cdots+\beta_{p-1}r^{2(p-1)}}{\beta_0+\beta_1 r+\beta_2 r^2+\cdots+\beta_{p-1}r^{p-1}} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}r^h,$$

oder, wie man auch schreiben kann,

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}[\beta_0 r^h+\beta_1 r^{h+1}+\cdots+\beta_{p-1}r^{h+p-1}]$$
$$=\beta_0+\beta_1 r^2+\cdots+\beta_{\frac{1}{2}(p-1)}r^{p-1}+\beta_{\frac{1}{2}(p+1)}r^1+\beta_{\frac{1}{2}(p+3)}r^3+\cdots+\beta_{p-1}r^{p-2}$$
$$=\beta_0+\beta_{\frac{1}{2}(p+1)}r+\beta_1 r^2+\beta_{\frac{1}{2}(p+3)}r^3+\cdots+\beta_{p-1}r^{p-2}+\beta_{\frac{1}{2}(p-1)}r^{p-1}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung gehört also zu jeder Potenz mit geradem Exponenten $2s$ der Coefficient β_s und zu jeder Potenz mit ungeradem Exponenten $2s+1$ der Coefficient $\beta_{\frac{1}{2}(p+2s+1)}$. Es sind demnach zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem h gerade oder ungerade ist.

Im ersten Falle hat man

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_0 = \beta_{\frac{1}{2}h},$$
$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_1 = \beta_{\frac{1}{2}(p+h+1)},$$
$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_2 = \beta_{\frac{1}{2}(h+2)},$$
$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_3 = \beta_{\frac{1}{2}(p+h+3)},$$

u. s. w.

im zweiten dagegen

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_0 = \beta_{\frac{1}{2}(p+h)},$$
$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_1 = \beta_{\frac{1}{2}(h+1)},$$
$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_2 = \beta_{\frac{1}{2}(p+h+2)},$$
$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\beta_3 = \beta_{\frac{1}{2}(h+3)},$$

u. s. w.

Man hat also namentlich, je nachdem h gerade oder ungerade ist,

$$(26.)\qquad \beta_{\frac{1}{2}h}=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \quad \text{oder} \quad \beta_{\frac{1}{2}(p+h)}=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

und nach (25.)

$$\beta_{p-h}=\beta_{\frac{1}{2}h} \quad \text{oder} \quad \beta_{p-h}=\beta_{\frac{1}{2}(p+h)}.$$

11) Es wird nicht unangemessen sein, die vorhergehenden Betrachtungen an einem bestimmten Beispiele zu erläutern.

Sei $p=13$, so vertheilen sich die sämmtlichen Combinationen (bei welchen ich, der Kürze halber, die + Zeichen zwischen den einzelnen Ele-

menten einer Combination weglasse), aus 1, 2, 3, 4, 5, 6, in folgender Weise unter die Zahlen 0, 1, 2, ... 12. Es sind

die Combinationen	
256; 346; 1246; 1345	$\equiv$ 0.
1; 356; 1256; 1346; 2345	$\equiv$ 1.
2; 456; 1356; 2346; 12345	$\equiv$ 2.
3; 12; 1456; 2356; 12346	$\equiv$ 3.
4; 13; 2456; 12356;	$\equiv$ 4.
5; 14; 23; 3456; 12456	$\equiv$ 5.
6; 15; 24; 123; 13456	$\equiv$ 6.
16; 25; 34; 124; 23456	$\equiv$ 7.
26; 35; 125; 134; 123456	$\equiv$ 8.
36; 45; 126; 135; 234	$\equiv$ 9.
46; 136; 145; 235; 1234	$\equiv$ 10.
56; 146; 236; 245; 1235	$\equiv$ 11.
156; 246; 345; 1236; 1245	$\equiv$ 12.

Hier ist

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{2} = \frac{21}{2} \equiv \frac{21+13}{2} \overset{\cdot}{\equiv} 4,$$

also $h = 4$. Die Null kommt viermal unter den Combinationen vor, die Zahl 4 ebenfalls, alle übrigen Zahlen kommen fünfmal vor. Dies stimmt mit den Formeln in 4) überein. Ferner kommen bei Null und 4 gleichviel Combinationen in den geraden und ungeraden Klassen vor, und zwar in jeder 2, übereinstimmend mit den Formeln $\beta_p = 0$, $\beta_h = 0$ in 6) und 8). Aus der obigen Tabelle ergiebt sich weiter, dass hier

$$\beta_1 = 1; \quad \beta_2 = -1; \quad \beta_3 = 1; \quad \beta_5 = 1; \quad \beta_6 = -1; \quad \beta_7 = 1; \quad \beta_8 = 1;$$
$$\beta_9 = -1; \quad \beta_{10} = -1; \quad \beta_{11} = -1; \quad \beta_{12} = -1.$$

Nun ist

$2.1 \equiv 1+2+3+4+5$; $2.3 \equiv 1+2+3$; $2.5 \equiv 1+2+3+4$; $2.7 \equiv 1$; $2.8 \equiv 1+2$,

daher müssen in der That, übereinstimmend mit 8), $\beta_1, \beta_3, \beta_5, \beta_7, \beta_8$ positiv, die übrigen negativ sein. Auch ist hier $\beta_{2h} = \beta_8 = 1$ und $\beta_{p-h} = \beta_9 = -1$, ebenso $\beta_{\frac{1}{2}h} = \beta_2 = -1$ übereinstimmend mit den Formeln (22.), (25.) und (26.).

12) An die obigen Betrachtungen schliesst sich auch noch folgender Satz an. Wenn man in dem Ausdrucke

$$(1-r^x)(1-r^{2x})(1-r^{3x}) \ldots (1-r^{\frac{1}{2}(p-1)x})$$

statt x die Werthe $1, 2, \ldots p-1$ setzt, und die Summe aller dieser Producte nimmt, so hat diese den Werth p. Denn da $\beta_0 = 1$, so hat man

$$\begin{aligned}
(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{\frac{p-1}{2}}) &= 1+\beta_1 r \quad +\cdots+\beta_{p-1} r^{p-1},\\
(1-r^2)(1-r^4)\ldots(1-r^{p-1}) &= 1+\beta_1 r^2 \quad +\cdots+\beta_{p-1} r^{2(p-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(1-r^{p-1})(1-r^{2(p-1)})\ldots(1-r^{\frac{p-1}{2}(p-1)}) &= 1+\beta_1 r^{p-1}+\cdots+\beta_{p-1} r^{(p-1)(p-1)}.
\end{aligned}$$

Addirt man nun auf der rechten Seite die vertical unter einander stehenden Glieder und berücksichtigt, dass

$$r+r^2+\cdots+r^{p-1} = r^2+r^4+\cdots+r^{2(p-1)} = \cdots = r^{p-1}+r^{2(p-1)}+\cdots+r^{(p-1)(p-1)} = -1,$$

so findet sich als Werth sämmtlicher Verticalreihen $p-1-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{p-1}) = p$ nach (17.). Man hat mithin, da nach 3) $(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{p-1}) = p$, die eigenthümliche Formel

$$\sum_{x=1}^{x=p-1}(1-r^x)(1-r^{2x})\ldots(1-r^{\frac{1}{2}(p-1)x}) = (1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{p-1}).$$

Es ergiebt sich aus dem Vorhergehenden nun auch leicht die Beantwortung der Frage, wie oft die Zahlen $0, 1, 2, \ldots p-1$ unter den Combinationen aus den Elementen $1, 3, 5, \ldots p-2$ vorkommen und wie sie sich unter den geraden und ungeraden Klassen vertheilen. Wollte man, dem Früheren entsprechend, direct verfahren, so müsste man von dem Producte

$$(1+r)(1+r^3)\ldots(1+r^{p-2})$$

ausgehen. Man kann aber die Untersuchung sofort auf die obige zurückführen, wenn man bemerkt, dass in den zwei Reihen

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 2, & \ldots & \frac{1}{2}(p-3), & \frac{1}{2}(p-1),\\
p-2, & p-4, & \ldots & 3, & 1,
\end{array}$$

die unter einander stehenden Glieder die Beziehung haben, dass zu jedem Gliede k der oberen Reihe, das Glied $p-2k$ in der unteren gehört. Jeder Combination der Elemente der ersten Reihe, welche $\equiv k$ ist, wird also eine Combination aus Gliedern der zweiten Reihe entsprechen, die $\equiv p-2k$ ist. Bezeichnet also D_t wie oft die Zahl t, D_p wie oft Null unter den Combinationen aus $1, 3, \ldots p-2$ vorkommt, so hat man, sobald t nicht $p-2h$ oder p ist, nach Formel (10.)

$$D_t = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p},$$

ferner nach (11.) und (12.)

$$D_{p-2h} = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p} + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$D_p = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p} - 1.$$

Ferner kommen unter den geraden und ungeraden Combinationen aus 1, 3, ... $p-2$ gleichviel vor, die der Null congruent sind, und ebenso gleichviel, die $\equiv p-2h$ sind, während bei den übrigen Zahlen immer unter den geraden oder ungeraden Combinationen eine mehr vorkommt*). Die genauere Entwickelung ergiebt sich unmittelbar aus 9); ich will dabei nicht länger verweilen, sondern nun zu einer Anwendung des Vorhergehenden auf die Theorie der quadratischen Reste übergehen.

13) Multiplicirt man die einzelnen Glieder der Reihe

$$(A.) \quad 1+2+3+\cdots+\tfrac{1}{2}(p-1)$$

mit einer ganzen Zahl k, so dass man die Reihe

$$k+2k+3k+\cdots+\tfrac{1}{2}(p-1)k$$

erhält, so wird man aus der letzteren Reihe, indem man die Vielfachen von p vernachlässigt, eine Reihe

$$(B.) \quad g_1+g_2+\cdots+g_{\frac{1}{2}(p-1)}$$

erhalten, in welcher eine *gerade* oder eine *ungerade* Anzahl Glieder vorkommt, die grösser als $\frac{1}{2}(p-1)$ ist, je nachdem k ein quadratischer Rest oder Nichtrest ist.

Bezeichnet man nämlich die Anzahl der Glieder, die grösser als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind, in der Reihe $(B.)$ durch m, so ist, wie schon *Gauss* bewiesen hat**),

$$g_1 g_2 \cdots g_{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv k^{\frac{1}{2}(p-1)} 1.2 \ldots \tfrac{1}{2}(p-1) \equiv (-1)^m 1.2 \ldots \tfrac{1}{2}(p-1),$$

also

$$k^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv (-1)^m.$$

---

*) Da die *geraden* Combinationen (aus 1, 3, 5, ... $p-2$) *gerade* Zahlen, die *ungeraden* Combinationen *ungerade* Zahlen geben, so lässt sich der Satz, dass Null gleich oft unter den geraden und unter den ungeraden Combinationen enthalten ist, auch so ausdrücken:

Die Summe der Zahlen, welche angeben, wie oft sich p, $3p$, $5p$, ... aus den Zahlen 1, 3, 5, ... $p-2$ zusammensetzen lassen, ist ebenso gross als die Summe der Zahlen, welche angeben, wie oft sich $2p$, $4p$, $6p$, ... aus diesen Zahlen zusammensetzen lassen.

**) Theorem. arithm. demonstr. nova in Comm. soc. Gotting. Vol. XVI.

Nun ist $k^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1$ oder $\equiv -1$, je nachdem k quadratischer Rest oder Nichtrest, also m im ersten Falle gerade, im zweiten ungerade.

Nimmt man in der Reihe $(B.)$ statt der Zahlen, die grösser als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind, die ihnen nach dem Modul p congruenten negativen, welche kleiner als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind, so erhält man eine neue Reihe, in welcher die Glieder, abgesehen vom Zeichen, wieder die Werthe $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ (wenn auch in anderer Ordnung) haben. Ordnet man in derselben die Zahlen nach ihrer wachsenden absoluten Grösse, so soll der so entstehende Ausdruck *die dem Multiplicator k zugehörende reducirte Reihe* heissen. Ist also z. B. $p=7$ und man multiplicirt $1+2+3$ mit 2, so erhält man $2+4+6$, statt dessen nimmt man $2-3-1$, und die dem Multiplicator 2 zugehörende reducirte Reihe ist also hier $-1+2-3$.

Dies vorausgesetzt kann der obige Satz auch, wie folgt, ausgesprochen werden: Wenn man alle Glieder der Reihe $(A.)$ mit k multiplicirt, so wird in der diesem Multiplicator zugehörenden reducirten Reihe eine gerade oder ungerade Anzahl negativer Glieder vorkommen, je nachdem k ein quadratischer Rest oder Nichtrest ist.

14) Wenn man die einzelnen Zahlen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ in beliebiger Weise mit dem positiven oder negativen Zeichen nimmt und daraus eine algebraische Summe bildet, so soll diese eine aus den Elementen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ gebildete Form, oder kürzer, da zunächst keine anderen Elemente als diese betrachtet werden, eine *Form* heissen, und zwar soll diese zu der *geraden* oder *ungeraden* Gattung gehören, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl *negativer* Glieder enthält. Zu der geraden Gattung gehört also namentlich die Form $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$ mit nur positiven Gliedern, welche die *positive Hauptform* heissen soll. Zwei Formen sind *verschieden*, sobald nicht alle Elemente in beiden dasselbe Zeichen haben.

Nach dem Vorhergehenden wird also, wenn man die einzelnen Glieder der Hauptform mit k multiplicirt, die diesem Multiplicator zugehörende reducirte Reihe eine Form sein, welche zur Gattung der Hauptform, oder zu der entgegengesetzten gehört, je nachdem k ein quadratischer Rest oder Nichtrest ist.

Dieses Resultat lässt sich leicht verallgemeinern. Man betrachte nämlich nun eine Form, die s negative Glieder enthält, sie heisse f. Man multiplicire die einzelnen Glieder dieser Form mit k, so erhält man eine Reihe, deren Glieder, absolut genommen, $k, 2k, \ldots \frac{1}{2}(p-1)k$ sind, unter welchen sich aber ebenfalls s Glieder mit negativem Zeichen befinden. Diese letztere

Reihe verwandele man so, dass man statt der Zahlen, die, absolut genommen, grösser als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind, die ihnen congruenten nimmt, die kleiner als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind. Die so entstehende Reihe, welche wieder *die dem Multiplicator k zugehörende reducirte* heissen soll, wird eine Form sein, die zu derselben Gattung, wie die Form f, oder zu der entgegengesetzten gehört, je nachdem k ein quadratischer Rest oder Nichtrest ist.

Seien nämlich unter den Zahlen k, $2k$, ... $\frac{1}{2}(p-1)k$ (nach Abzug der Vielfachen von p) t *negative*, die kleiner als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind, u *negative*, die grösser als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind und v *positive*, die grösser als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind. Die u Zahlen gehen in der reducirten Reihe in ebenso viel *positive* über, die kleiner als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind, die v Zahlen in ebenso viel *negative*, die kleiner als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind. Man hat daher

$$(-1)^s k^{\frac{1}{2}(p-1)}.1.2\ldots\tfrac{1}{2}(p-1) \equiv (-1)^{t+v}.1.2\ldots\tfrac{1}{2}(p-1),$$

oder

$$k^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv (-1)^{t+v-s}.$$

Es muss also $t+v$ zugleich mit s gerade oder ungerade sein, wenn k ein quadratischer Rest ist; ist dagegen k ein Nichtrest, so muss $t+v$ gerade oder ungerade sein, je nachdem s ungerade oder gerade ist. Aber $t+v$ ist die Anzahl der negativen Glieder in der zum Multiplicator k gehörenden reducirten Reihe.

15) Wenn eine Form einer Zahl (nach dem Modul p) congruent ist, so werde ich, der Kürze halber, je nachdem diese Zahl ein quadratischer Rest oder Nichtrest ist, auch die Form einen quadratischen Rest oder Nichtrest nennen.

Sei nun $1+2+3+\cdots+\frac{1}{2}(p-1) \equiv m$*). Multiplicirt man diese Congruenz allmälich mit den Zahlen 1, 2, ... $p-1$, so erhält man auf der einen Seite, indem man die diesen Multiplicatoren zugehörenden reducirten Reihen nimmt, $p-1$ Formen, auf der anderen Seite, indem man m mit 1, 2, ... $p-1$ multiplicirt, und die Vielfachen von p vernachlässigt, die Zahlen 1, 2, ... $p-1$ in irgend einer Ordnung. Diejenigen dieser $p-1$ Formen, welche zur geraden Gattung gehören, werden quadratische Reste oder Nichtreste sein, und diejenigen, welche zur ungeraden Gattung gehören, quadratische Nichtreste oder Reste, je nachdem $p = 8n+1$, $8n+3$ oder $p = 8n+5$, $8n+7$ ist.

---

*) Man übersehe nicht, dass m niemals Null sein kann.

Nach 14) werden nämlich die $\frac{1}{2}(p-1)$ Formen, welche durch Multiplication mit den unter $1, 2, \ldots p-1$ enthaltenen quadratischen Resten entstehen, zur geraden Gattung gehören, dagegen die $\frac{1}{2}(p-1)$ Formen, welche durch die Multiplication mit den quadratischen Nichtresten entstehen, zur ungeraden Gattung. Je nachdem m ein Rest oder Nichtrest ist, werden mithin die Formen der geraden Gattung quadratische Reste oder Nichtreste und die der ungeraden Gattung quadratische Nichtreste oder Reste sein. Da nun

$$-2m \equiv -2\left(1+2+\cdots+\frac{p-1}{2}\right) \equiv -(2+4+\cdots+p-3+p-1)$$

$$\equiv p-2+p-4+\cdots+3+1 \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

so ist m ein quadratischer Rest oder Nichtrest, je nachdem -2 das eine oder das andere ist, d. h. je nachdem $p = 8n+1, 8n+3$ oder $p = 8n+5, 8n+7$. Ist z. B. $p = 11$, so sind die quadratischen Reste 1, 3, 4, 5, 9, die Nichtreste 2, 6, 7, 8, 10. Nun ist $1+2+3+4+5 \equiv 4$; multiplicirt man diese Congruenz mit den Resten 1, 3, 4, 5, 9, so erhält man folgende Formen gerader Gattung:

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5 &\equiv 4, \\ 1-2+3+4-5 &\equiv 1, \\ 1-2-3+4+5 &\equiv 5, \\ -1-2+3+4+5 &\equiv 9, \\ 1-2+3-4+5 &\equiv 3. \end{aligned}$$

Multiplicirt man dagegen mit den Nichtresten 2, 6, 7, 8, 10, so erhält man folgende Formen ungerader Gattung:

$$\begin{aligned} -1+2-3+4-5 &\equiv 8, \\ 1+2-3-4-5 &\equiv 2, \\ -1+2+3-4-5 &\equiv 6, \\ -1+2-3-4+5 &\equiv 10, \\ -1-2-3-4-5 &\equiv 7. \end{aligned}$$

Wenn man irgend eine der aus $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$ abgeleiteten $p-1$ Formen wieder mit den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ multiplicirt, so erhält man (nach gehöriger Reduction) dieselben $p-1$ Formen. Ist z. B. eine dieser Formen durch die Multiplication mit k, also aus $k+2k+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)k$ entstanden, die andere durch die Multiplication mit r, also aus $r+2r+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)r$, so wird man die letztere auch erhalten, wenn man $k+2k+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)k$ mit l

multiplicirt und reducirt, sobald l die Zahl bedeutet, die kleiner als p ist und der Congruenz $kl \equiv r \pmod{p}$ Genüge leistet.

16) Im Allgemeinen wird es ausser der positiven Hauptform

$$1+2+\cdots+\tfrac{1}{2}(p-1)$$

noch andere Formen geben, welche ebenfalls $\equiv m$ sind; sie sollen ebenfalls *Hauptformen* heissen und zwar, da sie wenigstens *ein* negatives Glied enthalten müssen, *negative* Hauptformen. Ihre Anzahl ist leicht zu bestimmen. Es wird nämlich so viel negative Hauptformen geben, als es Combinationen aus den Elementen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ giebt, die der Null congruent sind. Hat man z. B.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots = tp,$$

so dass a_1, a_2, a_3, ... Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ bedeuten, und zieht man $2a_1+2a_2+2a_3+\cdots$ von $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$ ab, so wird man eine Form erhalten, in welcher nun $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$, ... statt a_1, a_2, a_3, ... vorkommen, während alle anderen Elemente unverändert geblieben sind; zugleich ist diese Form $\equiv m$. Aus jeder der Null congruenten Combination ergiebt sich also, auf diese Weise, eine negative Hauptform. Umgekehrt kann es keine negative Hauptform geben, die nicht auf diese Weise gebildet werden kann. Denn sind in einer solchen die Elemente a_1, a_2, ... negativ, die übrigen positiv, und man zieht sie von $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)$ ab, so erhält man $2(a_1+a_2+\cdots) \equiv 0$, oder $a_1+a_2+\cdots \equiv 0$. Es giebt also so viel negative Hauptformen, die zur *geraden* Gattung gehören, als es *gerade* Combinationen giebt, die $\equiv 0$ sind, und soviel negative Hauptformen, die zur *ungeraden* Gattung gehören, als es *ungerade* Combinationen giebt, die $\equiv 0$ sind, d. h. mithin nach 8): Es giebt $\dfrac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\dfrac{1}{2}$ negative Hauptformen gerader und ebenso viel ungerader Gattung. Diese Zahl soll im Folgenden durch l bezeichnet werden; die positive Hauptform mitgerechnet, hat man also im Ganzen $1+2l$ Hauptformen.

17) Aus jeder negativen Hauptform kann man nun wieder, indem man sie mit den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ multiplicirt, $p-1$ Formen ableiten, die den einzelnen Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ congruent sind. Auch kann man wieder, wie oben in 15), beweisen, dass man dieselben Formen erhält, wenn man irgend eine dieser abgeleiteten Formen mit $1, 2, \ldots p-1$ multiplicirt. Ist z. B. wieder $p=11$, so sind hier zwei Combinationen, nämlich $2+4+5$

und $1+2+3+5$, die $\equiv 0$ sind. Ihnen entsprechen die zwei negativen Hauptformen

$$1-2+3-4-5,$$
$$-1-2-3+4-5.$$

Aus diesen ergiebt sich, wenn man wieder, wie oben, die quadratischen Reste und Nichtreste von einander sondert,

$1-2+3-4-5 \equiv 4$	$-1-2-3+4-5 \equiv 4$
$-1-2+3-4+5 \equiv 1$	$1+2-3-4+5 \equiv 1$
$1+2+3+4-5 \equiv 5$	$-1+2+3-4+5 \equiv 5$
$1+2-3+4+5 \equiv 9$	$1-2-3-4-5 \equiv 9$
$-1-2-3+4+5 \equiv 3$	$-1+2+3+4-5 \equiv 3$
$1+2+3-4-5 \equiv 8$	$1-2-3-4+5 \equiv 8$
$-1-2+3-4-5 \equiv 2$	$-1+2+3+4+5 \equiv 2$
$-1-2-3-4+5 \equiv 6$	$1-2-3+4-5 \equiv 6$
$1+2-3+4-5 \equiv 10$	$-1-2+3+4-5 \equiv 10$
$-1+2-3+4+5 \equiv 7$	$1+2+3-4+5 \equiv 7.$

18) Jede Form f, die einer Zahl t congruent ist, kann aus einer Hauptform abgeleitet werden, sobald t nicht Null ist. Ist nämlich, wie früher angenommen wurde, $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1) \equiv m$, so suche man die Zahl r, welche $< p$ und der Congruenz $rt \equiv m$ genügt. Indem man dann die Form f mit r multiplicirt, findet man die gesuchte Hauptform. Es versteht sich von selbst, dass zwei Formen, welche verschiedenen Zahlen congruent sind, verschieden sein müssen. Aber auch zwei Formen, die derselben Zahl congruent sind, müssen verschieden sein, sobald sie aus zwei verschiedenen Hauptformen abgeleitet sind. Ist nämlich die Form f, welche $\equiv t$ ist, aus der Hauptform F abgeleitet, und es gäbe eine aus einer anderen Hauptform F^1 abgeleitete Form f^1, die ebenfalls $\equiv t$ und zugleich mit f identisch wäre, so könnte man jedenfalls eine Zahl r finden, die der Congruenz $rt \equiv m$ genügte. Indem man also f und f^1 mit r multiplicirte, erhielte man dieselbe Hauptform, während man F aus f und F^1 aus f^1 erhalten müsste.

Die $1+2l$ Hauptformen geben also, indem man sie mit $1, 2, \ldots p-1$ multiplicirt, $(1+2l)(p-1)$ verschiedene Formen, von welchen die Hälfte den quadratischen Resten, die andere Hälfte den Nichtresten von p congruent ist.

19) Aus 15) ergiebt sich noch Folgendes: Ist m ein quadratischer Rest, also $p = 8n+1$ oder $8n+3$, so werden die aus den l negativen Hauptformen gerader Gattung abgeleiteten Formen gerader Gattung den quadratischen Resten und die abgeleiteten Formen ungerader Gattung den Nichtresten congruent sein. Dagegen werden die aus den l negativen Hauptformen ungerader Gattung abgeleiteten Formen gerader Gattung den Nichtresten und die abgeleiteten Formen ungerader Gattung den Resten congruent sein. Die *sämmtlichen* Formen *gerader* Gattung (die aus der positiven Hauptform abgeleiteten mitgerechnet) enthalten also jeden quadratischen Rest $(1+l)$ mal, jeden quadratischen Nichtrest l mal, während die *sämmtlichen* Formen *ungerader* Gattung jeden Rest l mal, jeden Nichtrest $(1+l)$ mal enthalten. Umgekehrt ist es, wenn m ein Nichtrest ist, also $p = 8n+5$ oder $8n+7$, dann enthalten nämlich die Formen gerader Gattung jeden quadratischen Rest l mal, jeden quadratischen Nichtrest $(1+l)$ mal, dagegen die Formen ungerader Gattung jeden quadratischen Rest $(1+l)$ mal, jeden Nichtrest l mal.

20) Wenn man aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ alle möglichen Formen bildet, d. h. also alle Zusammenstellungen, in welchen alle diese Zahlen vorkommen und zwar auf alle mögliche Weisen mit dem $+$ oder $-$ Zeichen versehen, so erhält man offenbar, wenn man zur Abkürzung $\frac{1}{2}(p-1)=q$ setzt, im Ganzen 2^q Formen, und zwar 2^{q-1} Formen der geraden Gattung und ebenso viel Formen der ungeraden Gattung. Die Anzahl der Formen, in welchen s positive und $q-s$ negative Glieder vorkommen, ist nämlich keine andere, als die Anzahl der Permutationen aus q Elementen, worunter s gleiche einer Gattung und $q-s$ gleiche einer zweiten Gattung sind, also $\frac{q(q-1)\ldots(q-s+1)}{1.2.\ldots.s}$. Im Ganzen hat man also $1+q+\frac{q(q-1)}{1.2}+\cdots = 2^q$ Formen. Hierunter sind $1+\frac{q(q-1)}{1.2}+\cdots = 2^{q-1}$ gerader und $q+\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}+\cdots = 2^{q-1}$ ungerader Gattung. Nun hat man $(1+2l)\frac{p-1}{2}$ gerade Formen und ebensoviel ungerade, die einem Reste oder Nichtreste congruent sind, nach 18), und diese enthalten alle möglichen Formen, mit Ausnahme derjenigen (wenn solche vorhanden sind) die $\equiv 0$ sind. Sobald also nicht die Gleichung

$$(1+2l)(p-1) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

erfüllt ist, muss es Formen geben, welche $\equiv 0$ sind. Soll aber diese Gleichung statt finden, so muss $p-1$ ein Factor von $2^{\frac{1}{2}(p-1)}$, also $p-1=2^r$ sein. Ist $p = 4n+3$, so kann dies nur dann der Fall sein, wenn $r=1$, also

$p=3$; dann hat man in der That nur die zwei Formen $1\equiv 1$ und $-1\equiv 2$. Ist $p=8n+5$, also $p-1=4(2n+1)$, und soll dies $=2^r$ sein, so muss $n=0$, also $p=5$ sein; dann hat man die vier Formen $1+2\equiv 3$, $1-2\equiv 4$; $-1+2\equiv 1$, $-1-2\equiv 2$, von welchen keine $\equiv 0$ ist. Ist $p=8n+1$, und sollte also $p-1=8n=2^r$ sein, mithin $n=2^{r-3}$, so müsste n eine gerade Zahl sein. Für diesen Fall lässt sich aber leicht direct nachweisen, dass es Formen giebt, die $\equiv 0$ sind. Denn da, wenn $p=8n+1$, offenbar $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)=\frac{1}{8}(p^2-1)\equiv\frac{1}{8}(p-1)$ d. h. $\equiv n$ ist, und n gerade sein soll, so erhält man, wenn man auf beiden Seiten dieser Congruenz $2.\frac{1}{2}n$ abzieht, auf der einen Seite eine Form, in welcher die Zahl $\frac{1}{2}n$ mit dem $-$ Zeichen erscheint, die übrigen Zahlen aber das $+$ Zeichen behalten, während man auf der anderen Seite Null erhält. Abgesehen von den Zahlen 3 und 5 giebt es daher bei jeder Primzahl Formen, die $\equiv 0$ sind.

21) Dies letztere Resultat kann auf eine andere Weise abgeleitet werden, die weiteren Aufschluss giebt. Man kann nämlich die Formen, welche $\equiv 0$ sind, unmittelbar aus der positiven Hauptform ableiten. Denn ist diese einer positiven *geraden* Zahl $(<p)$ congruent, so dass man

$$1+2+\cdots+\tfrac{1}{2}(p-1)\equiv 2h$$

hat, so kann man alle Combinationen aus den Elementen 1, 2, ... $\frac{1}{2}(p-1)$ suchen, welche $\equiv h$ sind; indem man in jeder solchen Combination alle Elemente mit 2 multiplicirt, erhält man einen Ausdruck, welcher $\equiv 2h$ ist, und zieht man diesen von der positiven Hauptform ab, so hat man eine Form, welche $\equiv 0$ ist.

Ist $1+2+\cdots+\frac{1}{2}(p-1)\equiv 2h'+1$, wo wieder $2h'+1$ eine positive Zahl $(<p)$ bedeutet, und man setzt $\frac{1}{2}(2h'+1+p)=h$, so dass $2h'+1\equiv 2h$ und mithin auch

$$1+2+\cdots+\tfrac{1}{2}(p-1)\equiv 2h,$$

und man sucht wieder alle Combinationen aus 1, 2, ... $\frac{1}{2}(p-1)$, die $\equiv h$ sind, so kann man wie im früheren Falle verfahren. Hierbei hat h dieselbe Bedeutung wie in 4).

Nach dem Vorhergehenden erhält man also soviel Formen, die $\equiv 0$ sind, als es Combinationen giebt, die $\equiv h$ sind. Umgekehrt kann es auch nicht mehr Formen dieser Art geben, vielmehr lässt sich jede aus einer entsprechenden Combination, die $\equiv h$ ist, ableiten. Denn ist

$$1+2+\cdots-a_1-a_2-\cdots-a_k+a_{k+1}+\cdots+\equiv 0$$

eine solche Form, und man addirt $2a_1+2a_2+\cdots+2a_k$, so erhält man

$$1+2+\cdots+a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+\cdots\equiv 2a_1+2a_2+\cdots+2a_k.$$

Auf der linken Seite steht die positive Hauptform, mithin ist

$$2a_1+2a_2+\cdots+2a_k \equiv 2h \quad \text{oder} \quad a_1+a_2+\cdots+a_k \equiv h.$$

Nun ist C_h nach Gleichung (11.) allerdings $=0$, wenn $p=3$ oder $=5$, in allen anderen Fällen aber hat C_h einen von Null verschiedenen Werth; für 3 und 5 giebt es also keine Formen, die $\equiv 0$ sind, für alle anderen Primzahlen giebt es solche Formen, wie schon vorher gefunden wurde. Wir sind aber jetzt im Stande auch die Anzahl dieser Formen sowohl der geraden als der ungeraden Gattung anzugeben; nach 6) giebt es nämlich in jeder Gattung $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2}$ Formen dieser Art.

Fasst man diese Ergebnisse zusammen mit denen in 19), so erhält man schliesslich folgenden Satz:

Wenn man aus den Zahlen 1, 2, ... $\frac{1}{2}(p-1)$ alle möglichen Formen bildet, indem man diese Zahlen auf alle möglichen Weisen mit dem $+$ oder $-$ Zeichen versieht, so werden die Formen mit gerader Anzahl negativer Glieder die quadratischen Reste oder Nichtreste und die Formen mit ungerader Anzahl negativer Glieder die quadratischen Nichtreste oder Reste einmal mehr enthalten, je nachdem $p=8n+1$, $8n+3$ oder $p=8n+5$, $8n+7$ ist. Und zwar enthalten im ersten Falle die Formen mit gerader Anzahl negativer Glieder jeden quadratischen Rest $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{1}{2}$ mal, jeden Nichtrest $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2}$ mal, dagegen die Formen mit ungerader Anzahl negativer Glieder jeden quadratischen Rest $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2}$ mal, jeden Nichtrest $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{1}{2}$ mal. Im zweiten Falle dagegen enthalten die Formen mit gerader Anzahl negativer Glieder jeden quadratischen Rest $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2}$ mal, jeden Nichtrest $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{1}{2}$ mal, dagegen die Formen mit ungerader Anzahl negativer Glieder jeden quadratischen Rest $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{1}{2}$ mal, jeden Nichtrest $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2}$ mal. Ausserdem giebt es in jedem Falle

$\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2}$ Formen mit gerader Anzahl negativer Glieder und ebenso viel mit ungerader Anzahl negativer Glieder, welche $\equiv 0$ sind.

Hiermit übereinstimmend wurde oben in 15) und 17) gefunden, dass für $p=11$ unter den geraden Formen jeder quadratische Rest zweimal, jeder Nichtrest einmal vorkommt, dagegen unter den ungeraden Formen jeder quadratische Rest einmal, jeder Nichtrest zweimal. Ausserdem giebt es noch *eine* gerade Form und *eine* ungerade Form, welche $\equiv 0$ sind, nämlich $-1+2-3-4-5$ und $1-2+3+4+5$, sie entsprechen den zwei Combinationen $2\equiv 2$ und $1+3+4+5\equiv 2$, da hier $h=2$ ist.

22) Nimmt man statt der bisher betrachteten Zahlen $1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ die Zahlen $2, 4, 6, \ldots p-1$ und bildet in ähnlicher Weise aus ihnen alle möglichen Formen, indem man nun die Zahlen $2, 4, \ldots p-1$ auf alle möglichen Weisen mit dem $+$ und $-$ Zeichen versieht, so findet man das Resultat unmittelbar aus dem Früheren, wenn man bedenkt, dass man nur alle aus den Elementen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ gebildeten Formen mit 2 zu multipliciren hat, um alle aus $2, 4, \ldots p-1$ gebildeten Formen zu erhalten. Je nachdem 2 ein quadratischer Rest oder Nichtrest ist, werden also die Formen aus $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$, welche quadratische Reste oder Nichtreste sind, wieder solche geben, oder bezüglich in Nichtreste oder Reste übergehen. Bei den Zahlen von der Form $8n+1$, $8n+7$ bleibt also das Verhältniss der Reste und Nichtreste dasselbe wie früher, während es bei den Zahlen von der Form $8n+3$ und $8n+5$ in das entgegengesetzte übergeht. Demnach ergiebt sich hier der Satz:

Wenn man aus den Zahlen $2, 4, \ldots p-1$ alle möglichen Formen bildet, so werden die Formen mit gerader Anzahl negativer Glieder $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{1}{2}$ mal die quadratischen Reste und $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2}$ mal die Nichtreste, und die Formen mit ungerader Anzahl negativer Glieder $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2}$ mal die quadratischen Reste und $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{1}{2}$ mal die Nichtreste enthalten, oder umgekehrt, je nachdem $p=4n+1$ oder $p=4n+3$ ist. Ausserdem giebt es $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2}$ Formen mit gerader und ebenso viel mit ungerader Anzahl negativer Glieder, welche $\equiv 0$ sind.

Hieraus kann man nun ferner leicht das Resultat ableiten, welches man erhält, wenn man auf dieselbe Weise aus den Zahlen 1, 3, 5, ... $p-2$ alle Formen bildet. Da nämlich $p-2 \equiv -2$, $p-4 \equiv -4$, ... $1 \equiv -(p-1)$ ist, so hat man, um diese Formen zu finden, offenbar nur die aus 2, 4, ... $p-1$ gebildeten Formen mit -1 zu multipliciren und dann statt der so erhaltenen positiven geraden Zahlen die negativen ungeraden, statt der negativen geraden die positiven ungeraden zu nehmen, welche sie zu p ergänzen. Oder kürzer, man nimmt in jeder aus 2, 4, ... $p-1$ gebildeten Form, statt jeder Zahl ihre Ergänzung zu p mit Beibehaltung des Zeichens und vertauscht auch die Zahl, die dieser Form congruent ist, mit ihrer Ergänzung zu p. Für $p = 11$ erhält man also z. B. aus der Form $2-4+6+8-10 \equiv 2$ die Form $-1+3+5-7+9 \equiv 9$. Die Zahl der positiven und negativen Glieder bleibt demnach in der aus 1, 3, ... $p-2$ gebildeten Form dieselbe, wie in der aus 2, 4, ... $p-1$ gebildeten, aus welcher sie abgeleitet ist. Ist nun zugleich $p = 4n+1$, mithin -1 quadratischer Rest, so ist die abgeleitete Form zugleich mit der, aus welcher sie abgeleitet ist, einem quadratischen Reste oder Nichtreste congruent, während, wenn $p = 4n+3$, die abgeleitete Form einem quadratischen Reste oder Nichtreste congruent ist, je nachdem die Form, aus welcher sie abgeleitet wird, einem Nichtreste oder Reste congruent ist. Berücksichtigt man dieses, so ergiebt sich aus dem oben, in Beziehung auf die aus 2, 4, ... $p-1$ gebildeten Formen, gefundenen Satze, nun noch folgender:

Wenn man aus den Zahlen 1, 3, ... $p-2$ alle möglichen Formen bildet, indem man jede Zahl auf alle möglichen Weisen mit dem $+$ und $-$ Zeichen versieht, so werden die Formen mit gerader Anzahl negativer Glieder die quadratischen Reste einmal mehr als die Nichtreste enthalten, dagegen die Formen mit ungerader Anzahl negativer Glieder die Nichtreste einmal mehr als die Reste *). Und zwar enthalten die Formen mit gerader Anzahl negativer Glieder die Reste $\frac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p} + \frac{1}{2}$ mal, die Nichtreste $\frac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p} - \frac{1}{2}$ mal; die Formen mit ungerader Anzahl negativer

*) Diesen Theil des Satzes hat, wie ich aus einer brieflichen Mittheilung weiss, schon *Eisenstein* gekannt, doch weiss ich nicht wie, auch nicht ob er denselben bewiesen hat.

Glieder dagegen die Reste $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}-\frac{1}{2}$ mal, die Nichtreste $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{1}{2}$ mal. Ausserdem giebt es ebenso viel Formen mit gerader als mit ungerader Anzahl negativer Glieder, die $\equiv 0$ sind, und zwar $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2p}+\frac{(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{2}$.

23) Man kann diesen letzten Satz noch in anderer Weise ausdrücken. Setzt man nämlich in den aus $1, 3, \ldots p-2$ gebildeten Formen, statt der *negativen* Zahlen, die ihnen congruenten *positiven*, die kleiner als p und *gerade* sind, so erhält man Combinationen der $\frac{1}{2}(p-1)^{\text{ten}}$ Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots p-1$ gebildet, und zwar Combinationen, in welchen nie zwei Elemente vorkommen, die zusammen p ausmachen, da in den aus $1, 3, \ldots p-2$ gebildeten Formen nie k und $-k$ in derselben Form vorkommen. Ich will diese Gattung Combinationen, um sie von den Combinationen im Allgemeinen zu unterscheiden, *exclusive* Combinationen nennen. Jede solche exclusive Combination der $\frac{1}{2}(p-1)^{\text{ten}}$ Klasse giebt also, wenn man die geraden Elemente durch die ihnen congruenten ungeraden ($<p$) ersetzt, eine aus $1, 3, \ldots p-2$ gebildete Form, und umgekehrt geben die sämmtlichen aus $1, 3, \ldots p-2$ gebildeten Formen, wenn man sie auf die oben angegebene Weise verändert, die sämmtlichen exclusiven Combinationen der $\frac{1}{2}(p-1)^{\text{ten}}$ Klasse. Man hat daher den Satz:

Wenn man aus $1, 2, \ldots p-1$ die sämmtlichen exclusiven Combinationen der Klasse $\frac{1}{2}(p-1)$ bildet, so werden die Combinationen mit *gerader* Anzahl *gerader* Glieder die quadratischen Reste einmal mehr als die Nichtreste, und die Combinationen mit *ungerader* Anzahl *gerader* Glieder die Nichtreste einmal mehr als die Reste enthalten. Ausserdem giebt es ebenso viel Combinationen mit gerader als mit ungerader Anzahl gerader Glieder, die $\equiv 0$ sind. Die numerischen Bestimmungen entsprechen den in 22) gegebenen. In ähnlicher Weise kann man auch den in 21) bewiesenen Satz auf die exclusiven Combinationen übertragen. Wenn man nämlich in den sämmtlichen aus $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ gebildeten Formen, statt der negativen Zahlen die ihnen congruenten positiven nimmt, die kleiner als p und mithin grösser als $\frac{1}{2}(p-1)$ sind, so erhält man wieder die sämmtlichen exclusiven Combinationen der $\frac{1}{2}(p-1)^{\text{ten}}$ Klasse. Wenn man daher statt der aus $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ gebil-

deten Formen die aus 1, 2, ... $p-1$ gebildeten exclusiven Combinationen der Klasse $\frac{1}{2}(p-1)$ betrachtet, so hat man nur in dem am Schlusse von 21) ausgesprochenen Satze statt der Worte „Formen mit gerader Anzahl negativer Glieder" die Worte „exclusive Combinationen mit gerader Anzahl Elemente, die $> \frac{1}{2}(p-1)$ sind," so wie statt der Worte „Formen mit ungerader Anzahl negativer Elemente" die Worte „exclusive Combinationen mit ungerader Anzahl Elemente, die $> \frac{1}{2}(p-1)$ sind" zu setzen.

Göttingen, im August 1861.

Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form $\Pi(x,y)\,dx$, in welcher $\Pi(x,y)$ eine beliebige rationale Function ist, und zwischen x und y eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht.

(Von Herrn *S. Aronhold.*)

Wenn ich mir erlaube, ein vielfach abgehandeltes Gebiet der Integralrechnung hier von Neuem vorzuführen, so geschieht es, weil ich eine Reihe bis jetzt noch unbekannter Resultate für dasselbe aufstellen kann, welche ebensowohl durch die neue Methode, aus welcher sie hervorgehen, ein Interesse haben dürften wie durch ihre weitere Verwendung. Dem letzteren Umstande verdanken sie ihre Entstehung, denn ich bin auf dieselben geführt worden bei dem Versuche, die algebraische Reduction elliptischer Integrale, welche ich in den Monatsberichten der Berliner Academie 1861, pag. 461 und folg. veröffentlicht habe, auf *Abel*sche Integrale auszudehnen. Meine Absicht ist, eine Methode zu geben, durch welche die Endresultate der Integration in *schliesslicher* Gestalt erkannt werden, was durch die üblichen Regeln nicht mehr erreicht wird, wenn die zu behandelnden Integrale von complicirteren Problemen herrühren. Ich will insbesondere das wiederholte Rationalmachen beseitigen, welches eine bedeutend grössere Anzahl von Partialbrüchen herbeiführt, als erforderlich ist, und im Allgemeinen nur die Möglichkeit der Berechnung gewährt, in complicirten Fällen aber unausführbar ist.

Das Princip, welches ich benutzen werde, besteht im Wesentlichen darin, *dass ich den zu integrirenden rationalen Differentialausdruck $\Pi(x,y)\,dx$, in welchem zwischen y und x eine algebraische Relation besteht, in einen anderen rationalen von der Form $Xdx+Ydy$ verwandele, welcher ein exactes Differential ist, und daher ohne Vermittelung der Bedingungsgleichung integrirt werden kann.* Die Benutzung der Bedingungsgleichung wirft sich also lediglich auf die angegebene Umformung, und es bleiben in der Rechnung immer beide Variabeln bestehen. Dieses hat zur Folge, dass man alle Ausdrücke homogen machen und alsdann die Determinanten- und Invariantentheorie in ihrem vollen Umfange anwenden kann.

§. 1.

Es sei

$$(1.) \qquad f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

eine allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen x und y, und es soll unter Voraussetzung derselben $\int \frac{F(x,y)}{\Phi(x,y)}\,dx$ ermittelt werden, wenn F und Φ zwei ganz beliebige ganze Functionen von x und y sind. Hierzu ist erforderlich, dass man gewisse specielle Grundformen voraussetzt, auf welche sich die allgemeinen zurückführen lassen. Als allgemein übliche Grundform wählt man ein Integral von der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}},$$

welches sich hier durch

$$\int \frac{dx}{\frac{1}{2}f'(y)}$$

darstellen lässt, denn löst man die Gleichung (1.) nach y auf, so erhält man

$$(2.) \qquad \begin{cases} a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = \sqrt{-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)x^2 + 2(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x - (a_{22}a_{33}-a_{23}^2)} \\ \qquad\qquad = \sqrt{Ax^2+Bx+C}, \end{cases}$$

und es ist

$$\tfrac{1}{2}f'(y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}.$$

Man kann diese Darstellungsweise der Grundform auch als Specialisirung eines zuerst von Herrn *Weierstrass* gegebenen, auf die elliptischen Functionen bezüglichen, Theoremes betrachten, welches ich in der oben citirten Abhandlung näher erörtert habe.

Ich werde indessen die vorstehende Grundform insofern etwas verallgemeinern, als ich den Nenner derselben noch mit einer beliebigen linearen Function der Variabeln multiplicire, indem ich nachweisen werde, *dass sich*

$$(3.) \qquad \varpi = \int \frac{dx}{(u_1x+u_2y+u_3)\frac{1}{2}f'(y)}$$

immer durch einen einzigen Logarithmus einer algebraischen Function darstellen lässt. Ich werde in der That zeigen, dass, wenn γ eine gehörig bestimmte Constante ist, immer

$$(4.) \qquad \gamma \cdot \int \frac{dx}{(u_1x+u_2y+u_3)\frac{1}{2}f'(y)} = l\Big(\frac{(x-\xi)f'(\xi)+(y-\eta)f'(\eta)}{u_1x+u_2y+u_3}\Big)$$

ist, wo ξ und η Constanten bedeuten welche durch Auflösung der Gleichungen

$$(5.) \qquad f(\xi, \eta) = 0, \qquad u_1\xi + u_2\eta + u_3 = 0$$

erhalten werden. Die Vertauschung der beiden Wurzelpaare aus (5.) führt nur eine Aenderung des Vorzeichens des Logarithmus in (4.) herbei. Selbstverständlich kehrt man zur ersten Grundform zurück, wenn man in (4.) $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ setzt, während man durch andere Specialisirungen eine Reihe gleichartiger Integrale gewinnen kann, deren Zusammenhang a priori nicht erkannt wird. Es ist auch nicht leicht, das einfache Resultat (4.) durch die üblichen Regeln abzuleiten, indem man durch dieselben den Charakter der in (4.) enthaltenen Endform zerstört, welche die folgenden Principien ohne Weiteres ergeben.

§. 2.

Allgemeine Beziehungen.

Es sollen in der Folge alle hier vorkommenden Functionen durch die Substitutionen

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

in homogene verwandelt werden. Dadurch geht die Bedingungsgleichung §. 1 (1.) in folgende über:

$$(1.) \quad f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$

und ich werde sie kürzer

$$(2.) \qquad f(xx) = 0$$

schreiben, ferner wird

$$(3.) \qquad dx = \frac{x_3dx_1 - x_1dx_3}{x_3^2}, \qquad \tfrac{1}{2}f'(y) = \frac{\frac{1}{2}f'(x_2)}{x_3},$$

und demnach das oben eingeführte Fundamentalintegral §. 1 (3.):

$$(4.) \qquad \varpi = \int \frac{dx}{(u_1x + u_2y + u_3)\frac{1}{2}f'(y)} = \int \frac{x_3dx_1 - x_1dx_3}{u.\frac{1}{2}f'(x_2)},$$

wenn man noch der Kürze halber

$$u = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$$

setzt. Das Integral lässt sich nun auf eine merkwürdige Weise in eine mehr symmetrische Form bringen. Da nämlich wegen (1.), nach dem Satze von den homogenen Functionen,

$$x_1f'(x_1) + x_2f'(x_2) + x_3f'(x_3) = f(xx) = 0,$$
$$dx_1f'(x_1) + dx_2f'(x_2) + dx_3f'(x_3) = 0$$

ist, so folgt

$$(5.)\qquad f'(x_1) : f'(x_2) : f'(x_3) = x_2dx_3 - x_3dx_2 : x_3dx_1 - x_1dx_3 : x_1dx_2 - x_2dx_1,$$

woraus, da wegen (4.)

$$(6.)\qquad d\varpi . \tfrac{1}{2} f'(x_2) . u = x_3dx_1 - x_1dx_3$$

ist, hervorgeht:

$$(7.)\qquad \begin{cases} d\varpi . \tfrac{1}{2} f'(x_1) . u = x_2dx_3 - x_3dx_2, \\ d\varpi . \tfrac{1}{2} f'(x_2) . u = x_3dx_1 - x_1dx_3, \\ d\varpi . \tfrac{1}{2} f'(x_3) . u = x_1dx_2 - x_2dx_1. \end{cases}$$

Führt man nun ein beliebiges System von Factoren ξ_1, ξ_2, ξ_3 ein, multiplicirt mit denselben die vorstehenden Gleichungen, so erhält man nach Addition derselben

$$(8.)\qquad d\varpi . \tfrac{1}{2}\left(\xi_1 f'(x_1) + \xi_2 f'(x_2) + \xi_3 f'(x_3)\right) . u = \Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3,$$

also

$$(9.)\qquad \varpi = \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u . \tfrac{1}{2}\left(\xi_1 f'(x_1) + \xi_2 f'(x_2) + \xi_3 f'(x_3)\right)} = \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u . f(\xi x)},$$

worin der Kürze halber

$$(10.)\qquad f(\xi x) = \tfrac{1}{2}\left(\xi_1 f'(x_1) + \xi_2 f'(x_2) + \xi_3 f'(x_3)\right)$$

geschrieben ist, was auch mit der Bezeichnung (2.) übereinstimmt, indem für $\xi_k = x_k$ die Gleichung (10.) übergeht in

$$f(xx) = \tfrac{1}{2}\left(x_1 f'(x_1) + x_2 f'(x_2) + x_3 f'(x_3)\right) = f(x_1, x_2, x_3).$$

Der durch (8.) *dargestellte Ausdruck für* $d\varpi$, *nämlich*

$$(11.)\qquad d\varpi = \frac{(\xi_2 x_3 - \xi_3 x_2) dx_1 + (\xi_3 x_1 - \xi_1 x_3) dx_2 + (\xi_1 x_2 - \xi_2 x_1) dx_3}{u . f(\xi x)},$$

welcher nach Aufhebung der Homogenität ein Differentialausdruck der zwei Veränderlichen x *und* y, *also von der Form* $Xdx + Ydy$ *ist, und unter Vermittlung von* $f = 0$ *auf eine Veränderliche, wie er ursprünglich war, zurückgeführt wird, ist diejenige Form des Differentials, von welcher ich zeigen werde, dass sie bei gehöriger Bestimmung der bis dahin ganz willkürlichen Grössen* ξ_k *ein exactes Differential wird, und daher ohne Vermittlung der Bedingungsgleichung integrirt werden kann.*

Ich will jedoch zuvor dieselbe Umformung für jedes andere Integral auf diesem Gebiete angeben. Es sei

$$\Omega = \int \frac{F(x, y)}{\Phi(x, y)} dx,$$

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

alsdann muss man, wie ich zeigen werde, wenn in $\Phi(x, y)$ der Factor $\frac{1}{2}f'(y)$ noch nicht enthalten ist, Zähler und Nenner mit demselben multipliciren, so dass

$$\Omega = \int \frac{F(x, y) \cdot \frac{1}{2}f'(y)}{\Phi(x, y)} \cdot \frac{dx}{\frac{1}{2}f'(y)}$$

entsteht. Führt man nun hier die homogenen Variabeln ein und nimmt an, dass F von der m^{ten}, Φ von der μ^{ten} Ordnung in Bezug auf die Variabeln ist, so entsteht wegen (3.)

$$(12.)\quad \Omega = \int \frac{F(x_1, x_2, x_3) \cdot \frac{1}{2}f'(x_2) \cdot x_3^{\mu}}{\Phi(x_1 x_2 x_3) x_3^{m+2}} \cdot \frac{x_3\, dx_1 - x_1\, dx_3}{\frac{1}{2}f'(x_2)} = \int \Pi(x_1, x_2, x_3) \cdot \frac{x_3\, dx_1 - x_1\, dx_3}{\frac{1}{2}f'(x_2)},$$

wo Π eine homogene gebrochene Function bedeutet, deren Zähler von der $(m+\mu+1)^{\text{ten}}$ und deren Nenner *um eine Ordnung höher*, nämlich von der $(m+\mu+2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Unter Benutzung der Gleichungen (5.), (6.), (7.), wenn man statt u überall $\frac{1}{\Pi}$ schreibt, entsteht dann endlich, wie bei (9.):

$$(13.)\qquad \Omega = \int \frac{\Pi(x_1, x_2, x_3) \cdot \Sigma \pm \xi_1 x_2\, dx_3}{f(\xi x)}.$$

Es folgt daher, *dass sämmtliche Integrale, in denen die algebraische Bedingungsgleichung $f=0$ vom zweiten Grade ist, auf die Form* (13.) *hinauskommen, in welcher Π eine homogene gebrochene Function ist, deren Zähler von einer um die Einheit niedrigeren Ordnung ist als der Nenner.*

Hieraus sieht man, dass der einfachste Fall derjenige ist, in welchem $\Pi = \frac{1}{u}$ vorausgesetzt wird, welcher also auf ϖ führt.

Es ist bemerkenswerth, dass der vorliegende Fall, wo die Bedingungsgleichung $f=0$ vom zweiten Grade, sowie derjenige, in welchem dieselbe Gleichung vom dritten Grade ist, eine Ausnahme von allen übrigen bildet. Setzt man nämlich eine Gleichung $f=0$ vom p^{ten} Grade voraus, so überzeugt man sich leicht, dass durch dieselben Umformungen Π eine gebrochene Form wird, deren Zähler um $(p-3)$ Ordnungen *höher* ist als der Nenner. Nur in dem vorliegenden Falle für $p=2$ ist der Zähler um eine Ordnung *geringer* als der Nenner und für den Fall $p=3$, den ich in der oben citirten Abhandlung bearbeitet habe, ist Zähler und Nenner von gleicher Ordnung.

Für die vorliegenden Integrale wird nun das in der Einleitung erwähnte Prinzip in der Weise zur Anwendung kommen, *dass jedes zusammengesetzte Differential in mehrere von der Form* (13.) *mit verschiedenen Factorensystemen ξ_k zerlegt wird, welche so bestimmt werden, dass ein exactes Differential entsteht.*

Ich habe diesen allgemeinen Beziehungen nur noch eine Umformung hinzuzufügen, welche ich in der Folge häufig benutzen werde. Man kann nämlich die Determinante $\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3$ mit Hülfe eines bekannten Determinantensatzes immer in eine zweigliedrige verwandeln, wenn man die drei partiellen Determinanten eines beliebigen Systemes

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

in der Weise einführt, dass man

$$(14.) \qquad \xi_1 = v_2 w_3 - v_3 w_2, \quad \xi_2 = v_3 w_1 - v_1 w_3, \quad \xi_3 = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

setzt. Es wird alsdann nach dem Determinantensatz:

$$\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3 = (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)(w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3) - (w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3)(v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3),$$

und wenn man annimmt, dass v und w homogene Functionen respective der α^{ten} und β^{ten} Ordnung sind, ferner

$$(15.) \qquad v_k = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_k}, \qquad w_k = \frac{1}{\beta} \frac{\partial w}{\partial x_k}$$

setzt, und den Satz von den homogenen Functionen berücksichtigt, schliesslich:

$$(16.) \qquad \Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3 = \frac{1}{\beta} v\, dw - \frac{1}{\alpha} w\, dv,$$

worin die angegebene Umformung enthalten ist.

Ich behandle nun zunächst das Fundamentalintegral $\varpi = \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u . f(\xi x)}$ und das unmittelbar sich demselben anschliessende $\int \frac{a^n \Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u^{n+1} f(\xi x)}$, ferner $\int \frac{a \Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u . v . f(\xi x)}$, worin a, u, v beliebige lineare Functionen sind, und gehe dann zu allgemeinen Entwicklungen über.

§. 3.

Das Fundamentalintegral ϖ.

Man verfüge über die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 so, dass $\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3$ sich nach der Formel §. 2 (16.) als zweigliedrige Determinante der beiden linearen Functionen

$$u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$
$$f(\xi x) = \tfrac{1}{2}(x_1 f'(\xi_1) + x_2 f'(\xi_2) + x_3 f'(\xi_3))$$

zusammensetzen lässt. Hierzu ist aber erforderlich, die Grössen ξ_k mit den unter §. 2 (14.) analogen Grössen nur proportional zu setzen, nämlich, wenn

γ eine noch zu bestimmende Constante ist,

$$(1.)\quad \begin{cases} \gamma\,.\,\xi_1 = \frac{1}{2}\left(u_2 f'(\xi_3) - u_3 f'(\xi_2)\right), \quad \gamma\,.\,\xi_2 = \frac{1}{2}\left(u_3 f'(\xi_1) - u_1 f'(\xi_3)\right), \\ \gamma\,.\,\xi_3 = \frac{1}{2}\left(u_1 f'(\xi_2) - u_2 f'(\xi_1)\right) \end{cases}$$

zu setzen, damit aus diesen in Bezug auf ξ_1, ξ_2, ξ_3 homogenen Gleichungen, nach Elimination derselben, noch eine Unbekannte γ zurückbleibt. Es geht dann aber die Gleichung §. 2 (16.) in

$$\gamma\,\Sigma \pm \xi_1 x_2\,dx_3 \;=\; u\,.\,df(\xi x) - f(\xi x)\,.\,du$$

über, und es wird in Folge dessen

$$\gamma\,.\,\varpi \;=\; \int \frac{u\,df(\xi x) - f(\xi x)\,du}{u\,.\,f(\xi x)},$$

welcher Ausdruck offenbar ein exactes Differential enthält. In der That folgt hieraus

$$(2.)\quad \varpi = \frac{1}{\gamma}\int \frac{d\,\frac{f(\xi x)}{u}}{\frac{f(\xi x)}{u}} = \frac{1}{\gamma}\,l\left(\frac{f(\xi x)}{u}\right) = \frac{1}{\gamma}\,l\left(\frac{x_1 f'(\xi_1) + x_2 f'(\xi_2) + x_3 f'(\xi_3)}{x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3}\right).$$

Es bleibt noch die Bestimmung der Constanten γ und der Verhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$, welche hinreichen, weil durch Division mit einer der Grössen ξ unter dem Logarithmus in (2.) nur die willkürliche Constante des Integrales geändert wird. Man kann nun die Gleichungen (1.) in eine zusammenfassen, wenn man sie mit den willkürlichen Grössen λ_1, λ_2, λ_3 multiplicirt und addirt, wodurch

$$(3.)\quad \gamma\,.\,\{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3\} \;=\; \Sigma \pm u_1\,.\,\tfrac{1}{2}f'(\xi_2)\,.\,\lambda_3$$

entsteht. Substituirt man hierin $\lambda_k = \frac{1}{2}f'(\xi_k)$, so folgt:

$$\gamma\,.\,\tfrac{1}{2}\left(\xi_1 f'(\xi_1) + \xi_2 f'(\xi_2) + \xi_3 f'(\xi_3)\right) \;=\; 0,$$

oder

$$(4.)\quad f(\xi\xi) \;=\; 0,$$

und substituirt man $\lambda_k = u_k$, so erhält man

$$(5.)\quad u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 \;=\; 0.$$

Die Gleichungen (4.) und (5.) genügen, um die Verhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ zu bestimmen, sie geben zwei Werthpaare, welche beide in den Werth für ϖ (2.) substituirt werden können. Hierdurch ist das Theorem (§. 1) erwiesen, wenn man dort noch die homogenen Variabeln d. h. $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, und $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_3}$, $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_3}$ substituirt.

Zur Bestimmung von γ sei $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3$ das zweite Werthenpaar, welches (4.) und (5.) genügt und in (3.) $\lambda_k = \frac{1}{2} f'(\eta_k)$ substituirt, dann entsteht:

$$(6.) \qquad \gamma . f(\xi\eta) = \Sigma \pm u_1 . \tfrac{1}{2} f'(\xi_2) . \tfrac{1}{2} f'(\eta_3).$$

Die Determinante rechts kann man aber auf eine bekannte Weise umformen. Man bemerke nämlich, dass die Grössen u_k ausser (5.) auch der Gleichung

$$u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + u_3\eta_3 = 0$$

genügen müssen, so dass man, wenn ϱ willkürlich ist, setzen kann:

$$(7.) \qquad \varrho . u_1 = \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2, \qquad \varrho . u_2 = \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3, \qquad \varrho . u_3 = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 .$$

Die Determinante rechts in (6.) wird aber eine Function dieser Grössen, wie man durch eine bekannte Zusammenziehung der partiellen Determinanten ersehen kann, und zwar wird sie *die zugehörige Form zu* $f(xx)$, so dass aus (6.) hervorgeht:

$$(8.) \qquad \gamma . f(\xi\eta) = \varrho . I'(uu),$$

wenn in expliciter Form geschrieben

$$I'(uu) = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)u_1^2 + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)u_2^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)u_3^2 + 2(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})u_2u_3 + 2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})u_1u_3 + 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})u_1u_2$$

gesetzt wird.

Andererseits kann man auch in Gleichung (3.), welche immer die Gleichungen (1.) vertritt, statt der Grössen u_k ihre Werthe $u_1 = \frac{1}{\varrho}(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)$ u. s. w. aus (7.) setzen, und erhält dadurch

$$\gamma(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3) = \frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix} \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 & \frac{1}{2}f'(\xi_1) & \lambda_1 \\ \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 & \frac{1}{2}f'(\xi_2) & \lambda_2 \\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 & \frac{1}{2}f'(\xi_3) & \lambda_3 \end{vmatrix},$$

was nach dem schon am Ende von §. 2 benutzten bekannten Determinantensatz in

$$\gamma(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3) = \frac{1}{\varrho}\left(f(\xi\xi)(\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \lambda_3\eta_3) - f(\xi\eta)(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3)\right)$$

übergeht, oder, weil $f(\xi\xi)$ wegen (4.) $= 0$ ist, in:

$$(9.) \qquad \gamma = -\frac{1}{\varrho} f(\xi\eta).$$

Aus (8.) und (9.) folgt nun durch Elimination von $\frac{1}{\varrho} f(\xi\eta)$:

$$(10.) \qquad \gamma^2 = -I'(uu),$$

wodurch eine ebenso einfache wie gesetzmässige Bestimmung von γ gewonnen ist.

Hieraus ergiebt sich nun

Theorem I.

Wenn man unter der Voraussetzung, dass $f(x, y) = 0$ *ist,*

$$\varpi = \int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) \cdot \frac{1}{2} f'(y)} = \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 \, dx_3}{u \cdot f(\xi x)}$$

integriren soll, so bilde man ein den Gleichungen

$$f(\xi\xi) = 0, \qquad u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$$

genügendes Werthenpaar, was durch Auflösung von zwei der folgenden drei linearen Gleichungen:

$$(11.) \quad \begin{cases} \sqrt{-I'(uu)}\,\xi_1 = u_2 f'(\xi_3) - u_3 f'(\xi_2), & \sqrt{-I'(uu)}\,\xi_2 = u_3 f'(\xi_1) - u_1 f'(\xi_3), \\ & \sqrt{-I'(uu)}\,\xi_3 = u_1 f'(\xi_2) - u_2 f'(\xi_1) \end{cases}$$

erfolgen kann, in welchen $I'(uu)$ *die zugehörige Form zu* $f(xx)$ *bedeutet; alsdann ist*

$$\varpi = \frac{1}{\sqrt{-I'(uu)}} \, l \, \frac{x_1 f'(\xi_1) + x_2 f'(\xi_2) + x_3 f'(\xi_3)}{x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3} + C.$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{-I'(uu)}$ *muss mit dem in den linearen Gleichungen* (11.) *benutzten Vorzeichen, und die in den Differentialausdruck einzuführende Wurzel der Gleichung* $f(xx) = 0$ *mit der im Integralausdruck zu wählenden übereinstimmen.*

Es ist übrigens bemerkenswerth, dass durch die Gleichungen (11.) eine ebenso symmetrische wie einfache Auflösungsart zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten gewonnen wird, von denen die eine eine allgemeine des zweiten Grades, die andere eine Gleichung des ersten Grades ist. Schreibt man vorläufig noch γ statt seines Werthes aus (10.), so sind die Gleichungen (1.) oder (11.) die folgenden:

$$(11^*.) \quad \begin{cases} 0 = \xi_1(a_{13}u_2 - a_{12}u_3 - \gamma) + \xi_2(a_{23}u_2 - a_{22}u_3) + \xi_3(a_{33}u_2 - a_{23}u_3), \\ 0 = \xi_1(a_{11}u_3 - a_{13}u_1) + \xi_2(a_{12}u_3 - a_{23}u_1 - \gamma) + \xi_3(a_{13}u_3 - a_{33}u_1), \\ 0 = \xi_1(a_{12}u_1 - a_{11}u_2) + \xi_2(a_{22}u_1 - a_{12}u_2) + \xi_3(a_{23}u_1 - a_{13}u_2 - \gamma), \end{cases}$$

durch deren Determinante, wenn sie gleich Null gesetzt wird, wieder die Gleichung (10.) zur Bestimmung von γ entsteht, wie man sich auch durch eine nachträgliche Rechnung überzeugen kann. Da diese Gleichung eine *reine* quadratische ist,

so hat man nur das Vorzeichen ihrer Lösung, nämlich von $\sqrt{-I'(uu)}$ überall zu ändern, um das zweite Werthensystem η_1, η_2, η_3 zu erhalten, welches den Gleichungen (4.) und (5.) genügt, *es dient daher zur Vervollständigung des obigen Theoremes, dass auch*

$$\varpi = -\frac{1}{\sqrt{-I(uu)}}\, l\Big(\frac{x_1 f'(\eta_1)+x_2 f'(\eta_2)+x_3 f'(\eta_3)}{x_1 u_1+x_2 u_2+x_3 u_3}\Big)+C$$

ist.

Als Beispiel sei $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$, also $f(xx)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$; dann ist $I'(uu)=-u_1^2-u_2^2+u_3^2$, also $\gamma=\sqrt{u_1^2+u_2^2-u_3^2}$; folglich, wenn $y=\sqrt{1-x^2}$ gesetzt wird, also $\frac{1}{2}f'(y)=\sqrt{1-x^2}$,

$$(12.)\quad \int\frac{dx}{(u_1 x+u_2\sqrt{1-x^2}+u_3)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2-u_3^2}}\, l\Big(\frac{x\xi_1+y\xi_2-\xi_3}{xu_1+yu_2+u_3}\Big),$$

wo ξ_1, ξ_2, ξ_3 aus zwei der folgenden Gleichungen, aus welchen durch Verbindung mit der dritten auch obiges γ entnommen werden kann, nämlich aus

$$(13.)\quad \gamma\xi_1=-u_2\xi_3-u_3\xi_2,\qquad \gamma\xi_2=u_3\xi_1+u_1\xi_3,\qquad \gamma\xi_3=u_1\xi_2-u_2\xi_1,$$

zu bestimmen sind. Dieses Beispiel ist für die Behandlung durch die gewöhnliche Theorie schon hinlänglich complicirt. Setzt man noch $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=1$, so wird $\gamma=\sqrt{-1}=i$, und aus (13.): $\xi_3=0$, $\xi_1=-\frac{\xi_2}{\gamma}=i\xi_2=i$; wenn $\xi_2=1$, also:

$$(14.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{i}\,l(xi+y)=\arcsin x.$$

Setzt man ferner $u_1=0$, $u_2=1$, $u_3=0$, dann ist $\gamma=1$, $\xi_2=0$, $\xi_1=-\xi_3$, also $\xi_1=1$, wenn $\xi_3=-1$, folglich:

$$(15.)\quad \int\frac{dx}{y\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{1-x^2}=l\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}=\tfrac{1}{2}\,l\frac{1+x}{1-x}.$$

Endlich wenn $u_1=1$, $u_2=0$, $u_3=0$ ist, wird $\gamma=1$, $\xi_1=0$, $\xi_2=\xi_3$; also wenn $\xi_3=-1$ auch $\xi_2=-1$, daher

$$(16.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = l\Big(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\Big),$$

wie es hinlänglich bekannt ist. Diese Beispiele werden zur Erläuterung der Methode hinreichen.

§. 4.

Entwicklung von $\varpi_n = \int \frac{(a_1 x + a_2 y + a_3)^n}{(u_1 x + u_2 y + u_3)^{n+1}} \frac{dx}{\frac{1}{2} f'(y)}$.

Wenn man in dem Fundamentalintegral ϖ den Nenner dahin verändert, dass man eine beliebige Potenz desselben voraussetzt, so ist man nach dem §. 2 (12.) entwickelten Princip genöthigt, um die allgemeinste Form desselben zu haben, dem Zähler eine um die Einheit niedrigere Potenz zu geben, und ich wähle als einfachste derselben die Potenz einer linearen Function. Es wird sich zeigen, dass man durch das auf diese Weise gebildete Integral, welches ich nach der Potenz im Zähler durch ϖ_n bezeichne, zur Integration aller *ganzen* Functionen von x und y gelangt, in welchen zwischen x und y die Gleichung $f(x, y) = 0$ stattfindet.

Ich werde allen zu behandelnden Integralen die im Vorigen entwickelte Transcendente ϖ in der Weise zu Grunde legen, dass ich dieselbe, *genommen mit einer passenden linearen Function*, in das Differential einführe, also, wenn u diese lineare Function ist,

$$dx = \tfrac{1}{2} f'(y) . (u_1 x + u_2 y + u_3) d\varpi$$

setze. Es ist selbstverständlich in dem vorigen Falle dieselbe lineare Function zu nehmen, welche im Nenner von ϖ_n gegeben ist, und es wird daher

$$\varpi_n = \int \left(\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{u_1 x + u_2 y + u_3} \right)^n d\varpi$$

oder, wenn man die homogenen Variabeln einführt und der Kürze halber

$$a = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

setzt,

$$(1.) \qquad \varpi_n = \int \left(\frac{a}{u} \right)^n d\varpi.$$

Um dieses Integral zu behandeln, will ich eine Operation δ einführen, welche darin besteht, dass man eine Function der Grössen u_1, u_2, u_3 nach denselben differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden a_1, a_2, a_3 substituirt; dann ist klar, dass

$$(2.) \qquad \varpi_1 = \int \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{(u_1 x + u_2 y + u_3)^2} \frac{dx}{\frac{1}{2} f'(y)} = -\delta \int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) \frac{1}{2} f'(y)} = -\delta \varpi$$

ist, ferner aus demselben Grunde:

$$\varpi_2 = \tfrac{1}{2} \delta \varpi_1, \qquad \varpi_3 = -\tfrac{1}{3} \delta \varpi_2, \qquad \ldots \qquad \varpi_n = \frac{(-1)^n \delta \varpi_{n-1}}{n},$$

folglich allgemein:

$$(3.) \qquad \varpi_n = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\delta^n \varpi,$$

wofern δ^n die $n$malige Wiederholung der Variation δ andeutet. Es handelt sich nun darum diesen Prozess auf die einfachste Weise durchzuführen, und hierzu dient das folgende Theorem:

Theorem II.

Man kann immer ϖ und $\delta\varpi$ mit solchen constanten Factoren multipliciren, dass die Summe der Producte eine algebraische Function ist, und zwar wird

$$(4.) \qquad I'(uu).\delta\varpi + I'(ua).\varpi = \frac{\Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3}{u},$$

wenn $I'(uu)$ die zugehörige Function zu $f(xx)$ ist und

$$\tfrac{1}{2}\left(a_1 I''(u_1) + a_2 I''(u_2) + a_3 I''(u_3)\right) = I'(ua),$$

$$\chi_1 = \tfrac{1}{2}f'(x_1), \qquad \chi_2 = \tfrac{1}{2}f'(x_2), \qquad \chi_3 = \tfrac{1}{2}f'(x_3)$$

gesetzt wird.

Beweis.

Nach dem Theorem I. §. 3 ist

$$\varpi = \frac{1}{\sqrt{-I'(uu)}}\, l\frac{f(\xi x)}{u},$$

also

$$\delta\varpi = l\frac{f(\xi x)}{u}.\delta\frac{1}{\sqrt{-I'(uu)}} + \frac{1}{\sqrt{-I'(uu)}}\,\delta l\frac{f(\xi x)}{u};$$

aber weil

$$\delta I'(uu) = 2I'(ua),$$

ist:

$$\delta\frac{1}{\sqrt{-I'(uu)}} = -\frac{I'(ua)}{I'(uu)\sqrt{-I'(uu)}}.$$

Setzt man noch $l\frac{f(\xi x)}{u} = \varpi\sqrt{-I'(uu)}$, so entsteht

$$\delta\varpi = -\frac{I'(ua)}{I'(uu)}\varpi + \frac{1}{\sqrt{-I'(uu)}}\,\delta l\frac{f(\xi x)}{u}$$

oder

$$I'(uu)\,\delta\varpi + I'(ua)\,\varpi = -\sqrt{-I'(uu)}\,\delta l\frac{f(\xi x)}{u}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist algebraisch, weil sie die Variation eines Logarithmus enthält, daher ist zuvörderst der erste Theil des Theoremes bewiesen.

Um aber diese algebraische Function zu finden, hat man die Constanten ξ_k als irrationale Functionen der Grössen u_k zu variiren und dann eine sehr complicirte Umformung zu machen, ich ziehe es daher vor, den Ausdruck linker Hand, nämlich

$$I'(uu)\delta\varpi + I'(ua)\varpi,$$

durch Einsetzung der betreffenden Integrale direct zu behandeln, was das Resultat unmittelbar geben wird.

Es ist wegen (2.)

$$\delta\varpi = -\varpi_1 = -\int\frac{a}{u}d\varpi,$$

folglich

$$\delta\varpi\, I'(uu) + \varpi\, I'(ua) = \int\Big(\frac{-aI(uu)}{u} + I'(ua)\Big)d\varpi = \int\frac{uI(ua) - aI(uu)}{u}d\varpi.$$

Um die rechte Seite dieser Gleichung zu integriren, wende man das in §. 2 ausgesprochene Prinzip an. Setzt man nämlich für $d\varpi$ seinen allgemeinen Werth §. 2 (11.)

$$d\varpi = \frac{\Sigma\pm\xi_1 x_2 dx_3}{u.f(\xi x)},$$

so kann man über die willkürlichen Grössen ξ_k so verfügen, dass die beiden folgenden linearen Functionen der Variabeln x_k, nämlich

$$(5.)\begin{cases} uI(ua) - aI(uu) = (u_1 I(ua) - a_1 I(uu))x_1 + (u_2 I(ua) - a_2 I(uu))x_2 + (u_3 I(ua) - a_3 I(uu))x_3, \\ f(\xi x) = \frac{1}{2}f'(\xi_1)x_1 + \frac{1}{2}f'(\xi_2)x_2 + \frac{1}{2}f'(\xi_3)x_3, \end{cases}$$

einander identisch gleich werden, wodurch

$$(6.)\qquad \delta\varpi\, I'(uu) + \varpi\, I'(ua) = \int\frac{\Sigma\pm\xi_1 x_2 dx_3}{u^2}$$

entsteht, wo noch die betreffenden Grössen ξ_k zu substituiren sind. Es geht nun aus (5.) hervor:

$$\tfrac{1}{2}f'(\xi_1) = u_1 I'(ua) - a_1 I'(uu) = \tfrac{1}{2}\{(u_1 a_2 - u_2 a_1)I''(u_2) - (u_3 a_1 - u_1 a_3)I''(u_3)\},$$

u. s. w.

oder wenn man der Kürze halber

$$(7.)\qquad u_2 a_3 - u_3 a_2 = \zeta_1, \qquad u_3 a_1 - u_1 a_3 = \zeta_2, \qquad u_1 a_2 - u_2 a_1 = \zeta_3$$

setzt:

$$(8.)\ f'(\xi_1) = \zeta_3 I''(u_2) - \zeta_2 I''(u_3),\ f'(\xi_2) = \zeta_1 I''(u_3) - \zeta_3 I''(u_1),\ f'(\xi_3) = \zeta_2 I''(u_1) - \zeta_1 I''(u_2).$$

Diese Gleichungen kann man bekanntlich dadurch auflösen, dass man, um z. B. ξ_1 zu finden, dieselben der Reihe nach mit den Coefficienten von $I''(u_1)$ multiplicirt und alle addirt u. s. w. Hierbei hebt sich, wie man bald sieht, die entstehende totale Determinante der linken Seite gegen die auf der rechten Seite befindliche, da die partiellen Determinanten von den par-

tiellen Determinanten auf den rechten Seiten die totale der linken Seite zum Factor haben, und es entsteht:

(9.) $\xi_1 = \frac{1}{2}(u_2 f'(\zeta_3) - u_3 f'(\zeta_2))$, $\xi_2 = \frac{1}{2}(u_3 f'(\zeta_1) - u_1 f'(\zeta_3))$, $\xi_3 = \frac{1}{2}(u_1 f'(\zeta_2) - u_2 f'(\zeta_1))$,

wie man auch a posteriori durch Substitution in (8.) leicht verificiren kann. Diese Werthe werden nun in $\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3$ substituirt und geben alsdann

$$\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_2 f'(\zeta_3) - u_3 f'(\zeta_2), & x_1, & dx_1 \\ u_3 f'(\zeta_1) - u_1 f'(\zeta_3), & x_2, & dx_2 \\ u_1 f'(\zeta_2) - u_2 f'(\zeta_1), & x_3, & dx_3 \end{vmatrix}$$

und daher nach dem schon öfter benutzten Determinantensatz:

$$\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3 = df(\zeta x).u - f(\zeta x).du.$$

Die Gleichung (6.) geht daher über in

$$\delta\varpi . I'(uu) + \varpi I'(ua) = \int \frac{u df(\zeta x) - f(\zeta x) du}{u^2} = \frac{f(\zeta x)}{u}.$$

Substituirt man endlich die Werthe aus (7.) zurück, und setzt noch

$$(10.) \qquad \chi_1 = \tfrac{1}{2} f'(x_1), \quad \chi_2 = \tfrac{1}{2} f'(x_2), \quad \chi_3 = \tfrac{1}{2} f'(x_3),$$

so entsteht schliesslich

$$I'(uu).\delta\varpi + I'(ua)\varpi = \frac{1}{u} \Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3,$$

was zu beweisen war.

Von diesem Theorem ausgehend gelangt man nun durch wiederholtes Variiren, indem man die Relationen:

$$\delta I'(uu) = 2I'(ua),$$
$$\delta \Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3 = \Sigma \pm a_1 a_2 \chi_3 = 0$$

berücksichtigt, allmälig zu folgenden Gleichungen:

$$(11.) \quad \begin{cases} \varpi = \varpi \\ I'(uu)\delta\varpi + I'(ua)\varpi = \frac{1}{u} \Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3, \\ I'(uu)\delta^2\varpi + 3I'(ua)\delta\varpi + I'(aa)\varpi = -\frac{a}{u^2} \Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3, \\ I'(uu)\delta^3\varpi + 5I'(ua)\delta^2\varpi + 4I'(aa)\delta\varpi = 2! \frac{a^2}{u^3} \Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ I'(uu)\delta^n\varpi + (2n-1) I'(ua)\delta^{n-1}\varpi + (n-1)^2 I'(ua)\delta^{n-2}\varpi \\ \qquad = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{a^{n-1}}{u^n} \Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3, \end{cases}$$

in welchen die letzte Gleichung durch die $(n+1)$ Methode ihre Bestätigung erhält.

Um dieselben aufzulösen, dividire man sie sämmtlich mit $I'(uu)$, und setze der Kürze halber

$$(12.) \qquad \alpha_1 = \frac{I(ua)}{I(uu)}, \qquad \alpha_2 = \frac{I(aa)}{I(uu)},$$

so dass α_1 und α_2 in Bezug auf a_1, a_2, a_3 homogene ganze Functionen von der respective ersten und zweiten Ordnung sind. Führt man alsdann die Multiplicatoren λ_n, λ_{n-1}, λ_{n-2}, ... λ_1 ein, welche den Gleichungen

$$(13.) \quad \begin{cases} \lambda_n + \alpha_1\lambda_{n-1} + \alpha_2\lambda_{n-2} = 0, \\ \lambda_{n-1} + 3\alpha_1\lambda_{n-2} + 4\alpha_2\lambda_{n-2} = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_3 + (2n-5)\alpha_1\lambda_2 + (n-2)^2\alpha_2\lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 + (2n-3)\alpha_1\lambda_1 + (n-1)^2\alpha_2 = 0, \\ \lambda_1 + (2n-1)\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

genügen, und multiplicirt mit denselben der Reihe nach die mit $I'(uu)$ dividirten Gleichungen (11.), so giebt die Summe die Gleichung:

$$\delta^{(n)}\varpi = \lambda_n\varpi + \left\{\lambda_{n-1} - \frac{a}{u}\lambda_{n-2} + 2!\left(\frac{a}{u}\right)^2\lambda_{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{a}{u}\right)^{n-1}\right\}\frac{\Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3}{u.I(uu)},$$

in welcher die Multiplicatoren λ_k nur noch Constanten sind.

Wegen (3.) war aber $\varpi_n = \frac{(-1)^n}{n!}\delta^n\varpi$, daher folgt, nach leichter Reduction:

$$(14.) \quad \begin{cases} \varpi_n = \frac{(-1)^n\lambda_n}{n!}\varpi - \left\{\frac{1}{n}\left(\frac{a}{u}\right)^{n-1} - \frac{\lambda_1}{n(n-1)}\left(\frac{a}{u}\right)^{n-2}\right. \\ \qquad \left. + \frac{\lambda_2}{n(n-1)(n-2)}\left(\frac{a}{u}\right)^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\lambda_{n-1}}{n!}\right\}\frac{\Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3}{u.I(uu)}, \end{cases}$$

also:

Theorem III.

Das Integral

$$\varpi_n = \int\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{u_1x + u_2y + u_3}\right)^n d\varpi$$

besteht aus einem einzigen Logarithmus einer algebraischen Function und zwar dem in ϖ enthaltenen, multiplicirt mit einer Constanten, und überdies aus einer algebraischen Function, welche in Bezug auf den Nenner $u_1x + u_2y + u_3$ des gegebenen Integrales eine nach negativen Potenzen fortschreitende endliche Reihe bildet, deren Coefficienten ganze Functionen der Variabeln sind.

Was die Constanten λ_k anbetrifft, so bezeichne man mit $\gamma_m^{(k)}$ *numerische* Coefficienten, deren Bedeutung gleich ersichtlich wird, dann folgt aus (13.):

$$\lambda_1 = \gamma_0^{(1)}\alpha_1 = -(2n-1)\alpha_1,$$
$$\lambda_2 = \gamma_0^{(2)}\alpha_1^2 + \gamma_1^{(2)}\alpha_2 = (2n-1)(2n-3)\alpha_1^2 - (n-1)^2\alpha_2,$$

u. s. w.

und allgemein, wie leicht geschlossen werden kann,

$$(15.) \qquad \lambda_k = \sum_{m=0}^{m \leqq \frac{1}{2}k} \gamma_m^{(k)} \alpha_1^{k-2m} \alpha_2^m,$$

wo der obere Index k von $\gamma_m^{(k)}$ als Index des zu bestimmenden λ_k constant ist. Die Zahlencoefficienten $\gamma_m^{(k)}$ bilden combinatorische Aggregate, deren allgemeine Aufstellung wegen ihrer unvermeidlichen Complication keinen besonderen Werth hat, da die Recursionsformel, welche das System (13.) bietet, in jedem gegebenen Falle sofort zum Ziele führt; indessen kann man durch Substitution von (15.) in (13.) leicht die Gleichungen (13.) auf rein numerische reduciren. Da ich aus dem angegebenen Grunde hier nicht näher darauf eingehe, so will ich eine Umformung angeben, welche die Bestimmung der λ_k erleichtert und aus anderen Rücksichten eine Bedeutung hat. Es besteht diese Umformung darin, dass man statt der Constanten λ andere einführt, welche, durch μ bezeichnet, auf folgende Weise definirt werden:

$$-\frac{\lambda_1}{n} = \mu_1, \quad \frac{\lambda_2}{n(n-1)} = \mu_2, \quad -\frac{\lambda_3}{n(n-1)(n-2)} = \mu_3, \quad \ldots \quad \frac{(-1)^n \lambda_n}{n!} = \mu_n.$$

Substituirt man dieselben in (14.), so ergiebt sich:

$$(16.) \quad \begin{cases} \varpi_n = \mu_n \varpi - \left\{ \frac{1}{n}\left(\frac{a}{u}\right)^{n-1} + \frac{\mu_1}{n-1}\left(\frac{a}{u}\right)^{n-2} + \frac{\mu_2}{n-2}\left(\frac{a}{u}\right)^{n-3} + \cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\mu_{n-2}}{2}\left(\frac{a}{u}\right) + \frac{\mu_{n-1}}{1} \right\} \frac{\Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3}{u\Gamma(uu)} \end{cases}$$

und es werden die Gleichungen (13.) zur Bestimmung der neuen Constanten μ in folgende sich verwandeln:

$$(17.) \quad \begin{cases} \mu_1 - \frac{2n-1}{n}\alpha_1 = 0, \\ \mu_2 - \frac{2n-3}{n-1}\mu_1\alpha_1 + \frac{n-1}{n}\alpha_2 = 0, \\ \mu_3 - \frac{2n-5}{n-2}\mu_2\alpha_1 + \frac{n-2}{n-1}\mu_1\alpha_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{n-1} - \frac{3}{2}\mu_{n-2}\alpha_1 + \frac{2}{3}\mu_{n-3}\alpha_2 = 0, \\ \mu_n - \mu_{n-1}\alpha_1 + \mu_{n-2}\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

welche die Quadrate der natürlichen Zahlen nicht mehr enthalten, aber dafür in der Auflösung numerische Brüche als Coefficienten liefern, während (13.) ganzzahlige Coefficienten giebt.

Ich werde in der Folge beide Systeme anwenden und bemerke nur noch, dass, wenn man die Constanten λ_k und μ_k direct in Functionen der Grössen a_1, a_2, a_3 ausdrückt, sich wegen (12.) aus (15.)

$$(18.)\quad \lambda_k = \Sigma \gamma_m^k \frac{\Gamma^{k-2m}(ua)\,\Gamma^m(aa)}{\Gamma^{k-m}(uu)}, \quad \mu_k = (-1)^k . n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,\lambda_k$$

ergiebt, folglich der Satz:

Die Constanten λ_k und μ_k sind in Bezug auf die Grössen a_1, a_2, a_3 ganze homogene Functionen der k^{ten} Ordnung.

Zum Abschluss dieses Paragraphen will ich noch die allgemeinen Werthe der ersten vier Functionen ϖ_k in expliciten Formen hinschreiben, wie sie sich unmittelbar aus (13.), (14.) oder (16.), (17.) und (12.) ergeben:

$$(19.)\quad \begin{cases} \varpi_1 = \int \frac{a\,d\varpi}{u} = \frac{\varpi\,\Gamma(ua)}{\Gamma(uu)} - \frac{\Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3}{u.\Gamma(uu)}, \\ \varpi_2 = \int \frac{a^2 d\varpi}{u^2} = \frac{\varpi(3\Gamma^2(ua) - 2\Gamma(aa)\Gamma(uu))}{2\Gamma^2(uu)} - \left(\frac{1}{2}\frac{a}{u} + \frac{3}{2}\frac{\Gamma(ua)}{\Gamma(uu)}\right)\frac{\Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3}{u.\Gamma(uu)}, \\ \varpi_3 = \int \frac{a^3 d\varpi}{u^3} = \varpi\left(\frac{5\Gamma^3(ua) - 3\Gamma(ua)\Gamma(aa)\Gamma(uu)}{2\Gamma^3(uu)}\right) \\ \qquad - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{a}{u}\right)^2 + \frac{5}{6}\frac{\Gamma(ua)}{\Gamma(uu)}\frac{a}{u} + \frac{15\Gamma^2(ua) - 4\Gamma(aa)\Gamma(uu)}{6\Gamma^2(uu)}\right)\frac{\Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3}{u.\Gamma(uu)}, \\ \varpi_4 = \int \frac{a^4 d\varpi}{u^4} = \varpi\left(\frac{35\Gamma^4(ua) - 30\Gamma^2(ua)\Gamma(aa)\Gamma(uu) + 3\Gamma^2(aa)\Gamma^2(uu)}{8\Gamma^4(uu)}\right) \\ \qquad - \left(\frac{1}{4}\left(\frac{a}{u}\right)^3 + \frac{7}{12}\frac{\Gamma(ua)}{\Gamma(uu)}\left(\frac{a}{u}\right)^2 + \frac{35\Gamma^2(ua) - 9\Gamma(aa)\Gamma(uu)}{24\Gamma^2(uu)}\frac{a}{u}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{35\Gamma^2(ua) - 55\Gamma(ua)\Gamma(aa)\Gamma(uu)}{24\Gamma^3(uu)}\right)\frac{\Sigma \pm a_1 u_2 \chi_3}{u.\Gamma(uu)}. \end{cases}$$

§. 5.

Specielle Fälle von ϖ_n.

Die vorstehenden Entwicklungen bieten in zwei speciellen Fällen, welche aber immer noch sehr allgemein sind, wesentliche Vereinfachungen dar, welche ich im Folgenden entwickeln will.

I) Es sei $\alpha_1 = 0$, was eine Relation zwischen den Constanten u_k und a_k, nämlich

$$\Gamma(ua) = u_1\Gamma'(a_1) + u_2\Gamma''(a_2) + u_3\Gamma''(a_3) = 0$$

zur Folge hat. Benutzt man hier die Gleichungen §. 4 (17.), so sieht man sofort, dass

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_5 = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

ist, und

$$\mu_2 = -\frac{n-1}{n}\alpha_2, \quad \mu_4 = \frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)n}\alpha_2^2, \quad \mu_6 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)}{(n-4)(n-2)n}\alpha_2^3, \quad \text{u. s. w.}$$

Beachtet man noch, dass wegen §. 4 (12.) $\frac{\Gamma(aa)}{\Gamma(ua)} = \alpha_2$ ist, so folgt aus §. 4 (16.), *dass jedesmal, wenn die Relation* $u_1\Gamma''(a)_1 + u_2\Gamma'(a_2) + u_3\Gamma''(a_3) = 0$ *stattfindet, für ein gerades n*

$$(1^a.)\left\{\begin{aligned}\int\frac{(a_1x+a_2y+a_3)^n}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+1}}\,\frac{dx}{\frac{1}{2}f'(y)} &= (-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots.n}\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}n}(aa)}{\Gamma^{\frac{1}{2}n}(uu)}\varpi\\ -\Big\{\Big(\frac{a}{u}\Big)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\Big(\frac{a}{u}\Big)^{n-3}\frac{\Gamma(aa)}{(n-2)\Gamma(uu)} + \frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)n}\Big(\frac{a}{u}\Big)^{n-5}\frac{\Gamma^2(aa)}{(n-4)\Gamma^2(uu)}&\\ +\cdots+(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{3.5\ldots n-1}{4.6\ldots n}\frac{a}{u}\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}(n-2)}(aa)}{2\Gamma^{\frac{1}{2}(n-2)}(uu)}\Big\}\frac{\Sigma\pm u_1a_2\chi_3}{u.\Gamma(uu)}&\end{aligned}\right.$$

und für ein ungerades n

$$(1^b.)\left\{\begin{aligned}\int\frac{(a_1x+a_2y+a_3)^n}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+1}}\,\frac{dx}{\frac{1}{2}f'(y)} &= -\Big\{\Big(\frac{a}{u}\Big)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\Big(\frac{a}{u}\Big)^{n-3}\frac{\Gamma(aa)}{(n-2)\Gamma(uu)}+\cdots\\ +(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{2.4.6\ldots n-1}{3.5.7\ldots.n}\Big(\frac{a}{u}\Big)^0\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}(n-1)}(aa)}{\Gamma^{\frac{1}{2}(n-1)}(uu)}\Big\}\frac{\Sigma\pm u_1a_2\chi_3}{u.\Gamma(uu)}&\end{aligned}\right.$$

ist. Das Glied, welches in ϖ multiplicirt ist, geht aus $(1^b.)$ fort, weil sein Coefficient einen ungeraden Index hat. Der speciellste Fall hiervon bietet sich dar, wenn $f(xy) = x^2+y^2-1$ und $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=1$, also $\varpi = \arcsin x$ ist (§. 3 (14.)). Da alsdann $\Gamma'(uu) = -u_1^2-u_2^2+u_3^2 = +1$, $\Gamma'(ua) = -(a_1u_1+a_2u_2)+a_3u_3 = a_3$ ist, so erfordert die Relation zwischen a und u $a_3=0$ und $\Gamma'(aa) = -(a_1^2+a_2^2)$, daher wird

$$\frac{1}{u}\Sigma\pm u_1a_2\chi_3 = \frac{\frac{1}{2}a_1f'(x_2)-\frac{1}{2}a_2f'(x_1)}{x_3} = a_1y-a_2x$$

und

$$\int\frac{(a_1x+a_2\sqrt{1-x^2})^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3\ldots n-1}{2.4\ldots.n}(a_1^2+a_2^2)^{\frac{1}{2}n}\arcsin x$$

$$-(a_1\sqrt{1-x^2}-a_2x)\Big(\frac{(a_1x+a_2\sqrt{1-x^2})^{n-1}}{n}+\frac{n-1}{n}\frac{(a_1x+a_2\sqrt{1-x^2})^{n-3}}{n-2}(a_1^2+a_2^2)+\cdots$$

$$+\frac{3.5\ldots n-1}{4.6\ldots.n}\frac{(a_1x+a_2\sqrt{1-x^2})}{2}(a_1^2+a_2^2)^{\frac{1}{2}(n-2)}\Big)$$

für ein gerades n, für ein ungerades hat man die $(1^b.)$ entsprechende Aenderung zu machen. Specialisirt man diese Formel noch weiter, so gelangt man mit $a_2=0$, $a_1=1$ zu der bekannten Formel in den Lehrbüchern der Integralrechnung.

II) Es sei $\alpha_2=0$, d. h. $I'(aa)=0$, also die Bedingung eingeführt, dass die lineare Gleichung $a=0$ mit der Gleichung $f(x,y)=0$ ein Paar zusammenfallende Wurzeln gemein hat. Die Gleichungen §. 4 (17.) gehen alsdann über in

$$\mu_1=\frac{2n-1}{n}\alpha_1,\quad \mu_2=\frac{(2n-3)(2n-1)}{(n-1)n}\alpha_1^2,\quad \mu_3=\frac{(2n-5)(2n-3)(2n-1)}{(n-2)(n-1)n}\alpha_1^3,\quad \text{u. s. w.}$$

und geben, weil $\alpha_1=\dfrac{\Gamma(ua)}{\Gamma(uu)}$ ist, *dass, unter der Bedingung* $I'(aa)=0$,

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}\int\frac{(a_1x+a_2y+a_3)^n}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+1}}\,\frac{dx}{\frac{1}{2}f'(y)} &= \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots.\ n}\,\frac{\Gamma^n(ua)}{\Gamma^n(uu)}\,\varpi\\ -\Big\{\frac{1}{n}\Big(\frac{a}{u}\Big)^{n-1}+\frac{2n-1}{n}\Big(\frac{a}{u}\Big)^{n-1}\frac{\Gamma(ua)}{(n-1)\Gamma(uu)}+\frac{(2n-3)(2n-1)}{n-1.n}\frac{\Gamma^2(ua)}{(n-2)\Gamma^2(uu)}\Big(\frac{a}{n}\Big)^{n-3}&\\ +\cdots+\frac{3.5\ldots 2n-1}{2.3\ldots.\ n}\,\frac{\Gamma^{n-1}(ua)}{\Gamma^{n-1}(uu)}\Big(\frac{a}{u}\Big)^0\Big\}\,\frac{\Sigma\pm u_1a_2\chi_3}{u.\Gamma(uu)}&\end{aligned}\right.$$

wird, ohne Unterscheidung ob n gerade oder ungerade ist.

Setzt man $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, d. h. $I'(ua)=0$ und $I'(aa)=0$, so entsteht

$$(3.)\quad \int\frac{(a_1x+a_2y+a_3)^n}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+1}}\,\frac{dx}{\frac{1}{2}f'(y)}=-\frac{1}{n}\,\frac{a^{n-1}\Sigma\pm u_1a_2\chi_3}{u^n.\Gamma(uu)},$$

da alle übrigen Glieder fortfallen.

§. 6.

Integration der ganzen Functionen von x und y.

Die Formel für das Integral ϖ_n §. 4 (14.) zeigt, dass jedes λ_k sich in eine ganze Function der Constanten a_1, a_2, a_3 multiplicirt vorfindet, welche in Bezug auf dieselbe von der $(n-k)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Nach §. 4 (18.) ist aber λ_k selbst eine ganze homogene Function der k^{ten} Ordnung in Bezug auf dieselben Grössen, folglich ist ϖ_n *eine homogene ganze Function der Constanten* a_1, a_2, a_3 *und von der* n^{ten} *Ordnung in Bezug auf dieselben.* Aus diesem Grunde kann man sowohl im Differentialausdruck von ϖ_n, welcher im Zähler diese Constanten ebenfalls von der n^{ten} Ordnung enthält, als auch in dem Werthe §. 4 (14.) desselben statt der Potenzen und Producte $a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma$ von der n^{ten} Ordnung (wo $\alpha+\beta+\gamma=n$ ist) die entsprechenden Coefficienten einer beliebigen homogenen Function der n^{ten} Ordnung der Grössen x_1, x_2, x_3 setzen, ohne dass die Gültigkeit der Gleichung §. 4 (14.) aufhört.

Nimmt man nun an, dass diese homogene ganze Function der n^{ten} Ordnung

$$(1.)\quad F(x_1,x_2,x_3)=x_3^nF(x,y)$$

sei, und bemerkt, dass durch die angegebene Substitution

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^n = F(x_1, x_2, x_3)$$

wird, so folgt, *dass in symbolischer Form:*

$$(2.)\quad \int \frac{F(x,y)\,dx}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+1}\frac{1}{2}f'(y)} = \int \frac{F(x_1,x_2,x_3)}{(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^n}\,d\varpi = \varpi_n$$

ist, d. h. dass das Integral erhalten wird, wenn man in ϖ_n statt der Potenzen und Producte der n^{ten} Ordnung $a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma$ die entsprechenden Coefficienten von $F(x_1, x_2, x_3)$ substituirt.

Durch diese Substitution gehen die Constanten λ_k, §. 4 (18.) in zusammengesetzte simultane Invarianten, Covarianten und Zwischenformen der drei Functionen F, f, u über, und man erfährt ihre Zusammensetzung durch die Gleichungen §. 4 (13.), so dass hier die symbolische Darstellungsweise gleichzeitig die genuine Methode zur Entwicklung der schliesslichen Resultate wird, auf ähnliche Weise, wie ich sie vielfach in meiner Abhandlung „über die homogenen Functionen dritter Ordnung“ dieses Journal Bd. 55, p. 97 benutzt habe.

Wenn das Integral einer ganzen Function von x und y verlangt wird, so versteht man gewöhnlich darunter $\int F(x,y)\,dx$, man muss aber beachten, dass durch Einführung der homogenen Variabeln

$$(3.)\quad \int F(x,y)\,dx = \int \frac{F(x_1,x_2,x_3).(x_3dx_1-x_1dx_3)}{x_3^{n+2}}$$

wird, also dass der Differentialausdruck einen Nenner erhält, und zwar die $(n+2)^{te}$ Potenz einer linearen Function, wenn F von der n^{ten} Ordnung ist. Nach den bisherigen Entwicklungen hat sich aber herausgestellt, dass die Formeln symmetrisch und nicht complicirter werden, wenn man die Potenz einer *beliebigen* linearen Function $u_1x+u_2y+u_3$ statt x_3 im Nenner voraussetzt, daher wird

$$(4.)\quad \int \frac{F(x,y).dx}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+2}}$$

dasjenige Integral sein, welches wir hier behandeln, wenn eine ganze Function integrirt werden soll. Die Rückkehr zur Form (3.) hat keine Schwierigkeit, indem man immer $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=1$ setzen kann, das Endresultat wird aber dadurch um kein wesentliches Glied kürzer.

Um nun (4.) zu entwickeln, führe man statt dx das Differential $d\varpi$ ein, vermittelst der oft benutzten Gleichung:

$$dx = \tfrac{1}{2}f'(y).(u_1x+u_2y+u_3)\,d\varpi,$$

aber genommen mit *derselben* linearen Function, welche im Nenner von (4.) sich befindet, dann entsteht in symbolischer Form:

$$(5.)\quad \int \frac{F(x,y).dx}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+2}} = \int \frac{F(x,y).\frac{1}{2}f'(y).d\varpi}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+1}} = \varpi_{n+1},$$

wo man in ϖ_{n+1} statt der Potenzen und Produkte $a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma$ der jetzt $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung die entsprechenden Coefficienten der homogenen Function $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu substituiren hat, welche durch Multiplication von F mit $\frac{1}{2}f'(y)$ entsteht. Vergleicht man dieses Resultat mit (2.), so wird klar, dass durch die Abwesenheit des Nenners $\frac{1}{2}f'(y)$ in (4.) das zu benutzende ϖ_k um eine Ordnung höher genommen werden muss.

Man kann die Berechnung des Productes von F mit $\frac{1}{2}f'(y)$ vermeiden und gleichzeitig ein noch allgemeineres Resultat erzielen, wenn man für $d\varpi$ seinen allgemeineren mit den beliebigen Multiplicatoren ξ_k behafteten Werth §. 2 (8.) nimmt, nämlich

$$d\varpi = \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u.f(\xi x)},$$

und gleichzeitig statt $\frac{1}{2}f'(y)$ auf der rechten Seite von (5.) auch $f(\xi x)$ setzt, alsdann ist

$$(6.)\quad \int \frac{F(x_1,x_2,x_3).f(\xi x)}{(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^{n+1}}\,d\varpi = \int \frac{F(x_1,x_2,x_3)}{(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^{n+2}}\,\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3.$$

oder wenn man die Homogenität aufhebt,

$$(7.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{F(x_1,x_2,x_3).f(\xi x)}{(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^{n+1}}\,d\varpi \\ \displaystyle= \int \frac{F(x,y)}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+2}}\left(-\xi_1 dy+\xi_2 dx+\xi_3(xdy-ydx)\right) \\ \displaystyle= -\xi_1\int \frac{F(x,y)\,dy}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+2}} + \xi_2\int \frac{F(x,y)\,dx}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+2}} \\ \qquad\qquad \displaystyle+\xi_3\int \frac{(xdy-ydx)\,F(x,y)}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+2}}. \end{cases}$$

Es wird also durch die Behandlung der linken Seite von (7.) nicht allein der Coefficient von ξ_2, welcher das verlangte Integral (5.) ist, sondern es werden auch die beiden anderen Integrale, deren Bedeutung ersichtlich ist, aus derselbigen Quelle entnommen, ohne dass die Rechnung irgend wie wesentlich complicirter wird.

Setzt man vorläufig $(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^n$ statt $F(x_1,x_2,x_3)$, so überzeugt man sich zunächst, dass durch totale Differentiation nach a_1, a_2, a_3,

$$\tfrac{1}{2}f'(\xi_1)\cdot\frac{d\varpi_{n+1}}{da_1}+\tfrac{1}{2}f'(\xi_2)\cdot\frac{d\varpi_{n+1}}{da_2}+\tfrac{1}{2}f'(\xi_3)\cdot\frac{d\varpi_{n+1}}{da_3}$$

$$=(n+1)\int\frac{(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^n\,(x_1\tfrac{1}{2}f'(\xi_1)+x_2\tfrac{1}{2}f'(\xi_2)+x_3\tfrac{1}{2}f'(\xi_3))}{(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^{n+1}}\,d\varpi$$

wird, wenn man bedenkt, dass definitionsmässig

$$\varpi_{n+1}=\int\frac{(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^{n+1}}{(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^{n+1}}\,d\varpi$$

ist.

Man setze nun der Kürze halber

$$(8.)\qquad \vartheta_1=\frac{d\varpi_{n+1}}{da_1},\qquad \vartheta_2=\frac{d\varpi_{n+1}}{da_2},\qquad \vartheta_3=\frac{d\varpi_{n+1}}{da_3},$$

so folgt aus obiger Gleichung

$$(9.)\qquad \int\frac{a^n.f(\xi x)\,d\varpi}{u^{n+1}}=\frac{1}{n+1}f(\xi\vartheta)=\frac{1}{n+1}\left(\xi_1\cdot\tfrac{1}{2}f'(\vartheta_1)+\xi_2\cdot\tfrac{1}{2}f'(\vartheta_2)+\xi_3\cdot\tfrac{1}{2}f'(\vartheta_3)\right).$$

Wenn man jetzt die symbolische Substitution vollzieht, so ist durch denselben Werth auch (7.) gefunden, also mit Rücksicht auf die rechte Seite von (7.):

$$(10.)\qquad \begin{cases} -\int\dfrac{F(x,y)\,dy}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+2}}=\dfrac{1}{n+1}\tfrac{1}{2}f'(\vartheta_1)=\dfrac{1}{n+1}(a_{11}\vartheta_1+a_{12}\vartheta_2+a_{13}\vartheta_3), \\ \int\dfrac{F(x,y)\,dx}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+2}}=\dfrac{1}{n+1}\tfrac{1}{2}f'(\vartheta_2)=\dfrac{1}{n+1}(a_{12}\vartheta_1+a_{22}\vartheta_2+a_{23}\vartheta_3), \\ \int\dfrac{F(x,y)(x\,dy-y\,dx)}{(u_1x+u_2y+u_3)^{n+2}}=\dfrac{1}{n+1}\tfrac{1}{2}f'(\vartheta_3)=\dfrac{1}{n+1}(a_{13}\vartheta_1+a_{23}\vartheta_2+a_{33}\vartheta_3), \end{cases}$$

in schliesslicher Endform, wovon die zweite Gleichung das ursprünglich verlangte Resultat giebt. Wenn der Nenner des Integrals u^{n+2} nicht erforderlich ist, so kann man die Substitution $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=1$, in ϖ_{n+1} ausführen, bevor man die Grössen ϑ nach (8.) bildet.

Hiernach erhält man aus (9.) folgende specielle Integrale, in welchen der Kürze halber

$$(11.)\qquad (aaa)=\Sigma\pm a_{11}a_{22}a_{33},\qquad (u\xi)=u_1\xi_1+u_2\xi_2+u_3\xi_3$$

gesetzt ist, und wie schon angegeben $\chi_k=\frac{1}{2}f'(x_k)$, und ebenso $\Xi_k=\frac{1}{2}f'(\xi_k)$, $U_k=\frac{1}{2}I''(u_k)$, $A_k=\frac{1}{2}I''(a_k)$ geschrieben wird, wenn man überdies die aus der Theorie der homogenen Functionen zweiten Grades bekannten Gleichungen

$$(12.)\qquad U_1\Xi_1+U_2\Xi_2+U_3\Xi_3=(u\xi)(aaa),$$

$$(13.)\qquad \begin{vmatrix} u_1, & \Xi_1, & \chi_1 \\ u_2, & \Xi_2, & \chi_2 \\ u_3, & \Xi_3, & \chi_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \xi_1, & x_1, & U_1 \\ \xi_2, & x_2, & U_2 \\ \xi_3, & x_3, & U_3 \end{vmatrix}$$

berücksichtigt:

$$\text{(I.)}\quad \int \frac{f(\xi x)\,d\varpi}{u} = \frac{\varpi(aaa)(u\xi)}{\Gamma(uu)} - \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 U_3}{u\Gamma(uu)},$$

$$\text{(II.)}\quad \int \frac{af(\xi x)\,d\varpi}{u^2} = \varpi(aaa)\frac{3(u\xi)\Gamma(ua)-2(a\xi)\Gamma(uu)}{2\Gamma^2(uu)} - \left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{u}\right)+\tfrac{3}{2}\frac{\Gamma(ua)}{\Gamma(uu)}\right)\frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 U_3}{2u\Gamma(uu)}$$
$$-\left(\tfrac{1}{2}\frac{f(\xi x)}{u}+\tfrac{3}{2}\frac{(u\xi)(aaa)}{\Gamma(uu)}\right)\frac{\Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3}{2u\Gamma(uu)},$$

$$\text{(III.)}\int \frac{a^2 f(\xi x)\,d\varpi}{u^3} = \varpi(aaa)\frac{(u\xi)(5\Gamma^2(ua)-\Gamma(uu)\Gamma(aa))-2(a\xi)\Gamma(ua)\Gamma(uu)}{2\Gamma^3(uu)}$$
$$-\left(\tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{u}\right)^2+\tfrac{5}{6}\left(\frac{a}{u}\right)\frac{\Gamma(ua)}{\Gamma(uu)}+\frac{15\Gamma^2(ua)-4\Gamma(uu)\Gamma(aa)}{6\Gamma^2(uu)}\right)\frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 U_3}{3u\Gamma(uu)}$$
$$-\left(\tfrac{2}{3}\frac{af(\xi x)}{u^2}+\tfrac{5}{6}\frac{(u\xi)a(aaa)+\Gamma(ua)f(\xi x)}{u\Gamma(uu)}\right.$$
$$\left.+\frac{(15\Gamma(ua)(u\xi)-4(a\xi)\Gamma(uu))(aaa)}{3\Gamma(uu)^2}\right)\frac{\Sigma \pm u_1 a_2 \chi_3}{3u\Gamma(uu)}.$$

Setzt man in (III.) $a_k a_\lambda = b_{k\lambda}$, so geht a^2 über in eine zweite homogene Function zweiten Grades:

$$a^2 = \Sigma b_{k\lambda} x_k x_\lambda = F(xx),$$

und es wird $\int \frac{\Sigma b_{k\lambda} x_k x_\lambda f(\xi x)\,d\varpi}{u^3}$ dadurch erhalten. Um die symbolische Substitution rechts auszuführen, sollen folgende dadurch entstehende Invarianten, zugehörige und Zwischenformen wie folgt geschrieben werden:

$\Gamma(uu) = \Sigma \alpha_{k\lambda} u_k u_\lambda$, $(aab) = \Sigma \alpha_{k\lambda} b_{k\lambda}$, $\varphi(uu) = \Sigma b_{k\lambda} U_k U_\lambda$, $\psi(ux) = \Sigma b_{k\lambda} x_k U_\lambda$,

ferner:

$$\psi'(x_k) = \psi_k, \qquad X_k = \tfrac{1}{2}\frac{dF}{dx_k},$$

alsdann folgt aus (III.):

$$\text{(IV.)}\int \frac{\Sigma b_{k\lambda} x_k x_\lambda \cdot f(\xi x)}{u^3}\,d\varpi = \varpi(aaa)\frac{(u\xi)(5\varphi(uu)-\Gamma(uu)(aab))-2\Gamma(uu)\psi(u\xi)}{2\Gamma^3(uu)}$$
$$-\left(\tfrac{1}{3}\frac{\Sigma b_{k\lambda} x_k x_\lambda}{u^2}+\tfrac{5}{6}\frac{\psi(ux)}{u\Gamma(uu)}+\frac{15\varphi(uu)-4\Gamma(uu)(aab)}{6\Gamma^2(uu)}\right)\frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 U_3}{3u\Gamma(uu)}$$
$$-\tfrac{2}{9}\frac{\Sigma u_1 X_2 \chi_3 \cdot f(\xi x)}{u^3\Gamma(uu)} - \tfrac{5}{18}\frac{(u\xi)\Sigma \pm u_1 X_2 \chi_3 (aaa)+\Sigma \pm u_1 \psi_2 \chi_3 \cdot f(\xi x)}{u^2\Gamma^2(uu)}$$
$$-\frac{(15(u\xi)\Sigma \pm u_1 \psi_2 \chi_3 - 4\Gamma(uu)\Sigma \pm u_1 \Xi_2 \chi_3)(auu)}{9u\Gamma^3(uu)}.$$

Schreibt man $F(x, y)$ statt $\frac{1}{x_3^2}\Sigma b_{k\lambda} x_k x_\lambda$, so findet man die drei in

$$\int \frac{(-\xi_1 dy + \xi_2 dx + \xi_3(x dy - y dx))F(x,y)}{(u_1 x + u_2 y + u_3)^4}$$

enthaltenen Integrale, wenn man in (IV.) die drei Coefficienten von ξ_1, ξ_2, ξ_3, einzeln absondert.

§. 7.

Entwicklung von $\int \frac{(a_1x+a_2y+a_3)}{(u_1x+u_2y+u_3)(v_1x+v_2y+v_3)} \frac{dx}{\frac{1}{2}f'(y)} = \int \frac{a\,\Sigma\pm\xi_1 x_2\,dx_3}{u\,.\,v\,.\,f(\xi x)}$.

Die Uebereinstimmung vorstehender Differentialausdrücke folgt aus §. 2 und es ist nur hervorzuheben, dass mit der Entwicklung des vorgelegten Integrales zugleich

$$\int \frac{dx}{(u_1x+u_2y+u_3)(v_1x+v_2y+v_3)}$$

ermittelt ist, mit welchem es, wenn a_1, a_2, a_3 respective den Coefficienten a_{12}, a_{22}, a_{23} von $\frac{1}{2}f'(y)$ gleichgesetzt werden, zusammenfällt. Die Grössen a, u, v in dem ersten Integrale haben die Bedeutung

$$(1.)\quad \begin{cases} a = a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3, \\ u = u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3, \\ v = v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3. \end{cases}$$

Man denke sich aus diesen Gleichungen x_1, x_2, x_3 in Functionen von a, u, v ausgedrückt, und schreibe die Auflösung wie folgt:

$$(2.)\quad \begin{cases} x_1\Sigma\pm a_1u_2v_3 = a\eta_1+u\zeta_1+v\vartheta_1, \\ x_2\Sigma\pm a_1u_2v_3 = a\eta_2+u\zeta_2+v\vartheta_2, \\ x_3\Sigma\pm a_1u_2v_3 = a\eta_3+u\zeta_3+v\vartheta_3, \end{cases}$$

so dass

$$(3.)\quad \eta_1 = u_2v_3-u_3v_2, \quad \zeta_1 = v_2a_3-v_3a_2, \quad \vartheta_1 = a_2u_3-a_3u_2$$

u. s. w.

ist, dann kann man durch Substitution der Werthe von x_k aus (2.) in

$$f(\xi x) = \tfrac{1}{2}\left(x_1f'(\xi_1)+x_2f'(\xi_2)+x_3f'(\xi_3)\right)$$

die folgende identische Gleichung ableiten:

$$\Sigma\pm a_1u_2v_3\,.\,f(\xi x) = af(\xi\eta)+uf(\xi\zeta)+vf(\xi\vartheta)$$

und demnach a ausdrücken durch

$$(4.)\quad a = -u\cdot\frac{f(\xi\zeta)}{f(\xi\eta)}-v\cdot\frac{f(\xi\vartheta)}{f(\xi\eta)}+\frac{\Sigma\pm a_1u_2v_3}{f(\xi\eta)}\cdot f(\xi x).$$

Substituirt man dies in das gesuchte Integral, so entsteht

$$\int\frac{a\,\Sigma\pm\xi_1x_2\,dx_3}{u\,.\,v\,.\,f(\xi x)} = -\frac{f(\xi\zeta)}{f(\xi\eta)}\int\frac{\Sigma\pm\xi_1x_2\,dx_3}{v\,.\,f(\xi x)}-\frac{f(\xi\vartheta)}{f(\xi\eta)}\int\frac{\Sigma\pm\xi_1x_2\,dx_3}{u\,.\,f(\xi x)}$$
$$+\frac{\Sigma\pm a_1u_2v_3}{f(\xi\eta)}\int\frac{\Sigma\pm\xi_1x_2\,dx_3}{u\,.\,v}.$$

Die beiden ersten Integrale rechter Hand sind, wie sogleich ersichtlich ist, die Fundamentalintegrale ϖ, *genommen respective mit den linearen Functionen* v *und* u; ich will, um sie von einander zu unterscheiden, bezeichnen:

$$(5.) \quad \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{v \cdot f(\xi x)} = \varpi(v), \quad \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u \cdot f(\xi x)} = \varpi(u)$$

und nur dann die lineare Function aus der Bezeichnung fortlassen, wenn sie aus dem Zusammenhang klar ist. Es folgt daher

$$(6.) \quad \int \frac{a\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u \cdot v \cdot f(\xi x)} = -\frac{f(\xi\zeta)}{f(\xi\eta)}\varpi(v) - \frac{f(\xi\vartheta)}{f(\xi\eta)}\varpi(u) + \frac{\Sigma \pm a_1 u_2 v_3}{f(\xi\eta)} \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u \cdot v}$$

und es bleibt nur noch übrig das dritte Differentiale exact zu machen. Dieses geschieht aber, da die Grössen ξ noch beliebig sind, wieder mittelst der Formel §. 2 (16.), wenn man hier die Umformung

$$\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3 = u\,dv - v\,du$$

anwendet, welche durch Substitution von

$$(7.) \quad \xi_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad \xi_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad \xi_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

oder wegen (3.) von

$$\xi_1 = \eta_1, \quad \xi_2 = \eta_2, \quad \xi_3 = \eta_3$$

entsteht, wodurch man

$$(8.) \quad \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{uv} = \int \frac{u\,dv - v\,du}{uv} = l\frac{v}{u}$$

findet. Setzt man daher auf der rechten Seite von (6.) überall $\xi_k = \eta_k$, so entsteht

$$(9.) \quad \int \frac{a\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u \cdot v \cdot f(\xi x)} = -\frac{f(\eta\zeta)}{f(\eta\eta)}\varpi(v) - \frac{f(\eta\vartheta)}{f(\eta\eta)}\varpi(u) + \frac{\Sigma \pm a_1 u_2 v_3}{f(\eta\eta)} l\frac{v}{u}.$$

Auf der linken Seite kann man die willkürlichen Grössen ξ_k beibehalten, weil sie von ihnen unabhängig ist. Nimmt man daher an, dass die Coefficienten von a die Werthe haben

$$(10.) \quad a_1 = \tfrac{1}{2} f'(\xi_1), \quad a_2 = \tfrac{1}{2} f'(\xi_2), \quad a_3 = \tfrac{1}{2} f'(\xi_3),$$

so geht a gegen $f(\xi x)$ fort, und es ergiebt sich aus (9.) auch der Werth von

$$\int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u \cdot v},$$

für ganz beliebige Werthe von ξ_1, ξ_2, ξ_3. Dieses Integral geht, wenn man die Homogenität aufhebt und noch der Kürze halber durch u und v dieselben linearen Functionen in nicht homogener Form bezeichnet, über in:

$$(11.) \quad \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u \cdot v} = \int \frac{-\xi_1 dy + \xi_2 dx + \xi_3 (x\,dy - y\,dx)}{u \cdot v},$$

welches den Complex der drei nicht homogenen Integrale:

$$\int \frac{dy}{uv}, \quad \int \frac{dx}{uv}, \quad \int \frac{x\,dy - y\,dx}{uv}$$

umfasst, je nachdem man den Coefficient von $-\xi_1$ oder ξ_2 oder ξ_3 nimmt. Es bleibt also noch die Substitution (10.) in (9.) auszuführen, da aber wegen (3.)

$$\vartheta_1 = \tfrac{1}{2}f'(\xi_2)u_3 - \tfrac{1}{2}f'(\xi_3)u_2, \quad \text{u. s. w.}$$
$$\zeta_1 = \tfrac{1}{2}f'(\xi_3)v_2 - \tfrac{1}{2}f'(\xi_2)v_3, \quad \text{u. s. w.}$$

ist, so erhält man

$$(12.) \qquad f(\eta\vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}f'(\eta_1), & \frac{1}{2}f'(\xi_1), & u_1 \\ \frac{1}{2}f'(\eta_2), & \frac{1}{2}f'(\xi_2), & u_2 \\ \frac{1}{2}f'(\eta_3), & \frac{1}{2}f'(\xi_3), & u_3 \end{vmatrix}$$

und diese Determinante verwandelt sich, nach einer bekannten Umformung, wenn man die partiellen Ableitungen der zugehörigen Form $I'(uu)$ durch

$$(13.) \qquad U_1 = \tfrac{1}{2}I''(u_1), \quad U_2 = \tfrac{1}{2}I''(u_2), \quad U_3 = \tfrac{1}{2}I''(u_3)$$

bezeichnet, in

$$(14.) \qquad f(\eta\vartheta) = \Sigma \pm \eta_1 \xi_2 U_3;$$

desgleichen wird, wenn $V_k = \frac{1}{2}I''(v_k)$ ist,

$$(15.) \qquad f(\eta\zeta) = -\Sigma \pm \eta_1 \xi_2 V_3.$$

Beachtet man noch, dass wegen (3.) und (10.)

$$\Sigma \pm a_1 u_2 v_3 = \tfrac{1}{2}(\eta_1 f'(\xi_1) + \eta_2 f'(\xi_2) + \eta_3 f'(\xi_3)) = f(\xi\eta)$$

ist, so folgt aus (9.)

$$(16.) \qquad \int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u \,.\, v} = \frac{\Sigma \pm \eta_1 \xi_2 V_3}{f(\eta\eta)}\varpi(v) - \frac{\Sigma \pm \eta_1 \xi_2 U_3}{f(\eta\eta)}\varpi(u) + \frac{f(\xi\eta)}{f(\eta\eta)} l\frac{v}{u},$$

also wegen (11.), wenn man sich auf den Coefficienten von ξ_2 beschränkt,

$$(17.) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{(u_1x+u_2y+u_3)(v_1x+v_2y+v_3)} \\ = \dfrac{\eta_1 V_3 - \eta_3 V_1}{f(\eta\eta)}\varpi(v) - \dfrac{\eta_1 U_3 - \eta_3 U_1}{f(\eta\eta)}\varpi(u) + \dfrac{\frac{1}{2}f'(\eta_2)}{f(\eta\eta)} l\dfrac{v}{u}. \end{cases}$$

Alles zusammengefasst ergiebt sich:

Theorem IV.

Die beiden Integrale $\int \frac{a\,dx}{u.v.\frac{1}{2}f'(y)}$ *und* $\int \frac{-\xi_1 dy + \xi_2 dx + \xi_3(y\,dx - x\,dy)}{u\,.\,v}$, *in welchen die Grössen* ξ_k *ganz beliebig sind, und* a, u, v *beliebige lineare Functionen von* x *und* y *bedeuten, bestehen allemal aus der Summe von nur*

drei von einander verschiedenen Logarithmen, multiplicirt mit Constanten, und zwar sind zwei dieser Logarithmen die mit den linearen Functionen u und v genommenen Transcendenten ϖ und der dritte ist der von den Coefficienten der Bedingungsgleichung $f=0$ unabhängige Logarithmus des Quotienten von v und u.

§. 8.

Ueber irrationale Partialbrüche.

Ich habe im §. 2 gezeigt, dass

$$(1.) \qquad \Omega = \int \frac{\Pi(x_1, x_2, x_3)\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)}$$

die allgemeinste Form ist, auf welche die hier zu behandelnden Integrale gebracht werden können, wenn

$$(2.) \qquad \Pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{F(x_1, x_2, x_3)}{\Phi(x_1, x_2, x_3)}$$

einen Bruch bedeutet, dessen Nenner von einer beliebigen n^{ten} und dessen Zähler von einer um die Einheit niedrigeren also $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Ein solcher Bruch soll, der Kürze halber, nach der Ordnung seines Nenners bezeichnet werden *als Bruch der n^{ten} Ordnung.* Ich stelle nun die Aufgabe: *„Einen Bruch der n^{ten} Ordnung in die Summe anderer Brüche der kleinsten Ordnung zu zerlegen, ohne dass es erforderlich ist, dieselben vermittelst der Bedingungsgleichung $f(xx)=0$ auf eine Variable zu reduciren.“* Solche Brüche, welche also noch die durch $f(xx)=0$ gegebene irrationale Function implicite enthalten, nenne ich *irrationale Partialbrüche.*

Es lässt sich zunächst einsehen, dass man den Nenner immer in lineare Factoren zerfällen kann, wenn man sich darauf beschränkt, ihn nur unter der Voraussetzung, dass $f(xx)=0$ ist, darzustellen. Fügt man nämlich zu dem Nenner $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ das Product von $f(xx)$ mit einer homogenen Function $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, deren Coefficienten vorläufig unbestimmt sind, so kann man die letzteren immer so einrichten, dass ohne alle Beschränkung

$$\Phi - \Psi . f$$

in n lineare Factoren zerfällbar ist. Um einzusehen, dass dieses Problem immer ein bestimmtes ist, denke man sich die Gleichungen $\Phi=0$ und $f=0$ aufgelöst, nehme die $2n$ Werthensysteme, welche ihnen genügen, paarweise zusammen, und bilde die linearen Functionen, welche für jedes Paar verschwinden und dadurch bis auf einen constanten Factor bestimmt sind. Das Product dieser n linearen Factoren gleich L gesetzt, hat dann die Eigenschaft,

bis auf einen constanten Factor λ, der sich hinterher leicht bestimmen lässt, die Identität

$$\Phi - \Psi . f = \lambda L$$

zu liefern, denn es ist $\Phi - \lambda L$ eine Function der n^{ten} Ordnung, von welcher feststeht, dass unter den n^2 Werthen, welche den Gleichungen $\Phi = 0$, $L = 0$ genügen, sich immer $2n$ befinden, welche auch die Gleichung zweiter Ordnung $f(xx) = 0$ befriedigen, folglich müssen alle übrigen, nach dem Princip der nothwendigen Punkte, noch einer Gleichung des $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $\Psi = 0$ genügen, welche dadurch völlig bestimmt ist, und man hat daher

$$(3.) \qquad \Phi - \lambda L = \Psi . f, \quad \text{oder} \quad \Phi - \Psi . f = \lambda L,$$

was zu beweisen war. Für diese Zerlegung, welche ein auch an sich wichtiges Problem der Algebra ist, giebt es nur in speciellen Fällen symmetrische Lösungen, in allen übrigen muss man sich mit der vorstehenden Lösung begnügen, welche auch in der gewöhnlichen Theorie der Partialbrüche schon vorausgesetzt ist.

Bestimmt man demnach aus (3.) den Werth der Function Φ und substituirt denselben in (1.), so geht, weil $f = 0$ ist, Ω über in:

$$(4.) \qquad \Omega = \frac{1}{\lambda} \int \frac{F(x_1, x_2, x_3)}{L(x_1, x_2, x_3)} \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)},$$

und es ist (4.) weiter zu behandeln, worin der Nenner aus dem Producte von n linearen Functionen besteht; *für dieses Integral ist aber alsdann, wie ich zeigen werde, die Benutzung der Bedingungsgleichung* $f(xx) = 0$ *nicht weiter erforderlich.*

In der Behandlung des Bruches $\frac{F(x_1, x_2, x_3)}{L(x_1, x_2, x_3)}$ setze ich nun zunächst voraus, *dass sämmtliche Factoren von L von einander verschieden und überhaupt je drei von einander unabhängig sind,* und bezeichne alsdann

$$(5.) \qquad L = u . v . w . p \ldots,$$

wo wie bisher $u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$, u. s. w. ist. Man könnte nun verlangen, dass der gegebene Bruch in n Partialbrüche erster Ordnung

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} + \frac{\delta}{p} + \cdots$$

zerfällt, wo α, β, γ, δ, ... Constanten sind, allein wenn man diese Summe auf gleiche Benennung bringt, so wird der Zähler

$$\alpha vwp \cdots + \beta uwp \cdots + \gamma uvp \cdots + \delta uvw \cdots + \cdots$$

zwar eine homogene Function der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, aber eine solche von sehr specieller Natur, nämlich *welche für alle* $\frac{n(n-1)}{2}$ *Werthen-*

systeme verschwindet, die sich durch Auflösung je zwei der linearen Gleichungen $u=0,\ v=0,\ w=0,\ p=0,\ \ldots$ *ergeben.* Es bleibt daher nichts Anderes übrig, als zu untersuchen, wie eine Function $\frac{\Theta}{u.v.w.p\ldots}$ beschaffen sein muss, welche die Gleichung

$$(6.)\qquad \frac{F(x_1,x_2,x_3)}{u.v.w.p\ldots}=\frac{\alpha}{u}+\frac{\beta}{v}+\frac{\gamma}{w}+\frac{\delta}{p}+\cdots+\frac{\Theta}{u.v.w.p\ldots}$$

so identificirt, dass das am Anfange dieses §. gestellte Problem erledigt wird. Hierzu soll nun die folgende Entwicklung dienen.

§. 9.

Irrationale Partialbrüche der zweiten Ordnung.

Bezeichnet man durch $a, b, c, \ldots g, h, k, \ldots$ lineare Functionen mit unbestimmten Coefficienten, indem man $a=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$, u. s. w. setzt, so kann man die letzteren auf unendlich viele Arten so bestimmen, dass

$$(1.)\qquad \frac{F(x_1,x_2,x_3)}{u.v.w.p\ldots}=\frac{a}{uv}+\frac{b}{uw}+\frac{c}{up}+\cdots+\frac{g}{wp}+\frac{h}{vp}+\frac{k}{vw}+\cdots$$

eine identische Gleichung wird.

Will man sich mit der Coefficientenabzählung begnügen, so sieht man leicht die Möglichkeit von (1.) ein, indem die Anzahl der unbestimmten Coefficienten bedeutend grösser ist, als die Anzahl der hierzu erforderlichen Gleichungen. Da aber von den n Functionen $u, v, w, p \ldots$ immer jede vierte von dreien derselben abhängig ist, weil sie Functionen von drei Variabeln sind, so halte ich eine *directe* Darstellung der Zerlegung für nothwendig, obwohl ich sie in der Folge nicht weiter benutzen werde. Man denke sich aus drei der gegebenen linearen Functionen, wie

$$(2.)\qquad \begin{cases} u = u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3, \\ v = v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3, \\ w = w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3, \end{cases}$$

die Variabeln x_1, x_2, x_3 bestimmt, und substituire ihre Werthe, ausgedrückt in u, v, w, in die Gleichung (1.), welche dadurch übergehen mag in

$$(3.)\qquad \frac{F(u,v,w)}{u.v.w.p\ldots}=\frac{a}{uv}+\frac{b}{uw}+\frac{c}{up}+\cdots+\frac{g}{wp}+\frac{h}{vp}+\frac{k}{vw}\cdots,$$

worin dann u, v, w die unabhängigen Veränderlichen sind, und $a, b, c, \ldots g, h, k, \ldots$ die in dieselben ausgedrückten früheren gleichbenannten Grössen bezeichnen.

Die rechte Seite von (3.) besteht aus zwei Theilen, deren erster alle im Nenner mit der einen Variablen u behafteten Brüche enthält, während der

zweite diese Variable gar nicht mehr enthält. Den zweiten Theil denke man sich auf gleiche Benennung gebracht, und demgemäss

$$(4.) \qquad \frac{F(u,v,w)}{u.v.w.p\ldots} = \frac{a}{uv}+\frac{b}{uw}+\frac{c}{up}+\cdots+\frac{G(u,v,w)}{v.w.p\ldots}$$

geschrieben, worin $G(u, v, w)$ von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist und im Nenner nur $(n-1)$ lineare Functionen enthält. Bringt man die Gleichung (4.) auf gleiche Benennung und behält auf der rechten Seite nur das letzte Glied, so entsteht

$$(5.) \qquad F(u,v,w)-(awp\cdots+bvp\cdots+cvw\ \cdot\cdot) = u.G(u,v,w),$$

wodurch erwiesen ist, dass man zur Darstellung von (3.) die linke Seite von (5.) in eine Function verwandeln muss, welche den Factor u hat. Da aber u eine der Veränderlichen selbst ist, so wird diese Verwandlung ausgeführt, wenn man sämmtliche Coefficienten der Potenzen und Producte der beiden anderen Variabeln v und w auf der linken Seite von (5.) verschwinden lässt, und demgemäss die Coefficienten von $a, b, c, \ldots$ bestimmt. Dass dieses ausführbar ist, kann man aus der Theorie der gewöhnlichen Partialbrüche mit einer Veränderlichen entnehmen, denn setzt man auf der linken Seite von (5.) $u=0$, so bleiben gerade die Glieder übrig, welche verschwinden sollen; bezeichnet man daher die Substitution $u=0$ durch angehängte Indices, so entsteht

$$F(0,v,w) = a^0wp^0\cdots+b^0vp^0\cdots+c^0vw+\cdots$$

oder

$$(6.) \qquad \frac{F(0,v,w)}{v.w.p^0\ldots} = \frac{a^0}{v}+\frac{b^0}{w}+\frac{c^0}{p^0}+\cdots$$

und beide Seiten dieser Gleichung sind nur Functionen *einer* Veränderlichen $\frac{v}{w}$, weil sie in Bezug auf v und w homogen sind. Die Brüche sind zwar von gleichem Grade im Zähler und Nenner, man kann aber sowohl die linke wie die einzelnen Brüche der rechten Seite auf die Form $A+$ einem ächten Bruch bringen, wo A eine Constante ist, welche der Summe der entsprechenden Coefficienten auf der rechten Seite gleich ist, und dadurch für die letzteren eine überdies unvermeidliche Unbestimmtheit herbeiführt; die übrigen Coefficienten sind völlig bestimmt. Es braucht wohl nicht bemerkt zu werden, dass bei Aufhebung der Homogenität auch noch ein in $\frac{v}{w}$ multiplicirtes Glied auf beiden Seiten sich vorfindet, welches ebenfalls bestimmt ist. Hiermit ist die Zerlegung eines Bruches der n^{ten} Ordnung $\frac{F(u,v,w)}{u.v.w.p\ldots}$ auf die analoge Zer-

legung eines Bruches der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\frac{G(u,v,w)}{v.w.p...}$ zurückgeführt; da man dies so weiter fortsetzen kann und das letzte Mal ein Bruch der zweiten Ordnung übrig bleibt, der nicht weiter zerlegt zu werden braucht, so ist damit die ganze Zerlegung vollständig ausgeführt.

Ich schliesse die Entwicklung dieses §. mit der Bemerkung, dass man die Zerlegung noch ebenso durchführen kann, wenn statt einer Function des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades eine von beliebig höherem Grade in den Zähler gesetzt wird; nur müssen dann auch die linearen Zähler a, b, c, ... durch entsprechende Functionen höherer Ordnung ersetzt werden. Ist also, mit Bezug auf die Bemerkung in §. 2, F von der $(n+p-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, so müssen a, b, c, ... von der $(p-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sein.

§. 10.

Irrationale Partialbrüche der ersten und zweiten Ordnung.

Aus der im vorigen §. entwickelten Theorie will ich nun eine völlig bestimmte Zerlegung der Function $\frac{F(x_1,x_2,x_3)}{u.v.w.p...}$ ableiten, und zwar dadurch, dass die in §. 8 am Ende angegebene Function Θ eine geeignete Bestimmung erhält.

Wäre die Zerlegung in Partialbrüche der zweiten Ordnung nach §. 9 eine bestimmte, so würde man die einzelnen Partialbrüche, weil sie von der Form $\frac{a}{uv}$ sind, nach der in §. 7 auseinandergesetzten Methode integriren; da dieses aber nicht der Fall ist, so benutze man die Gleichung §. 7 (4.) nur zur weiteren Umformung der Brüche $\frac{a}{uv}$. Nach dieser Gleichung wird der Zähler a durch die linearen Functionen u, v und $f(\xi x)$ ausgedrückt, worin ξ_1, ξ_2, ξ_3 beliebige Grössen sein können, also auf die Form

$$(1.) \qquad a = A.u + B.v + A_{12}.f(\xi x)$$

gebracht, in welcher die Bedeutung der Coefficienten A, B, A_{12} aus §. 7 (4.) entnommen werden kann. Da nun gleichzeitig auch §. 7 (7.), (9.) bewiesen ist, dass man $\xi_1 = u_2v_3 - u_3v_2$ u. s. w. zu setzen hat, wenn $\frac{a}{u.v}\frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)}$ auf ein exactes Differential zurückgeführt werden soll, so denke man sich gleich diese Werthe für ξ_k in (1.) eingeführt, also $f(\xi x)$ ausgedrückt durch

$$(2.) \qquad f(\xi x) = \Sigma \pm u_1 v_2 \tfrac{1}{2} f'(x_3) = \Sigma \pm u_1 v_2 \chi_3,$$

wenn man wie früher $\chi_k = \frac{1}{2} f'(x_k)$ setzt; alsdann folgt aus (1.) nach Division mit $u.v$ und nach analoger Behandlung von b, c, ... g, h, k, ...

in §. 9 (1.):

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{uv} = \dfrac{A}{v} + \dfrac{B}{u} + A_{12}\dfrac{\Sigma \pm u_1 v_2 \chi_3}{uv}, \\ \dfrac{b}{uw} = \dfrac{A_1}{w} + \dfrac{B_1}{u} + A_{13}\dfrac{\Sigma \pm u_1 w_2 \chi_3}{uw}, \\ \dfrac{c}{up} = \dfrac{A_2}{p} + \dfrac{B_2}{u} + A_{14}\dfrac{\Sigma \pm u_1 p_2 \chi_3}{up}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{g}{vw} = \dfrac{A_g}{w} + \dfrac{B_g}{v} + A_{23}\dfrac{\Sigma \pm v_1 w_2 \chi_3}{vw}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und wenn man diese Werthe in §. 9 (1.) substituirt,

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{F(x_1, x_2, x_3)}{u.v.w.p\ldots} = \dfrac{\alpha}{u} + \dfrac{\beta}{v} + \dfrac{\gamma}{w} + \dfrac{\delta}{p} + \cdots + \dfrac{A_{12}\Sigma \pm u_1 v_2 \chi_3}{uv} + \dfrac{A_{13}\Sigma \pm u_1 w_2 \chi_3}{uw} + \cdots \\ \qquad + \dfrac{A_{23}\Sigma \pm v_1 w_2 \chi_3}{vw} + \cdots, \end{cases}$$

indem sich die ersten beiden Glieder jeder in (3.) enthaltenen Zeile auf eine Summe einfacher Brüche der ersten Ordnung zusammenziehen, hingegen die jedesmaligen letzten Glieder Brüche zweiter Ordnung werden. Diese letzteren bilden nun den Werth der in §. 8 (6.) angegebenen Function $\dfrac{\Theta}{u.v.w.p\ldots}$.

Die Zerlegung (4.) *genügt folgenden drei Bedingungen:*

1) *Sie ist möglich, denn die Zerlegung* §. 9 (1.), *aus der sie entspringt, lässt sich immer ausführen.*

2) *Sie ist eine vollständig bestimmte, denn die Anzahl der Coefficienten* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *beträgt* n, *die Anzahl der Coefficienten* $A_{12}, A_{13}, \ldots$ *ist* $= \dfrac{n(n-1)}{2}$, *als Combinationen der zweiten Klasse aus* n *Elementen, macht zusammen* $\dfrac{n(n+1)}{2}$, *und gerade so viele Coefficienten hat auch die Function* $F(x_1, x_2, x_3)$ *der* $(n-1)^{ten}$ *Ordnung.*

3) *Wenn jeder der Brüche mit* $\dfrac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)}$ *multiplicirt wird, wo die jedesmaligen* ξ_k *nach* §. 3 *und* §. 7 *bestimmt sind, so werden sämmtliche Producte exacte Differentiale.*

Die Bestimmung der Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots A_{12}, A_{13}, \ldots A_{23}, \ldots$ ist endlich sehr einfach. Man ermittelt zunächst die letzteren. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (4.) mit dem Nenner desjenigen Bruches, dessen Zähler bestimmt werden soll, also mit uv, wenn A_{12} gesucht wird, und setzt dann für die Variabeln x_1, x_2, x_3 diejenigen Werthe, für welche beide Functionen

u und v verschwinden, also

$$(5.) \quad x_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad x_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad x_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1,$$

so geht die Gleichung (4.), da der Voraussetzung nach keine dritte der linearen Functionen für diese Werthe verschwindet und wegen (2.) nach Substitution der Werthe aus (5.) $\Sigma \pm u_1 v_2 \chi_3 = f(xx)$ wird, in

$$(6.) \quad \frac{F(x_1', x_2', x_3')}{w'.p'\ldots} = A_{12} f(x'x')$$

über, wo durch die Accente angedeutet wird, dass die Substitution (5.) vollzogen ist.

Hat man auf diese Weise den Werth für den zweiten Theil der rechten Seite von (4.) ermittelt, welcher die Partialbrüche zweiter Ordnung enthält und vorhin durch $\frac{\Theta}{u.v.w.p\ldots}$ bezeichnet worden ist, so geht (4.) über in

$$(7.) \quad \frac{F(x_1, x_2, x_3) - \Theta(x_1, x_2, x_3)}{u.v.w.p\ldots} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} + \frac{\delta}{p} + \cdots,$$

d. h. *die Function im Zähler von* (7.) *hat die in* §. 8 *ausgesprochene Eigenschaft, für alle* $\frac{n(n-1)}{2}$ *Werthensysteme zu verschwinden, welche je zwei der Gleichungen* $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, ... *genügen.*

Die Bestimmung der Coefficienten α, β, γ, δ, ... erfolgt nun, indem man von Neuem mit dem Nenner desjenigen Bruches multiplicirt, dessen Zähler gesucht wird, z. B. zur Bestimmung von α mit u, und alsdann für x_1, x_2, x_3 irgend ein Werthensystem einsetzt, für welches $u \doteq 0$ ist, aber keine zwei der anderen Functionen v, w, p, ... verschwinden. Man kann diese Bestimmung durch Einführung von Ableitungen der Function $F(x_1, x_2, x_3)$ noch etwas abändern, doch ist dieses unwesentlich.

Man sieht aber hieraus ein, dass die Constanten α, β, γ, ... A_{12}, A_{13}, ... lineare Functionen der Coefficienten des gegebenen Zählers $F(x_1, x_2, x_3)$ werden, *daher ist es erlaubt, statt der homogenen Function* $(n-1)^{ter}$ *Ordnung* $F(x_1, x_2, x_3)$ *die* $(n-1)^{te}$ *Potenz einer beliebigen linearen Function* $a^{n-1} = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^{n-1}$ *zu setzen,* indem aus dem angegebenen Grunde der Charakter der Constanten gar nicht geändert wird, und daher *das Endresultat der Rechnung das wirkliche in symbolischer Form darstellt.* Dieser Umstand gewährt in der Folge wesentliche Abkürzungen, da auch die Integrale die Constanten α, β, γ, ... A_{12}, A_{13}, ... nur als Factoren behalten werden.

Es bleibt noch übrig, eine Untersuchung anzustellen, in welcher Weise die vorstehende Zerlegung abzuändern ist, wenn die Factoren u, v, w, ... mehrfach vorkommen. Man kann sich hierzu aus der Gleichung (4.), welche ich in der Folge immer mit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz einer linearen Function im Zähler, nämlich als

$$(8.)\quad \frac{a^{n-1}}{u.v.w.p...} = \frac{\alpha}{u}+\frac{\beta}{v}+\frac{\gamma}{w}+\cdots+\frac{A_{12}\Sigma\pm u_1v_2\chi_3}{uv}+\frac{A_{13}\Sigma\pm u_1w_2\chi_3}{uw}+\frac{A_{23}\Sigma\pm v_1w_2\chi_3}{vw}+\cdots$$

aus dem angegebenen Grunde, ansetzen werde, eine neue dadurch ableiten, *dass man dieselbe nach den Coefficienten u_1, u_2, u_3 desjenigen Factors u, welcher $m$fach vorkommen mag, $m-1$ mal hinter einander differentiirt und statt der Incremente jedesmal die entsprechenden Coefficienten a_1, a_2, a_3 von a substituirt.*

In der That geht dadurch die linke Seite in

$$(-1)^{m-1}(m-1)!\,\frac{a^{n+m-2}}{u^m.v.w.p...}$$

über, und der Zähler ersetzt symbolisch eine homogene Function der $(n+m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, während der Nenner wieder eine um die Einheit höhere Ordnung besitzt. Die auf diese Weise rechts entstehenden Partialbrüche würden aber besonders integrirt werden müssen, was ausführbar aber weitläuftiger ist, als wenn man zuvor den Ausdruck (8.) integrirt und dann den angegebenen Process ausführt. Diesen letzteren Weg werde ich mit Rücksicht auf die in §. 4 und §. 6 entwickelte Methode in der Folge einschlagen und *daher in allen Fällen zuerst das Integral mit einfachen Factoren im Nenner behandeln.* Alle anderen Specialitäten, welche durch Annahme specieller Functionen im Nenner des Integrales entstehen und sich nicht auf vielfache Factoren reduciren lassen, übergehe ich hier, weil sie die allgemeinen Methoden, die ich hier entwickele, nicht tangiren, und auf bekannte algebraische Principien zurückgeführt werden können.

§. 11.

Entwicklung des allgemeinen Integrales.

Es sei $\Pi(x_1, x_2, x_3)$ eine rationale Function, deren Nenner, wenn man die in §. 8 angegebene Factorenzerlegung ausführt, *keine vielfachen Factoren* erhält, und übrigens von der n^{ten} Ordnung ist; der Zähler sei von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und das Integral

$$(1.)\quad \Omega = \int \frac{\Pi(x_1, x_2, x_3)\,\Sigma\pm\xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)}$$

auszuführen. Verwandelt man Π in gemischte Partialbrüche der ersten und zweiten Ordnung von der in §. 10 (4.) angegebenen Art, so dass

$$(2.)\quad \left\{ \begin{array}{c} \Pi(x_1, x_2, x_3) \\ = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} + \cdots + \frac{A_{12}\Sigma \pm u_1 v_2 \chi_3}{u.v} + \frac{A_{13}\Sigma \pm u_1 w_2 \chi_3}{u.w} + \frac{A_{23}\Sigma \pm v_1 w_2 \chi_3}{v.w} + \cdots \end{array} \right.$$

entsteht, und multiplicirt mit $\frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)}$, *dann ist jedes Glied einzeln ein exactes Differential und jedes Glied einzeln von den Factoren* ξ_k *unabhängig.* Es folgt dieses für die Brüche erster Ordnung aus §. 3 und für die Brüche zweiter Ordnung aus §. 7, wenn man dort allmälig die lineare Function a durch die gleichfalls linearen Zähler $\Sigma \pm u_1 v_2 \chi_3$, u. s. w. ersetzt. Man kann daher in *jedem* Gliede für die Grössen ξ_k *andere* Annahmen machen, und erhält zufolge dessen die Integrale der Brüche erster Ordnung als die Fundamentalintegrale ϖ genommen mit den verschiedenen linearen Functionen, welche sich in den Nennern befinden. Was die Brüche zweiter Ordnung betrifft, so könnte man sie nach §. 7 (9.) bestimmen, wenn nicht von vorn herein klar wäre, dass hierzu nur der dritte Bestandtheil dieser Formel erforderlich ist. Man findet in der That

$$\int \frac{\Sigma \pm u_1 v_2 \chi_3}{u.v} \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)} = l\frac{v}{w},$$

wenn man, wie in §. 7 (8.), berücksichtigt, dass durch Annahme von $\xi_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$, u. s. w., $\Sigma \pm u_1 v_2 \chi_3 = f(\xi x)$, $\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3 = udv - vdu$ wird.

Es folgt daher

$$(3.)\quad \Omega = \alpha\varpi(u) + \beta\varpi(v) + \gamma\varpi(w) + \cdots + A_{12} l\frac{v}{u} + A_{13} l\frac{w}{u} + A_{23} l\frac{w}{v} + \cdots,$$

worin die Anzahl der Logarithmen ϖ n beträgt und auf eine geringere Anzahl von Logarithmen algebraischer Functionen nicht weiter reducirbar ist, ferner die Anzahl der von den Quotienten der linearen Functionen genommenen Logarithmen $\frac{n(n-1)}{2}$ ist, die sich aber sofort auf $(n-1)$ reduciren lassen, deren Quotienten ein und denselben Nenner z. B. u haben, da allemal

$$l\frac{w}{v} = l\frac{w}{u} - l\frac{v}{u}$$

ist. *Die Gesammtzahl der im Ausdruck von* Ω *vorkommenden Logarithmen algebraischer Functionen, welche sich nicht weiter reduciren lassen, beträgt also im Allgemeinen* $2n-1$.

Da die Integration von (2.) für jedes Glied einzeln erfolgen konnte, so ist der Ausdruck (3.) in Bezug auf die Coefficienten α, β, γ, ... und A_{12}, A_{13}, A_{23}, ... linear, folglich nach §. 10 auch linear in Bezug auf die Coefficienten des Zählers von Π, und es gilt demnach die dort gemachte Bemerkung, wonach man den Zähler, der von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, symbolisch durch die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz einer beliebigen linearen Function a ersetzen kann, so dass in allen Fällen die Behandlung von

$$(4.) \qquad \Omega = \int \frac{a^{n-1}}{u.v.w.p...} \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)}$$

ausreichend ist.

Wenn im Nenner von Π sich vielfache Factoren befinden, so behandle man immer zuerst das Integral (4.) mit einfachen Factoren, indem man den Werth (3.) desselben aufstellt, und bilde dann den Differentiationsprocess δ, welchen ich §. 4 entwickelt habe, und welcher darin besteht, dass man nach den Coefficienten u_1, u_2, u_3 jedes Factors u, welcher vielfach vorkommt, differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden a_1, a_2, a_3 substituirt. Wiederholt man denselben $r-1$ mal, so geht (4.) über in

$$(5.) \qquad \delta^{r-1}\Omega = (-1)^{r-1} 1.2...(r-1) \int \frac{a^{n+r-2}}{u^r.v.w.p...} \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)},$$

während derselbe Process auf der rechten Seite von (3.) ausgeführt ohne Weiteres das Resultat liefert, *dass zu den vorhandenen Logarithmen nur noch algebraische Ausdrücke hinzutreten,* deren gesetzmässige Bildung ohne Weiteres vermittelst der in §. 4 eingeführten Functionen ϖ_n erfolgen kann; denn alle in (3.) vorkommenden Functionen von u_1, u_2, u_3, welche nicht aus $\varpi(u)$ entspringen, sind in Bezug auf diese Constanten rational und erfordern daher keine besonderen Entwicklungen bei ihrer Differentiation.

Da man auf diese Weise in den Stand gesetzt ist, im Allgemeinen die Form des Endausdrucks der Integration zum Voraus zu bestimmen, so kann die Untersuchung specieller Fälle nach der Integration erfolgen und wird daher eine rein algebraische.

Zum Abschlusse dieser allgemeinen Untersuchungen will ich noch das diesen Principien entsprechende Verfahren angeben, wenn man von einem nicht homogenen Differentialausdruck ausgeht.

Es sei wie in §. 2

$$(6.) \qquad \int \frac{F(x,y)dx}{\Phi(x,y)}$$

zu bestimmen, F von der m^{ten}, Φ von der μ^{ten} Ordnung in Bezug auf die Variabeln, dann hat man in den homogenen Variabeln:

$$\int \frac{\Pi(x_1, x_2, x_3)\, \Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)},$$

wo nach §. 2 (12.)

$$(7.) \qquad \Pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{F(x_1, x_2, x_3).x_3^{\mu} \frac{1}{2} f'(x_2)}{\Phi(x_1, x_2, x_3).x_3^{m+2}}$$

ist. Diese Function hat einen Zähler von der $(m+\mu+1)^{\text{ten}}$ und einen Nenner von der $(m+\mu+2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Sollen nun in dem letzteren keine vielfachen Factoren vorkommen, so darf keine höhere Potenz von x_3 im Nenner bleiben als die erste, oder es muss $m \leqq \mu-1$ sein. Man wird daher in dem gegebenen Integrale (6.) zunächst die beiden Fälle $m \leqq \mu-1$ und $m > \mu-1$ zu unterscheiden haben. Hiergegen fällt die Unterscheidung der gangbaren Theorie fort, ob nach ausgeführter Elimination der Veränderlichen y aus (6.) ächte oder unächte Brüche zurückbleiben. Man behandelt nun immer zuerst den Fall $m \leqq \mu-1$, in welchem (7.) geschrieben werden kann

$$(8.) \qquad \Pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{F(x_1, x_2, x_3).x_3^{\mu-m-1}}{\Phi(x_1, x_2, x_3).x_3} \frac{1}{2} f'(x_2),$$

und zwar ersetzt man, wie bei (4.) angegeben ist, den Zähler symbolisch durch

$$F(x_1, x_2, x_3).x_3^{\mu-m-1}.\tfrac{1}{2} f'(x_2) = a^{\mu},$$

und setzt überdies statt x_3 im Nenner eine vollständige lineare Function $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = u$, was nach den voranstehenden Entwicklungen die Complication nicht vergrössert, aber symmetrische Resultate zur Folge hat, und andererseits nachher nothwendig ist, wenn $m > \mu-1$ ist.

Dies lässt sich kurz so ausdrücken, *dass man gleich nach Ansicht von* (6.)

$$(9.) \qquad \Omega = \int \frac{a^{\mu}.\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u.\Phi(x_1, x_2, x_3).f(\xi x)}$$

behandelt, welches aus dem gegebenen Integral nur den Nenner entnimmt.

Ist dieses geschehen, so gelangt man auf folgende Weise kürzer zu (6.) zurück und erhält dabei zugleich den Complex von den drei zusammengehörigen Integralen derselben Function, genommen nach dx, dy und $y\,dx - x\,dy$, wie in §. 7 (11.) und §. 6 (7.), wenn man die Function Ω, welche in Bezug auf a_1, a_2, a_3 eine ganze ist, nach diesen Constanten differentiirt und statt der Incremente $\frac{1}{2} f'(\xi_1)$, $\frac{1}{2} f'(\xi_2)$, $\frac{1}{2} f'(\xi_3)$ substituirt. Es entsteht dadurch

$$(10.) \qquad d_a \Omega = \mu \int \frac{a^{\mu-1}.f(\xi x).\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u.\Phi(x_1, x_2, x_3).f(\xi x)} = \mu \int \frac{a^{\mu-1}.\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u.\Phi(x_1, x_2, x_3)},$$

also hebt sich $f(\xi x)$ fort. Ist nun $m = \mu - 1$, so setzt man geradezu die Coefficienten von F den entsprechenden Potenzen und Producten von $a^{\mu-1}$ gleich, sonst nimmt man statt F die Function $x_3^{\mu-m-1} F(x_1, x_2, x_3)$, welche ebenfalls von der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. In nicht homogener Form geschrieben geht dann (10.) über in

$$(11.) \qquad d_a \Omega = \mu \int \frac{F(x,y)}{\Phi(x,y)} \frac{-\xi_1 dy + \xi_2 dx + \xi_3 (y dx - x dy)}{u_1 x + u_2 y + u_3}.$$

Bezeichnet man andererseits, da Ω von der μ^{ten} Ordnung in Bezug auf a_1, a_2, a_3 ist, der Kürze halber

$$(12.) \qquad \Omega_1 = \frac{1}{\mu} \frac{d\Omega}{da_1}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\mu} \frac{d\Omega}{da_2}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{\mu} \frac{d\Omega}{da_3},$$

so ist

$$d_a \Omega = \mu\left(\Omega_1 \cdot \tfrac{1}{2} f'(\xi_1) + \Omega_2 \cdot \tfrac{1}{2} f'(\xi_2) + \Omega_3 \cdot \tfrac{1}{2} f'(\xi_3)\right) = \mu\left(\xi_1 \cdot \tfrac{1}{2} f'(\Omega_1) + \xi_2 \cdot \tfrac{1}{2} f'(\Omega_2) + \xi_3 \cdot \tfrac{1}{2} f'(\Omega_3)\right),$$

folglich wird, nach Vergleichung mit (11.), wenn man noch überall $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ setzt:

$$(13.) \quad \begin{cases} -\int \frac{F(x,y)}{\Phi(x,y)} dy & = \frac{1}{2} f'(\Omega_1) = a_{11}\Omega_1 + a_{12}\Omega_2 + a_{13}\Omega_3, \\ \int \frac{F(x,y)}{\Phi(x,y)} dx & = \frac{1}{2} f'(\Omega_2) = a_{12}\Omega_1 + a_{22}\Omega_2 + a_{23}\Omega_3, \\ \int \frac{F(x,y)}{\Phi(x,y)} (y dx - x dy) & = \frac{1}{2} f'(\Omega_3) = a_{13}\Omega_1 + a_{23}\Omega_2 + a_{33}\Omega_3. \end{cases}$$

Nach dem oben bewiesenen Satze *sind alle diese Integrale aus*

$$2(\mu+1) - 1 = 2\mu + 1$$

auf einander nicht reducirbaren Logarithmen algebraischer Functionen zusammengesetzt.

Ist $m > \mu - 1$, so reducirt sich (7.) auf

$$\Pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{F(x_1, x_2, x_3)}{\Phi(x_1, x_2, x_3)} \frac{\frac{1}{2} f'(x_2)}{x_3^{m-\mu+2}},$$

und es muss daher der Zähler symbolisch durch

$$F(x_1, x_2, x_3) \cdot \tfrac{1}{2} f'(x_2) = a^{m+1}$$

ersetzt und daher

$$(14.) \qquad \int \frac{a^{m+1} \Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u^{m-\mu+2} \Phi(x_1, x_2, x_3) \cdot f(\xi x)} = (\Omega)$$

behandelt werden. Man findet aber (14.) aus (9.) durch die unter (5.) angegebene Operation δ, welche auf (9.) so oft wiederholt werden muss, bis der Zähler in a^{m+1} übergegangen ist, was gleichzeitig den Nenner $u^{m-\mu+2}$ herbeiführt.

Im Uebrigen verfährt man wie oben, und findet alsdann die Gleichungen (13.) wieder, wenn nur überall $m+1$ statt μ und (Ω) statt Ω geschrieben wird.

§. 12.

Entwicklung von $\int \frac{F(x,y)\,dx}{(u_1x+u_2y+u_3)(v_1x+v_2y+v_3)(w_1x+w_2y+w_3)\frac{1}{2}f'(y)}$, wenn $F(x,y)$ eine beliebige Function zweiter Ordnung ist.

Das vorstehende Integral will ich als Beispiel zu der Theorie des vorigen §. ausführen.

Man setze statt $F(x,y)$ das Quadrat der linearen Function $a_1x+a_2y+a_3$, dann wird das gesuchte Integral nach §. 2:

$$(1.) \qquad \Omega = \int \frac{a^2.\Sigma\pm\xi_1x_2\,dx_3}{u.v.w.f(\xi x)}$$

in homogener Form. Man bilde nun die Zerlegung §. 10 (4.):

$$(2.) \qquad \frac{a^2}{u.v.w} = \frac{\alpha}{u}+\frac{\beta}{v}+\frac{\gamma}{w}+\frac{A_{12}}{u.v}\Sigma\pm u_1v_2\chi_3+\frac{A_{23}}{v.w}\Sigma\pm v_1w_2\chi_3+\frac{A_{13}}{u.w}\Sigma\pm w_1u_2\chi_3$$

und bezeichne hierzu durch

$$(3.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = v_2w_3-v_3w_2, & \eta_2 = v_3w_1-v_1w_3, & \eta_3 = v_1w_2-v_2w_1, \\ \zeta_1 = w_2u_3-w_3u_2, & \zeta_2 = w_3u_1-w_1u_3, & \zeta_3 = w_1u_2-w_2u_1, \\ \vartheta_1 = u_2v_3-u_3v_2, & \vartheta_2 = u_3v_1-u_1v_3, & \vartheta_3 = u_1v_2-u_2v_1 \end{cases}$$

respective die Auflösungen der Gleichungen $v=0$, $w=0$; $w=0$, $u=0$; $u=0$, $v=0$; der Kürze halber sei ferner:

$$r = \Sigma\pm u_1v_2w_3; \quad a_1\zeta_1+a_2\zeta_2+a_3\zeta_3 = (a\zeta); \quad a_1\eta_1+a_2\eta_2+a_3\eta_3 = (a\eta),$$

u. s. w.,

so wird nach §. 10 (6.):

$$(4.) \qquad A_{12} = \frac{(a\vartheta)^2}{r.f(\vartheta\vartheta)}, \qquad A_{13} = \frac{(a\zeta)^2}{r.f(\zeta\zeta)}, \qquad A_{23} = \frac{(a\eta)^2}{r.f(\eta\eta)}.$$

Daher in (2.) substituirt, wenn man die Gleichung noch auf gleiche Benennung bringt, und berücksichtigt, dass wegen (3.):

$$(5.) \qquad \Sigma\pm u_1v_2\chi_3 = f(\vartheta x), \qquad \Sigma\pm v_1w_2\chi_3 = f(\eta x), \qquad \Sigma\pm w_1u_2\chi_3 = f(\zeta x),$$

ist:

$$(6.) \quad a^2-\Big(\frac{(a\eta)^2.f(\eta x)}{r.f(\eta\eta)}u+\frac{(a\zeta)^2.f(\zeta x)}{r.f(\zeta\zeta)}v+\frac{(a\vartheta)^2.f(\vartheta x)}{r.f(\vartheta\vartheta)}w\Big) = \alpha vw+\beta uw+\gamma uv.$$

Um α zu finden, hat man hierin irgend einen Werth zu setzen, welcher $u=0$ genügt, für den aber v und w nicht gleichzeitig verschwinden; da $x_k=\zeta_k$, $x_k=\vartheta_k$

wegen (3.) dies herbeiführen, so kann man

$$(7.) \qquad x_k = \zeta_k + \lambda\vartheta_k$$

setzen, und λ unbestimmt lassen. Macht man in irgend einer Gleichung zweiter Ordnung: $\Phi(xx) = 0$ die Substitution (7.), so entsteht

$$\Phi(\zeta\zeta) + 2\lambda\Phi(\zeta\vartheta) + \lambda^2\Phi(\vartheta\vartheta) = 0,$$

und es wird daher, wenn $\Phi(\zeta\zeta) = 0$, $\Phi(\vartheta\vartheta) = 0$ ist, auch $\Phi(\zeta\vartheta) = 0$. Die Gleichung (6.) geht für $u = 0$ in eine Gleichung

$$\Phi(xx) = a^2 - \Big(\frac{(a\zeta)^2 f(\zeta x).v}{r.f(\zeta\zeta)} + \frac{(a\vartheta)^2 f(\vartheta x).w}{r.f(\vartheta\vartheta)}\Big) - \alpha vw = 0$$

über, welche die genannten Eigenschaften hat, daher hat man

$$2\Phi(\zeta\vartheta) = 2(a\zeta)(a\vartheta) - \frac{(a\zeta)^2 f(\zeta\vartheta)}{f(\zeta\zeta)} - \frac{(a\vartheta)^2 f(\zeta\vartheta)}{f(\vartheta\vartheta)} - \alpha(v\zeta)(w\vartheta) = 0,$$

also, weil $(v\zeta) = (w\vartheta) = r$,

$$(8.) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{r^2}\Big\{2(a\zeta)(a\vartheta) - \frac{(a\zeta)^2 f(\zeta\vartheta)}{f(\zeta\zeta)} - \frac{(a\vartheta)^2 f(\zeta\vartheta)}{f(\vartheta\vartheta)}\Big\} \\ \quad = \frac{1}{r^2}\Big\{\frac{(a\zeta)}{f(\zeta\zeta)}((a\vartheta)f(\zeta\zeta) - (a\zeta)f(\zeta\vartheta)) + \frac{(a\vartheta)}{f(\vartheta\vartheta)}((a\zeta)f(\vartheta\vartheta) - (a\vartheta)f(\zeta\vartheta))\Big\}. \end{cases}$$

Die beiden Ausdrücke in der Parenthese auf der rechten Seite, lassen noch eine Vereinfachnng zu, es ist nämlich

$$(a\vartheta)f(\zeta\zeta) - (a\zeta)f(\zeta\vartheta) = \begin{vmatrix} a_3 \cdot \frac{1}{2}f'(\zeta_2) - a_2 \cdot \frac{1}{2}f'(\zeta_3), & \zeta_1, & \vartheta_1 \\ a_1 \cdot \frac{1}{2}f'(\zeta_3) - a_3 \cdot \frac{1}{2}f'(\zeta_1), & \zeta_2, & \vartheta_2 \\ a_2 \cdot \frac{1}{2}f'(\zeta_1) - a_1 \cdot \frac{1}{2}f'(\zeta_2), & \zeta_3, & \vartheta_3 \end{vmatrix},$$

die partiellen Determinanten wie $\zeta_2\vartheta_3 - \zeta_3\vartheta_2$, u. s. w. haben wegen (3.) den Factor r und zwar die Werthe $r.u_1$, $r.u_2$, $r.u_3$, daher folgt

$$(9.) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{r}\Big\{\frac{(a\zeta)}{f(\zeta\zeta)}\Sigma \pm u_1 \tfrac{1}{2}f'(\zeta_2)a_3 + \frac{(a\vartheta)}{f(\vartheta\vartheta)}\Sigma \pm u_1 \tfrac{1}{2}f'(\vartheta_2)a_3\Big\}, \\ \beta = \frac{1}{r}\Big\{\frac{(a\vartheta)}{f(\vartheta\vartheta)}\Sigma \pm v_1 \tfrac{1}{2}f'(\vartheta_2)a_3 + \frac{(a\eta)}{f(\eta\eta)}\Sigma \pm v_1 \tfrac{1}{2}f'(\eta_2)a_3\Big\}, \\ \gamma = \frac{1}{r}\Big\{\frac{(a\eta)}{f(\eta\eta)}\Sigma \pm w_1 \tfrac{1}{2}f'(\eta_2)a_3 + \frac{(a\zeta)}{f(\zeta\zeta)}\Sigma \pm w_1 \tfrac{1}{2}f'(\zeta_2)a_3\Big\}. \end{cases}$$

Die Werthe für β und γ folgen aus α durch Vertauschung der Buchstaben.

Die Substitution der Coefficienten von $F(x, y) = \frac{1}{x_3^2}F(x_1, x_2, x_3)$ für die entsprechenden $a_k a_\lambda$ in (4.) und (9.) ist sofort in diesen Formen ausführbar.

Es wird endlich

$$(10.)\qquad \Omega = \alpha\varpi(u)+\beta\varpi(v)+\gamma\varpi(w)+A_{12}\,l\frac{v}{u}+A_{23}\,l\frac{w}{v}+A_{13}\,l\frac{u}{w},$$

und weil $l\frac{w}{v}=l\frac{w}{u}-l\frac{v}{u}$, auch

$$(11.)\qquad \Omega = \alpha\varpi(u)+\beta\varpi(v)+\gamma\varpi(w)+(A_{12}-A_{23})\,l\frac{v}{u}+(A_{23}-A_{13})\,l\frac{w}{u},$$

welcher Werth aus fünf nicht weiter reducirbaren Logarithmen algebraischer Functionen zusammengesetzt ist.

Um $\int\frac{a\,dx}{u.v.w}$ oder allgemeiner

$$\Omega' = \int\frac{a(-\xi_1 dy+\xi_2 dx+\xi_3(y\,dx-x\,dy))}{u.v.w}$$

zu finden, wo der Kürze halber a, u, v, w gleichzeitig die nicht homogenen Ausdrücke andeuten, muss man nach §. 11 (11.)

$$d_a\Omega = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{d\Omega}{da_1}\tfrac{1}{2}f'(\xi_1)+\frac{d\Omega}{da_2}\tfrac{1}{2}f'(\xi_2)+\frac{d\Omega}{da_3}\tfrac{1}{2}f'(\xi_3)\Big)$$

bilden, wozu allein in (4.) und (9.) diese Operation auszuführen ist; bezeichnet man mit A'_{12}, A'_{13}, A'_{23}, α', β', γ' die dadurch entstehenden Werthe, so ist wegen (4.)

$$A'_{12}=\frac{(a\vartheta)f(\xi\vartheta)}{r.f(\vartheta\vartheta)},\qquad A'_{13}=\frac{(a\zeta)f(\xi\zeta)}{r.f(\zeta\zeta)},\qquad A'_{23}=\frac{(a\eta)f(\xi\eta)}{r.f(\eta\eta)},$$

und wegen (9.)

$$\alpha'=\frac{1}{2r}\left\{\frac{f(\xi\zeta)\Sigma\pm u_1.\frac{1}{2}f'(\zeta_2)a_3+(a\zeta)\Sigma\pm\zeta_1\xi_2U_3}{f(\zeta\zeta)}+\frac{f(\xi\vartheta)\Sigma\pm u_1.\frac{1}{2}f'(\vartheta_2)a_3+(a\vartheta)\Sigma\pm\vartheta_1\xi_2U_3}{f(\vartheta\vartheta)}\right\},$$

$$\beta'=\frac{1}{2r}\left\{\frac{f(\xi\vartheta)\Sigma\pm v_1.\frac{1}{2}f'(\vartheta_2)a_3+(a\vartheta)\Sigma\pm\vartheta_1\xi_2V_3}{f(\vartheta\vartheta)}+\frac{f(\xi\eta)\Sigma\pm v_1.\frac{1}{2}f'(\eta_2)a_3+(a\eta)\Sigma\pm\eta_1\xi_2V_3}{f(\eta\eta)}\right\},$$

$$\gamma'=\frac{1}{2r}\left\{\frac{f(\xi\eta)\Sigma\pm w_1.\frac{1}{2}f'(\eta_2)a_3+(a\eta)\Sigma\pm\eta_1\xi_2W_3}{f(\eta\eta)}+\frac{f(\xi\zeta)\Sigma\pm w_1.\frac{1}{2}f'(\zeta_2)a_3+(a\zeta)\Sigma\pm\zeta_1\xi_2W_3}{f(\zeta\zeta)}\right\},$$

wenn man $U_k=\frac{1}{2}I''(u_k)$, $V_k=\frac{1}{2}I''(v_k)$, $W_k=\frac{1}{2}I''(w_k)$ setzt, endlich

$$(12.)\qquad \Omega' = \alpha'.\varpi(u)+\beta'.\varpi(v)+\gamma'.\varpi(w)+(A'_{12}-A'_{23})\,l\frac{v}{u}+(A'_{23}-A'_{13})\,l\frac{w}{u}.$$

§. 13.

Ueber symmetrische Integrationen.

Die allgemeinen Entwicklungen, welche auf ganz symmetrische Resultate führen, wenn man die Nenner der betreffenden Integrale zerlegt voraus-

setzt, verlieren diese Eigenschaft mehr oder weniger, wenn die im §. 8 angedeutete Zerlegung erst ausgeführt werden muss, weil die Algebra bis jetzt noch keine andere mehr symmetrische Lösung des allgemeinen Problemes der Zerlegung aufweisen kann als die dort angegebene. Eine solche symmetrische Zerlegung hat aber auch einen bedeutenden Einfluss auf die Form der Endresultate, da die Functionen $\varpi(u)$, wie ich in §. 8 gezeigt habe, durch diejenigen Werthe sich bestimmen, welche den Gleichungen $u = 0$, $f(xx) = 0$ genügen, diese aber dieselbe Irrationalität voraussetzen, welche bei der Zerlegung angewendet werden muss, und auf welche die Bestimmung der Wurzeln der Gleichungen $f(xx) = 0$, $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$ führt, wenn Φ den Nenner des Integrales bezeichnet.

Um nun zu zeigen, wie die Endformen sich bei symmetrischer Zerlegung ändern, will ich einen speciellen Fall, in welchem die letztere vollständig ausführbar ist, und der überdies eine ausgedehnte Anwendung findet, hier durchführen, nachdem ich das folgende Theorem bewiesen habe, welches überhaupt bei Untersuchungen der Art fundamental ist.

Theorem V.

Wenn man das allgemeine Integral

$$\Omega = \int \frac{\Pi(x_1, x_2, x_3)\, \Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)}$$

durch lineare Substitution transformirt, und sowohl die neuen Variabeln als die neuen Constanten mit Indices versieht, so geht immer Ω in ein der Form nach unverändertes ähnliches Integral:

$$\Omega' = \int \frac{\Pi'(x_1', x_2', x_3')\, \Sigma \pm \xi_1' x_2' dx_3'}{f'(\xi' x')}$$

über, multiplicirt mit der Determinante der Substitutionscoefficienten, oder es ist, wenn r die letztere bezeichnet,

$$\Omega = r . \Omega'.$$

Der Beweis ist sehr einfach; da Π der Voraussetzung nach in Π' übergeht, so hat man nur $\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3$ und $f(\xi x)$ in ihre entsprechenden zu verwandeln. Es ist aber nach einem bekannten Determinantensatz

$$\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3 = r . \Sigma \pm \xi_1' x_2' dx_3',$$

und überdies

$$f(\xi x) = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{df'}{dx_k'} \left(\xi_1 \frac{dx_k'}{dx_1} + \xi_2 \frac{dx_k'}{dx_2} + \xi_3 \frac{dx_k'}{dx_3} \right) = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{df'}{dx_k'} \xi_k' = f'(\xi' x').$$

§. 14.

Symmetrische Entwicklung von $\int \frac{(a_1x+a_2y+a_3)}{\Phi(x,y)} \frac{dx}{\frac{1}{2}f'(y)}$, wenn $\Phi(x,y)$ eine beliebige Function zweiter Ordnung ist.

Das Integral geht durch die homogene Umformung von §. 2 in

$$(1.) \qquad J = \int \frac{a.\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\Phi(xx).f(\xi x)}$$

über, wenn

$$(2.) \qquad \begin{cases} f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma a_{k\lambda}x_k x_\lambda = f(xx), \\ \Phi(x_1,x_2,x_3) = \Sigma b_{k\lambda}x_k x_\lambda = \Phi(xx) \end{cases}$$

geschrieben wird. Es ist bekannt, dass man die beiden Functionen f und Φ durch lineare Substitutionen gleichzeitig in die Summe von Quadraten zerlegen kann. Setzt man nämlich die ersteren

$$(3.) \qquad x_k = \alpha_k x_1' + \beta_k x_2' + \gamma_k x_3',$$

und verlangt, dass

$$(4.) \qquad \begin{cases} f(xx) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2, \\ \Phi(xx) = g_1 x_1'^2 + g_2 x_2'^2 + g_3 x_3'^2 \end{cases}$$

werden soll, so hat man zur Bestimmung der Constanten g_k die in Bezug auf g cubische Gleichung:

$$(5.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} b_{11}-ga_{11}, & b_{12}-ga_{12}, & b_{13}-ga_{13} \\ b_{12}-ga_{12}, & b_{22}-ga_{22}, & b_{23}-ga_{23} \\ b_{13}-ga_{13}, & b_{23}-ga_{23}, & b_{33}-ga_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

und zur Bestimung der Determinante der Substitution

$$r = \Sigma \pm \alpha_1\beta_2\gamma_3$$

die Gleichung:

$$(6.) \qquad r^2(aaa) = 1.$$

$(aaa) = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}$ bezeichnet die Invariante von f und ist der Coefficient von $-g^3$ in der cubischen Gleichung (5.).

Aus (4.) kann man die Gleichung

$$\Phi(xx) - g_1 f(xx) = (g_2-g_1)x_1^2 - (g_1-g_3)x_2^2$$

ableiten, oder wenn man

$$(7.) \qquad \sqrt{g_3-g_2} = h_1, \quad \sqrt{g_1-g_3} = h_2, \quad \sqrt{g_2-g_1} = h_3$$

setzt, die erste der folgenden:

$$(8.)\quad \begin{cases} \Phi(xx)-g_1 f(xx) = (h_3x_2'+h_2x_3')(h_3x_2'-h_2x_3'), \\ \Phi(xx)-g_2 f(xx) = (h_1x_3'+h_3x_1')(h_1x_3'-h_3x_1'), \\ \Phi(xx)-g_3 f(xx) = (h_2x_1'+h_1x_2')(h_2x_1'-h_1x_2'); \end{cases}$$

die anderen beiden ergeben sich ebenso.

Denkt man sich J vermittelst der Substitutionen (3.) transformirt, so erhält man nach Theorem V. §. 13

$$(9.)\quad J = r\cdot\int\frac{(a_1'x_1'+a_2'x_2'+a_3'x_3')\Sigma\pm\xi_1'x_2'dx_3'}{\Phi'(x'x')(x_1'\xi_1'+x_2'\xi_2'+x_3'\xi_3')},$$

weil $f'(x'\xi')=x_1'\xi_1'+x_2'\xi_2'+x_3'\xi_3'$ wird. Dieses Integral zerfällt in drei Theile, welche die Coefficienten von a_1', a_2', a_3' sind. Es ist aber durch (8.) die Factorenzerlegung des Nenners in der transformirten Form ausgeführt, und man kann daher, weil $f'(x'x')=0$ ist, jedes der drei Factorenpaare der rechten Seite von (8.) nach beliebiger Wahl statt $\Phi'(x'x')$ setzen, *also auch im Coefficienten von a_1' von* (9.) *das erste, im Coefficienten von a_2' das zweite, im Coefficienten von a_3' das dritte, was*

$$(10.)\quad \begin{cases} J = ra_1'\int\frac{x_1'\Sigma\pm\xi_1'x_2'dx_3'}{(h_3x_2'+h_2x_3')(h_3x_2'-h_2x_3')(x_1'\xi_1'+x_2'\xi_2'+x_3'\xi_3')} \\ \quad +ra_2'\int\frac{x_2'\Sigma\pm\xi_1'x_2'dx_3'}{(h_1x_3'+h_3x_1')(h_1x_3'-h_3x_1')(x_1'\xi_1'+x_2'\xi_2'+x_3'\xi_3')} \\ \quad +ra_3'\int\frac{x_3'\Sigma\pm\xi_1'x_2'dx_3'}{(h_2x_1'+h_1x_2')(h_2x_1'-h_1x_2')(x_1'\xi_1'+x_2'\xi_2'+x_3'\xi_3')} \end{cases}$$

giebt. Es sind nun in allen drei Integralen die Factoren ξ_k' willkürlich, weil nach §. 2 jedes Integral von denselben unabhängig ist, daher kann man $\xi_1'=1$, $\xi_2'=0$, $\xi_3'=0$ im ersten, $\xi_1'=0$, $\xi_2'=1$, $\xi_3'=0$ im zweiten, $\xi_1'=0$, $\xi_2'=0$, $\xi_3'=1$ im dritten setzen und erhält dadurch

$$J = ra_1'\int\frac{(x_2'dx_3'-x_3'dx_2')}{(h_3x_2'+h_2x_3')(h_3x_2'-h_2x_3')}+ra_2'\int\frac{x_3'dx_1'-x_1'dx_3'}{(h_1x_3'+h_3x_1')(h_1x_3'-h_3x_1')}$$
$$+ra_3'\int\frac{x_1'dx_2'-x_2'dx_1'}{(h_2x_1'+h_1x_2')(h_2x_1'-h_1x_2')},$$

welche alle drei exact sind, denn setzt man z. B. im ersten $\frac{h_3x_2'+h_2x_3'}{h_3x_2'-h_2x_3'}=z$, so geht es in $\frac{1}{2h_2h_3}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2h_2h_3}lz$ über, daher wird

$$(11.)\quad J = \frac{ra_1'}{2h_2h_3}l\frac{h_3x_2'+h_2x_3'}{h_3x_2'-h_2x_3'}+\frac{ra_2'}{2h_1h_3}l\frac{h_1x_3'+h_3x_1'}{h_1x_3'-h_3x_1'}+\frac{ra_3'}{2h_1h_2}l\frac{h_2x_1'+h_1x_2'}{h_2x_1'-h_1x_2'},$$

welcher Ausdruck nur noch in die ursprünglichen Variabeln zu übertragen ist. Hierzu bemerke man, dass die algebraische Function unter dem Logarithmus

jedesmal der Quotient der beiden linearen Factoren eines Factorenpaares aus (8.) ist. Führt man daher in den *ursprünglichen* Variabeln die Zerlegung der Function $\Phi(xx)-gf(xx)$ aus und setzt

$$(12.) \qquad \Phi(xx)-gf(xx) = P.Q,$$

nachdem man für g eine Wurzel der cubischen Gleichung (5.) genommen hat, so kann P und Q höchstens in constanten Factoren von den aus (8.) entnommenen abweichen; da aber constante Multiplicatoren der Function unter dem Logarithmuszeichen gegen die willkürliche Constante des Integrals fortfallen, so kann man ohne Weiteres die Factoren aus (12.) statt aus (8.) entnehmen. Schreibt man daher die den g_1, g_2, g_3 entsprechenden Factoren respective P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, so wird

$$J = \frac{ra'_1}{2h_2h_3} l\frac{P_1}{Q_1} + \frac{ra'_2}{2h_3h_1} l\frac{P_2}{Q_2} + \frac{ra'_3}{2h_1h_2} l\frac{P_3}{Q_3},$$

und es bleibt nur noch die Uebertragung der constanten Coefficienten. Bezeichnet man hierzu mit

$$\Gamma'_{g_1}(uu), \qquad \Gamma'_{g_2}(uu), \qquad \Gamma'_{g_3}(uu)$$

die *zugehörigen Formen der quadratischen Functionen*

$$\Phi(xx)-g_1f(xx), \quad \Phi(xx)-g_2f(xx), \quad \Phi(xx)-g_3f(xx)$$

und bemerkt, dass

$$r^2.\Gamma'_g(uu) = \Gamma''_g(u'u') = (g_2-g)(g_3-g)u'^2_1+(g_3-g)(g_1-g)u'^2_2+(g_1-g)(g_2-g)u'^2_3$$

ist, so folgt nach Substitution von a_k für u_k und $g = g_1$:

$$r^2.\Gamma'_{g_1}(aa) = \Gamma''_{g_1}(a'a') = (g_2-g_1)(g_3-g_1)a'^2_1 = -h_3^2h_2^2a'^2_1$$

und Aehnliches für die beiden anderen, also

$$(13.) \qquad \begin{cases} a'_1 = \dfrac{r}{h_2h_3}\sqrt{-\Gamma'_{g_1}(aa)}, \\ a'_2 = \dfrac{r}{h_1h_3}\sqrt{-\Gamma'_{g_2}(aa)}, \\ a'_3 = \dfrac{r}{h_1h_2}\sqrt{-\Gamma'_{g_3}(aa)}, \end{cases}$$

wobei noch hervorzuheben ist, dass, wie bekannt, Γ'_{g_1}, Γ'_{g_2}, Γ'_{g_3} vollständige Quadrate sind, weil ihre ursprünglichen Formen in Factoren zerfallen. Es wird daher

$$J = \frac{r^2.\sqrt{-\Gamma_{g_1}(aa)}}{2h_2^2h_3^2} l\frac{P_1}{Q_1} + \frac{r^2.\sqrt{-\Gamma_{g_2}(aa)}}{2h_1^2h_3^2} l\frac{P_2}{Q_2} + \frac{r^2.\sqrt{-\Gamma_{g_3}(aa)}}{2h_1^2h_2^2} l\frac{P_3}{Q_3}.$$

Da schliesslich statt (5.) auch gesetzt werden kann:

$$\Delta = (aaa)(g_1-g)(g_2-g)(g_3-g),$$

also

$$\frac{d\Delta}{dg_1} = (aaa)(g_2-g_1)(g_3-g_1),$$

oder auch, wenn man (6.) und (7.) berücksichtigt und dasselbe nach g_2 und g_3 ausführt:

$$\frac{d\Delta}{dg_1} = -\frac{h_2^2 h_3^2}{r^2}, \quad \frac{d\Delta}{dg_2} = -\frac{h_1^2 h_3^2}{r^2}, \quad \frac{d\Delta}{dg_3} = -\frac{h_1^2 h_2^2}{r^2},$$

so folgt endlich

$$(14.) \quad J = \frac{\sqrt{-I_{g_1}(aa)}}{2\frac{d\Delta}{dg_1}} l\frac{P_1}{Q_1} + \frac{\sqrt{-I_{g_2}(aa)}}{2\frac{d\Delta}{dg_2}} l\frac{P_2}{Q_2} + \frac{\sqrt{-I_{g_3}(aa)}}{2\frac{d\Delta}{dg_3}} l\frac{P_3}{Q_3},$$

also

Theorem VI.

Um $\int \frac{(a_1x+a_2y+a_3)\,dx}{\Phi(x,y)\cdot\frac{1}{2}f'(y)}$ *und als speciellen Fall hiervon* $\int \frac{dx}{\Phi(x,y)}$ *(wenn man nämlich* $a_1=a_{12}$, $a_2=a_{22}$, $a_3=a_{23}$ *setzt) auszuwerthen, wo* $\Phi(x,y)$ *eine beliebige ganze Function zweiter Ordnung ist, bestimme man eine Constante* g *so, dass* $\Phi-g.f$ *in zwei Factoren zerfällt, was mit Hülfe der bekannten cubischen Gleichung* $\Delta=0$ (5.) *ausführbar ist, und daher drei Lösungen liefert. Bildet man dann den Quotienten der Factoren jedes Factorenpaares, in welches* $\Phi-gf$ *zerfällt, so ist der Werth des Integrals gleich der Summe der Logarithmen der drei Quotienten, die ersten multiplicirt mit Constanten. Um diese Constanten zu erhalten, hat man für jede Wurzel* g *die zugehörige Form zu* $\Phi-gf$ *mit* a_1, a_2, a_3 *als Variabeln zu bilden, welche ein vollständiges Quadrat ist, und die Quadratwurzel aus dieser negativ genommenen Form durch die doppelte Ableitung von* Δ *nach der betreffenden Wurzel* g *zu dividiren.*

Dieses ist die Entwicklung, welche §. 7 unter der Voraussetzung, dass die Factorenzerlegung des Nenners noch auszuführen ist, in unsymmetrischer Form liefert. Ist der Nenner bereits als ein zerlegter gegeben, so bleibt das in §. 7 gegebene Endresultat bestehen.

§. 15.

Symmetrische Entwicklung von $\int \frac{b^2\Sigma\pm\xi_1x_2\,dx_3}{u.\Phi(xx).f(\xi x)}$, wenn Φ eine homogene Function der zweiten Ordnung ist, und b^2 eine andere beliebige Function zweiter Ordnung vertritt.

Ich behalte die Bezeichnungen des vorigen §. bei und füge dem Nenner des Integrals noch eine lineare Function u als Factor hinzu, so dass der Zähler von der zweiten Ordnung genommen werden muss.

Man überzeugt sich sofort, dass es möglich ist, die folgende Identität herzustellen:

$$(1.) \qquad b^2 = \lambda\Phi(xx)+\lambda_1 f(xx)+\mu\Sigma\pm u_1\chi_2\varphi_3+au,$$

worin $\chi_k=\frac{1}{2}f'(x_k)$, $\varphi_k=\frac{1}{2}\Phi'(x_k)$ der Kürze halber gesetzt ist, und λ, λ_1, μ, sowie die Coefficienten von a, nämlich a_1, a_2, a_3 zu bestimmende Constanten sind; denn man erhält durch Gleichsetzung der gleichen Potenzen und Producte x_k auf beiden Seiten von (1.) sechs Gleichungen zur Bestimmung derselben, deren Auflösung in der Folge gegeben werden soll.

Man denke sich aber zunächst den Werth von (1.) in das gesuchte Integral substituirt, so erhält man, weil $f(xx)=0$, also das zweite Glied auf der rechten Seite von (1.) unberücksichtigt bleiben kann:

$$\int\frac{b^2\Sigma\pm\xi_1x_2dx_3}{u.\Phi(xx).f(\xi x)}=\lambda\int\frac{\Sigma\pm\xi_1x_2dx_3}{u.f(\xi x)}+\mu\int\frac{\Sigma\pm u_1\chi_2\varphi_3.\Sigma\pm\xi_1x_2dx_3}{u.\Phi(xx).f(\xi x)}+\int\frac{a\Sigma\pm\xi_1x_2dx_3}{\Phi(xx).f(\xi x)}.$$

Das erste dieser Integrale ist $\varpi(u)$, das zweite wird auf ein exactes zurückgeführt, wenn man $\xi_1=u_2\varphi_3-u_3\varphi_2$, $\xi_2=u_3\varphi_1-u_1\varphi_3$, $\xi_3=u_1\varphi_2-u_2\varphi_1$ setzt, indem sich dasselbe dann, nach §. 2 (16.) und weil $\Sigma\pm u_1\chi_2\varphi_3=f(\xi x)$ wird, auf $\int\frac{\frac{1}{2}(u\,d\Phi-\Phi du)}{\Phi.u}=\frac{1}{2}\int\frac{d\frac{\Phi}{u^2}}{\frac{\Phi}{u^2}}=\frac{1}{2}l\left(\frac{\Phi}{u^2}\right)$ reducirt, das dritte ist das in §. 14 behandelte J, *daher folgt in schliesslicher Endform:*

$$(2.) \qquad \int\frac{b^2.\Sigma\pm\xi_1x_2dx_3}{u.\Phi(xx).f(\xi x)}=\lambda\varpi(u)+\frac{\mu}{2}l\left(\frac{\Phi}{u^2}\right)+J,$$

und da die Anzahl der in J enthaltenen Logarithmen drei beträgt, so ist es dadurch in seiner normalen Anzahl von fünf Logarithmen dargestellt.

Es bleibt die Bestimmung der sechs Constanten λ, λ_1, μ, a_1, a_2, a_3, welche durch Auflösung der in (1.) enthaltenen sechs linearen Gleichungen erfolgen kann. Man gelangt kürzer zum Ziele, wenn man zunächst die Constanten λ und μ dadurch bestimmt, dass man in (1.) die beiden Wurzelpaare der Gleichungen $f(xx)=0$, $u=0$ substituirt, wodurch (1.) in

$$(3.) \qquad b^2 = \lambda\Phi(xx)+\mu\Sigma\pm u_1\chi_2\varphi_3$$

übergeht, oder, weil nach §. 3 (1.) die Gleichungen $f(xx)=0$, $u=0$ durch die linearen Gleichungen:

$$(4.) \qquad \gamma.x_1=u_2\chi_3-u_3\chi_2, \quad \gamma.x_2=u_3\chi_1-u_1\chi_3, \quad \gamma.x_3=u_1\chi_2-u_2\chi_1$$

aufgelöst werden und diese die Identität

$$\Sigma\pm u_1\chi_2\varphi_3=\gamma\Sigma x_1\varphi_1=\gamma\Phi(xx)$$

herbeiführen, so folgt aus (3.)

$$(5.) \qquad \lambda+\mu\gamma = \frac{b^2}{\Phi(xx)},$$

und wenn x'_k das zweite Wurzelpaar ist, welches den Gleichungen (4.) genügt, da dann nach §. 3 γ in $-\gamma$ übergeht,

$$(6.) \qquad \lambda-\mu\gamma = \frac{b'^2}{\Phi(x'x')},$$

woraus λ und μ als symmetrische Functionen der Wurzeln aus (4.) sich ergeben. Die Uebertragung in die rationale Form ist sehr einfach, da die einzige Irrationalität γ die einer reinen quadratischen Gleichung ist, man muss aber hierzu die zugehörigen Formen $I'(uu)$ und $\mathrm{G}(uu)$ respective zu $\Phi(xx)$ und $f(xx)$ einführen und die simultane zugehörige Form $\mathrm{H}(uu)$, welche aus $I'(uu)$ hervorgeht, wenn man letztere nach den in ihr vorkommenden Coefficienten von Φ differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Coefficienten von f substituirt. Setzt man noch der Kürze halber

$$R = 4\mathrm{G}(uu)I'(uu)-\mathrm{H}^2(uu)$$

(R ist die Discriminante des Systemes f, Φ, u) ferner $b_2u_3-b_3u_2=\eta_1$, $b_3u_1-b_1u_3=\eta_2$, $b_1u_2-b_2u_1=\eta_3$, so folgt aus (5.) und (6.) nach einigen Reductionen:

$$(7.) \qquad \lambda = \frac{2\Phi(\eta\eta)\mathrm{G}(uu)-f(\eta\eta)\mathrm{H}(uu)}{R}, \qquad \mu = \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma\pm u_1.f'(\eta_2)\Phi'(\eta_3)}{R}.$$

Man findet ferner durch Vertauschung der Functionen f und Φ sowie ihrer zugehörigen mit einander:

$$(8.) \qquad \lambda_1 = \frac{2f(\eta\eta)I'(uu)-\Phi(\eta\eta)\mathrm{H}(uu)}{R}.$$

Substituirt man diese Werthe in (1.), so erhält man

$$(9.) \qquad b^2-\lambda\Phi(xx)-\lambda_1 f(xx)-\mu_1\Sigma\pm u_1\chi_2\varphi_3 = a.u,$$

d. h. die linke Seite ist eine homogene Function zweiter Ordnung, welche in zwei Factoren zerfällt, deren einer u bekannt und rational ist; daher muss es auch der andere sein, welcher sich alsdann ergiebt:

$$(10.) \qquad \begin{cases} R.a = (2\mathrm{G}(bb)I'(uu)+2I'(bb)\mathrm{G}(uu)-\mathrm{H}(uu)\mathrm{H}(bb))u \\ \qquad +(\mathrm{H}(bu)\mathrm{H}(uu)+4\mathrm{G}(bu)I'(uu)+4I'(bu)\mathrm{G}(uu))b \\ \qquad +\tfrac{1}{4}f(x\eta)\Sigma f'(\eta_k).I''(u_k)+\tfrac{1}{4}\Phi(x\eta)\Sigma\Phi'(\eta_k)\mathrm{G}'(u_k). \end{cases}$$

Die hierzu erforderliche Rechnung wird erleichtert, wenn man für f und Φ ihre transformirten Formen aus §. 14 (4.) nimmt. Die Ausdrücke (7.), (8.), (9.)

sind schliessliche Endausdrücke und man kann in denselben sofort $b_k b_\lambda$ durch die entsprechenden Coefficienten einer beliebigen homogenen Function $F(x_1, x_2, x_3)$ zweiter Ordnung ersetzen, so dass durch (2.) die Entwicklung von

$$\int \frac{F(x_1, x_2, x_3)\,\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u.\Phi(x_1, x_2, x_3) f(\xi x)} = \int \frac{f(x, y)dx}{\Phi(x, y)(u_1 x + u_2 y + u_3)\frac{1}{2}f'(y)}$$

symmetrisch ausgeführt ist, wenn Theorem VI, §. 14 berücksichtigt wird.

Wenn man die Gleichung (2.) nach den Constanten u_k differentiirt und statt der Incremente jedesmal die entsprechenden b_k substituirt, so kann man den Zähler des Integrales auf jede beliebige Potenz erhöhen und dadurch den Endwerth des Integrales für jeden beliebigen Zähler erhalten. Die Differentiation auf der rechten Seite erstreckt sich auf rationale Functionen, wie aus (7.), (8.), (10.) ersichtlich ist und ausserdem auf $\varpi(u)$, welches in §. 4 behandelt ist, und führt nur noch algebraische Glieder herbei.

§. 16.

Ich will zum Schlusse noch zeigen, dass die Gleichung (2.) für den Fall verallgemeinert werden kann, in welchem statt des Nenners Φ von der zweiten Ordnung ein beliebiger von der n^{ten} Ordnung gegeben ist, nämlich *dass sich immer noch* $\int \frac{F.\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\Phi.u.f(\xi x)}$, *wo* F *ebenfalls von der* n^{ten} *Ordnung ist, auf* $\int \frac{F_0.\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\Phi.f(\xi x)}$ *reduciren lässt, in welchem* F_0 *eine bestimmte Function der* $(n-1)^{ten}$ *Ordnung ist, und der Factor* u *im Nenner fehlt.* Es ist in der That analog mit §. 15 (2.)

$$(1.)\quad \int \frac{F}{\Phi} \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{u.f(\xi x)} = \lambda \varpi(u) + \mu l \frac{\Phi}{u^n} + \int \frac{F_0}{\Phi} \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{f(\xi x)}.$$

Um dieses einzusehen sei wieder wie in §. 15 (1.)

$$\varphi_k = \frac{1}{n}\Phi'(x_k), \qquad \chi_k = \tfrac{1}{2}f'(x_k),$$

dann kann man immer λ und μ so bestimmen, dass für die beiden Werthensysteme der Variabeln, welche den Gleichungen $u = 0$, $f(xx) = 0$ genügen,

$$F - (\lambda\Phi + \mu\Sigma \pm u_1 \varphi_2 \chi_3) = 0$$

ist. Dieses geschieht genau so wie in §. 15 (3.), (5.), (6.). Alsdann wird aber für jeden Werth der Variabeln

$$(2.)\quad F - (\lambda\Phi + \mu\Sigma \pm u_1 \varphi_2 \chi_3) = F_0.u + \Psi.f$$

sein, wo F_0 eine gewisse Function der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und Ψ eine solche der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Setzt man nun $f=0$, so entsteht

$$(3.) \qquad F = \lambda\Phi + \mu\Sigma \pm u_1\varphi_2\chi_3 + F_0.u,$$

und substituirt man dies in den Zähler des gesuchten Integrales, so ergiebt sich die Integration wie in §. 15, und liefert die Gleichung (1.). Die Umformung (2.) besitzt eine Unbestimmtheit, die jedoch auf das Resultat (1.) keinen Einfluss ausübt. Man kann nämlich auf der rechten Seite von (2.) statt F_0, $F_0+\Theta.f$, statt Ψ, $\Psi-\Theta.u$ setzen, ohne dass dadurch ihr Werth geändert wird; Θ bezeichnet eine Function der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, deren Coefficienten ganz willkürlich sind. Da die Anzahl der letzteren $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ beträgt, so müssen in Folge dessen ebensoviel willkürlich bleiben, was auch mit der Gesammtzahl übereinstimmt; denn F_0 hat $\frac{n(n+1)}{2}$, Ψ hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Coefficienten. hierzu λ und μ, giebt n^2+2. Andererseits hat F, deren Coefficienten ausgedrückt werden sollen, deren $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, und es ist $n^2+2-\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ wirklich $=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Bemerkt man nun, dass die unbestimmte Function Θ in f multiplicirt ist, und sowohl in (3.) wie in (1.) $f=0$ gesetzt wird, so folgt, dass sie auf das Resultat keinen Einfluss ausübt.

Man kann von (1.) ausgehend, die Theorie der irrationalen Partialbrüche in einer etwas veränderten Fassung ableiten und überhaupt den obigen Ansatz (2.) noch verallgemeinern, sowie durch analoge Ansätze, in jedem zu behandelnden Falle, die Integration auf die hier entwickelten Principien zurückführen. Ich will hierfür nur noch einen Beleg geben, der auf einen sich unmittelbar dem in §. 15 behandelten Integral anschliessenden Fall Bezug hat.

Wenn F eine Function dritter Ordnung, Φ und Φ_1 zwei beliebige Functionen zweiter Ordnung sind, so kann man $\int \frac{F.\Sigma\pm\xi_1 x_2 dx_3}{\Phi.\Phi_1.f(\xi x)}$ dadurch ausführen, dass man eine algebraische Umformung macht, welche Herr *Hesse* im 28sten Bande pag. 73 dieses Journals angegeben hat. Bezeichnet man nämlich durch $\Sigma\pm\Phi'(x).\Phi_1'(x_2).f'(x_3)$ die Functionaldeterminante der drei Functionen Φ, Φ_1, f, welche eine Function der dritten Ordnung ist, so kann man immer λ und drei lineare Functionen a, b, c so bestimmen (im Ganzen zehn Constanten), dass identisch wird:

$$(4.) \qquad a\Phi + b\Phi_1 + cf + \lambda\Sigma\pm\Phi'(x_1)\Phi_1'(x_2)f'(x_3) = F.$$

Setzt man nun für F diesen Werth und $f = 0$, so wird

$$\int \frac{F.\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\Phi.\Phi_1.f(\xi x)}$$

$$= \int \frac{a.\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\Phi_1.f(\xi x)} + \int \frac{b.\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\Phi.f(\xi x)} + \lambda \int \frac{\Sigma \pm \Phi'(x_1).\Phi_1'(x_2).f'(x_3).\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\Phi.\Phi_1.f(\xi x)}.$$

Die beiden ersten Integrale sind die in §. 14 behandelten J, ich will sie durch J_1 und J bezeichnen, und das dritte reducirt sich vermittelst des in §. 2 (16.) angegebenen oft benutzten Determinantensatzes auf

$$\frac{\lambda}{2} \int \frac{\Phi_1 d\Phi - \Phi d\Phi_1}{\Phi\Phi_1} = \frac{\lambda}{2} l \frac{\Phi_1}{\Phi},$$

daher folgt

$$(5.) \quad \int \frac{F.\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\Phi.\Phi_1.f(\xi x)} = J + J_1 + \frac{\lambda}{2} l \frac{\Phi_1}{\Phi},$$

was die normalmässige Anzahl von sieben Logarithmen repräsentirt.

Ich glaube durch diese Darstellungen die Fruchtbarkeit des benutzten Principes hinlänglich dargethan zu haben und beabsichtige weitere Anwendungen desselben, welche über die Grenzen des hier behandelten Gebietes hinausgehen und auch die erste Veranlassung zu diesen Untersuchungen waren, denselben anzuschliessen.

Berlin, im Mai 1862.

Ueber das *Pfaff*sche Problem.

Zweite Abhandlung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

In einer ersten Abhandlung (dieses Journal Bd. 60, p. 193) habe ich den Gleichungen des *Pfaff*schen Problems eine neue Form gegeben, welche dieses Problem unter einem ganz neuen und fundamentalen Gesichtspunkte darstellt, indem durch dieselben zum ersten Male die Lösungen des *Pfaff*schen Problems durch ein unmittelbar zu bildendes System simultaner Gleichungen definirt erscheinen. Der Weg, welchen ich dort zur Aufstellung dieser Gleichungen eingeschlagen habe, und welcher zugleich auf eine Methode geführt hat, das *Pfaff*sche Problem mit Hülfe von möglichst wenig Integrationen zu lösen, brachte die erwähnte Form nicht unmittelbar, und ist nicht vollständig geeignet, die Natur der betreffenden Gleichungen ins rechte Licht zu setzen.

Ich werde daher in dem gegenwärtigen Aufsatze unmittelbar diese das *Pfaff*sche Problem definirenden Gleichungen ableiten, wobei sich einige merkwürdige Eigenschaften derselben ergeben werden; sodann aber werde ich von diesem System ausgehend eine Integrationsmethode angeben, welche die in dem früheren Aufsatze niedergelegte als speciellen Fall in sich enthält, und welche vielleicht die allgemeinste ist, die sich aus dem hier einmal festgehaltenen Gesichtspunkte entwickeln lässt. Dieselbe fordert nicht mehr Integrationen als die früher behandelte; sie ist wesentlich auf die Relationen gestützt, welche ich am Ende der erwähnten Abhandlung entwickelt habe, und welche für die bei der *Pfaff*schen Lösung des Problems auftretenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen von so grosser Wichtigkeit sind *).

*) Es sei mir erlaubt, an dieser Stelle nochmals auf die Vergleichung der Resultate meiner ersten Abhandlung mit denen des Herrn *Natani* zurückzukommen. Bezüglich der letzteren findet sich dort (Bd. 60 dieses Journals, p. 196) die irrthümliche Bemerkung, dass Herr *Natani* den Weg zur Integration seiner Systeme nicht vollständig angegeben habe. Dies ist allerdings in der Abhandlung des Herrn *Natani* (Bd. 58 dieses Journals, p. 301) vollständig geschehen; und man wird selbst finden, dass die von Herrn *Natani* in §. 10 seiner Abhandlung angegebene Methode genau auf dieselbe Anzahl geforderter Integrale zurückkommt, welche ich im Anschluss an die späteren Methoden *Jacobi*s angegeben habe.

§. 1.

Directe Ableitung der simultanen Differentialgleichungen, durch welche man die Lösungen des *Pfaff*schen Problems definiren kann.

Die Aufgabe, den Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in einen nur n Differentiale enthaltenden Ausdruck

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

zu transformiren, wird, wenn man beide Formen mit einander vergleicht und die Coefficienten der dx_i auf beiden Seiten einander gleichsetzt, durch das System von Gleichungen repräsentirt:

$$(1.)\quad \begin{cases} X_1 = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \\ X_2 = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{2n} = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} + \cdots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}}. \end{cases}$$

Die Aufgabe ist bekanntlich immer vollkommen bestimmt, sobald die aus den Ausdrücken

$$(2.)\quad a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildete Determinante

$$(3.)\quad D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{2n,2n}$$

nicht verschwindet; was hier immer vorausgesetzt werden soll.

Wendet man aber bei der Bildung der Ausdrücke (2.) die Gleichungen (1.) an, so erhält man auch

$$(4.)\quad a_{ik} = \Sigma_\lambda \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} \right),$$

und indem man die Determinante dieser Ausdrücke bildet, erkennt man, dass dieselbe sich in die beiden Factoren

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \cdot - \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} \cdot - \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+2}} \cdots - \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}},$$

und

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_{2n}}$$

auflöst, welche ausserdem mit einander offenbar identisch sind. Setzt man also

$$(5.) \qquad \Delta = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

so hat man

$$(6.) \qquad D = \Delta^2.$$

Aber nach einem bekannten Satze hat man auch noch, wenn D_{ik} die dem Elemente a_{ik} entsprechende Unterdeterminante von D ist:

$$(7.) \qquad D_{ik} = \Sigma_\lambda \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{dx_k}} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}} - \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}} \right).$$

Wenn nun D, also auch Δ, nicht verschwindet, so kann man immer ebensowohl die f, F als Functionen der x, wie umgekehrt die x als Functionen der f, F betrachten; und diese beiden Darstellungsweisen sind verbunden durch die Gleichungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}}, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}}.$$

Dividirt man also (7.) durch $D = \Delta^2$, so kann man für diese Gleichung auch schreiben:

$$(8.) \qquad \frac{D_{ik}}{D} = \Sigma_\lambda \left(\frac{\partial x_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial f_\lambda} \right).$$

Es ist bekannt, dass die Determinante D sich als das Quadrat eines aus den Grössen a_{ik} auf rationale Weise gebildeten Ausdrucks R darstellt. Bezeichnet man durch R_{ik} den Differentialquotienten von R nach a_{ik}, so erhält man durch Differentiation der Gleichung

$$R^2 = D$$

unmittelbar:

$$2R \cdot R_{ik} = D_{ik} - D_{ki} = 2D_{ik},$$

oder nach Division mit $R^2 = D$:

$$\frac{R_{ik}}{R} = \frac{D_{ik}}{D},$$

woher denn die Gleichung (8.) auch in der Form dargestellt werden kann:

$$(9.) \qquad \frac{R_{ik}}{R} = \Sigma_\lambda \left(\frac{\partial x_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial f_\lambda} \right).$$

Bezeichnet man nun durch (φ) und $[\varphi, \psi]$ die beiden Ausdrücke:

$$(10.)\quad \begin{cases} (\varphi) = \Sigma_i \Sigma_k \dfrac{R_{ik}}{R} X_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \\ [\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \dfrac{R_{ik}}{R} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_k}, \end{cases}$$

so ergiebt sich, indem man aus (9.) die Werthe der $\frac{R_{ik}}{R}$ und aus (1.) die Werthe der X einführt:

$$\begin{aligned} (\varphi) &= \Sigma_i \Sigma_k \Sigma_\mu \Sigma_\lambda F_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial f_\lambda} \right) \\ &= \Sigma_\mu F_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial F_\mu}, \\ [\varphi, \psi] &= \Sigma_i \Sigma_k \Sigma_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial f_\lambda} \right) \\ &= \Sigma_\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial F_\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial F_\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial f_\lambda} \right). \end{aligned}$$

Den Inhalt dieser Gleichungen kann man durch folgendes Theorem darstellen:

Theorem 1.

Seien $X_1, X_2, \ldots X_{2n}$ beliebige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$, welche der einzigen Bedingung genügen, dass die Determinante der aus ihnen gebildeten Ausdrücke

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

nicht verschwindet. Sei ferner R der rationale Ausdruck, dessen Quadrat der Determinante der a_{ik} gleich ist, und sei

$$R_{ik} = \frac{\partial R}{\partial a_{ik}};$$

bezeichnen wir endlich durch φ, ψ beliebige Functionen und durch (φ), $[\varphi, \psi]$ die Ausdrücke:

$$(\varphi) = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}.$$

Hat man dann solche $2n$ Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n, F_1, F_2, \ldots F_n$ gefunden, dass identisch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n,$$

und drückt φ und ψ, statt durch die x, durch diese Functionen aus, so ist immer:

$$(11.)\quad \begin{cases} (\varphi) = \Sigma_\mu F_\mu \dfrac{\partial \varphi}{\partial F_\mu}, \\ [\varphi, \psi] = \Sigma_\mu \Big(\dfrac{\partial \varphi}{\partial F_\mu} \dfrac{\partial \psi}{\partial f_\mu} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial f_\mu} \dfrac{\partial \psi}{\partial F_\mu} \Big). \end{cases}$$

Setzt man nun in diesen Gleichungen für φ und ψ irgend welche der Functionen f und F, so ergiebt sich aus der ersten Gleichung sofort:

$$(12.)\qquad (f_i) = 0, \qquad (F_i) = F_i;$$

aus der zweiten aber:

$$(13.)\qquad [f_i, f_k] = 0, \quad [F_i, F_k] = 0, \quad [F_i, f_k] = 0,$$

und nur, wenn in der letzten Gleichung $i = k$ wird, hat man:

$$(14.)\qquad [F_i, f_i] = 1.$$

Diese Gleichungen, denen sonach die Lösungen des *Pfaff*schen Problems zu genügen haben, führen auf folgendes Theorem:

Theorem 2.

Bei übrigens gleichen Bezeichnungen wie im ersten Theorem genügen die Functionen F, f, welche durch die identische Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

bestimmt sind, folgenden $n(2n+1)$ Gleichungen:

$$[f_i, f_k] = 0, \quad [F_i, F_k] = 0, \quad [F_i, f_k] = 0, \quad [F_i, f_i] = 1,$$
$$(f_i) = 0, \qquad (F_i) = F_i,$$

wo in den ersten drei Gleichungen i und k als ungleich vorausgesetzt werden.

Bezeichnet man also als Integrale des *Pfaff*schen Problems die n Gleichungen:

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ willkürliche Constanten bedeuten, welche in den Functionen f nicht vorkommen, so hat man insbesondere das Theorem:

Theorem 3.

Diejenigen n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche, gleich willkürlichen Constanten gesetzt, die Integrale der Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

bilden, sind durch folgende $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen definirt:

$$(15.)\qquad (f_i) = 0, \qquad [f_i, f_k] = 0.$$

§. 2.

Andere Ableitung, nebst dem Beweise, dass die aufgestellten Gleichungen hinreichend sind.

Auf dem im Vorigen eingeschlagenen Wege gelangt man leicht zu $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen, welchen die Functionen f *genügen* müssen. Hingegen scheint es sehr schwierig, in ähnlicher Weise den Nachweis zu führen, dass diese Gleichungen auch *hinreichen*, d. h. dass, sobald ein beliebiges System von Functionen gefunden ist, welches den Gleichungen (15.) genügt, sich immer die Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ so bestimmen lassen, dass die $2n$ Gleichungen (1.) gleichzeitig erfüllt werden. Man kann aber einen ganz anderen Weg einschlagen, um sowohl die Nothwendigkeit der Formeln (15.) als auch umgekehrt die Hinlänglichkeit dieser Gleichungen zu beweisen. Dieser Weg scheint mir um so merkwürdiger, als er die ganze Untersuchung von der Aufstellung einer einzigen identischen Gleichung abhängig macht, welche so gewissermassen den Kern für die hier gegebene Behandlungsweise des *Pfaff*schen Problems bildet. Dieser Weg ist folgender.

Die Gleichungen (1.), $2n$ an der Zahl, sind linear in Bezug auf die Functionen F. Man kann also aus je $n+1$ dieser Gleichungen jene Functionen eliminiren, und erhält, da dies auf

$$2n.2n-1.2n-2 \ldots n+2$$

Weisen geschehen kann, ebenso viel Gleichungen für die Functionen f, welche sämmtlich die Gestalt einer Determinante, gleich Null gesetzt, annehmen. Diese Gleichungen können jedenfalls als hinreichend zur Bestimmung der f angesehen werden, da man von ihnen in jedem Augenblick zu den Gleichungen (1.) zurückkehren kann. Alle diese Gleichungen aber lassen sich in eine einzige Determinante zusammenfassen, nämlich in die Gleichung:

$$(16.)\quad V = 0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{dx_1} & X_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n-1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & X_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}} & X_{2n} & \alpha_{2n,1} & \alpha_{2n,2} & \ldots & \alpha_{2n,n-1} \end{vmatrix},$$

vorausgesetzt dass man annimmt, *der Ausdruck V solle verschwinden, welche Werthe man auch den Grössen α beilege.*

Die Gleichung (16.) kann also als hinreichend zur Bestimmung der Functionen f angesehen werden.

Ich multiplicire jetzt den Ausdruck V mit der Determinante der Grössen $\frac{D_{ik}}{D}$ oder $\frac{R_{ik}}{R}$, welche gleich $\frac{1}{D}$ oder gleich $\frac{1}{R^2}$ ist. Das entstehende Product kann man bekanntlich wieder als Determinante darstellen, und zwar, wenn man der Kürze wegen für den Augenblick die Bezeichnungen einführt:

$$(17.)\quad \begin{cases} \Sigma_i \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial f_h}{\partial x_i} = \varphi_{k,h}, \\ \Sigma_i \frac{R_{ik} X_i}{R} = Y_k, \\ \Sigma_i \frac{R_{ik} \alpha_{i,h}}{R} = \beta_{k,h}, \end{cases}$$

wird die resultirende Gleichung:

$$(18.)\quad 0 = \frac{V}{D} = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \cdots & \varphi_{1,n} & Y_1 & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{2,n} & Y_2 & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{2n,1} & \varphi_{2n,2} & \cdots & \varphi_{2n,n} & Y_{2n} & \beta_{2n,1} & \beta_{2n,2} & \cdots & \beta_{2n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Ich werde dies jetzt mit V multipliciren und also den Ausdruck $\frac{V^2}{D}$ bilden. Das Product wird abermals eine Determinante, und zwar sind die Elemente derselben:

$$\Sigma_k \varphi_{k,h} \frac{\partial f_m}{\partial x_k} = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \frac{\partial f_m}{\partial x_k} = [f_h, f_m] = -[f_m, f_h],$$

$$\Sigma_k \varphi_{k,h} X_k = -\Sigma_i \frac{\partial f_h}{\partial x_i} Y_i = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_k \frac{\partial f_h}{\partial x_i} = -(f_h),$$

$$\Sigma_k \varphi_{k,h} \alpha_{k,m} = -\Sigma_i \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \beta_{i,m} = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \alpha_{k,m} \frac{\partial f_h}{\partial x_i} = -\gamma_{m,h},$$

$$\Sigma_k Y_k \alpha_{k,m} = -\Sigma_i X_i \beta_{i,m} = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \alpha_{k,m} = -\delta_m,$$

$$\Sigma_k \beta_{k,h} \alpha_{k,m} = \Sigma_k \Sigma_i \frac{R_{ik}}{R} \alpha_{i,h} \alpha_{k,m} = \varepsilon_{h,m} = -\varepsilon_{m,h};$$

man erhält also folgende identische Gleichung:

$$(19.)\quad \frac{V^2}{D}=\begin{vmatrix}
0 & [f_2,f_1] & [f_3,f_1] & \cdots & [f_n,f_1] & (f_1) & \gamma_{1,1} & \gamma_{2,1} & \cdots & \gamma_{n-1,1}\\
-[f_2,f_1] & 0 & [f_3,f_2] & \cdots & [f_n,f_2] & (f_2) & \gamma_{1,2} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{n-1,2}\\
-[f_3,f_1] & -[f_3,f_2] & 0 & \cdots & [f_n,f_3] & (f_3) & \gamma_{1,3} & \gamma_{2,3} & \cdots & \gamma_{n-1,3}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-[f_n,f_1] & -[f_n,f_2] & -[f_n,f_3] & \cdots & 0 & (f_n) & \gamma_{1,n} & \gamma_{2,n} & \cdots & \gamma_{n-1,n}\\
-(f_1) & -(f_2) & -(f_3) & \cdots & -(f_n) & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_{n-1}\\
-\gamma_{1,1} & -\gamma_{1,2} & -\gamma_{1,3} & \cdots & -\gamma_{1,n} & -\delta_1 & 0 & \varepsilon_{1,2} & \cdots & \varepsilon_{1,n-1}\\
-\gamma_{2,1} & -\gamma_{2,2} & -\gamma_{2,3} & \cdots & -\gamma_{2,n} & -\delta_2 & -\varepsilon_{1,2} & 0 & \cdots & \varepsilon_{2,n-1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-\gamma_{n-1,1} & -\gamma_{n-1,2} & -\gamma_{n-1,3} & \cdots & -\gamma_{n-1,n} & -\delta_{n-1} & -\varepsilon_{1,n-1} & -\varepsilon_{2,n-1} & \cdots & 0
\end{vmatrix}.$$

In dieser Gleichung ist nun in der That der Beweis enthalten, sowohl dass die Gleichungen (15.) für die Functionen f bestehen müssen, als auch dass sie zur Definition derselben hinreichen. Das letztere namentlich sieht man sofort ein. Denn verschwinden sämmtliche Elemente $[f_i, f_k]$, (f_i), so werden $(n+1)^2$ Elemente der Determinante (19.) gleich Null, welche ein Quadrat bilden, und somit verschwindet die Determinante, welches auch die Werthe der Elemente γ, δ, ε oder der Grössen α sein mögen. Man hat somit immer $V=0$, und hierdurch ist das folgende Theorem nachgewiesen:

Theorem 4.

Wenn irgend n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ so bestimmt werden, dass sie den Gleichungen

$$(f_i)=0, \qquad [f_i, f_k]=0$$

genügen, so kann man immer die n Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ so bestimmen, dass sie den 2n Gleichungen

$$\begin{aligned}
X_1 &= F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\cdots+F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_1},\\
X_2 &= F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\cdots+F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_{2n} &= F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}}+F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}}+\cdots+F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}}
\end{aligned}$$

gleichzeitig genügen, oder man kann die Gleichungen

$$f_1=\text{Const.}, \quad f_2=\text{Const.}, \quad \ldots \quad f_n=\text{Const.}$$

als die Integrale der Differentialgleichung

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots+X_{2n}dx_{2n}=0$$

betrachten.

Aber auch die *Nothwendigkeit* der Gleichungen (15.) lässt sich unmittelbar aus der identischen Gleichung (19.) ableiten. Aus dieser Gleichung geht, indem man auf beiden Seiten, was immer auf rationale Weise geschehen kann, die Quadratwurzel zieht, die Gleichung hervor:

$$(20.) \qquad \frac{V}{R} = \Theta,$$

wo Θ den aus den Grössen $[f_i, f_k]$, (f_i), γ, δ, ε gebildeten rationalen Ausdruck bedeutet, dessen Quadrat die Determinante in (19.) ergiebt. Bestimmt man aber die $2n.n-1$ beliebigen Grössen α so, dass zuvörderst sämmtliche Grössen ε, deren Zahl $\frac{n.n-1}{2}$ ist, verschwinden, so wird jene Determinante eine homogene Function zweiter Ordnung der Grössen (f_i) und $[f_i, f_k]$, und Θ ist also eine lineare Function dieser Grössen. Wenn man daher Θ in die Form setzt:

$$\Theta = \eta_1(f_1)+\eta_2(f_2)+\cdots+\eta_n(f_n)+\zeta_{12}[f_1, f_2]+\zeta_{13}[f_1, f_3]+\cdots+\zeta_{n-1,n}[f_{n-1}, f_n],$$

so wird man vermöge der Willkürlichkeit der α auch noch den $\frac{n.n+1}{2}$ Grössen ζ, η alle möglichen Werthe beilegen dürfen, und die Gleichung $V=0$, welche die Gleichung $\Theta=0$ mit sich führt, bedingt also, da sie für alle Werthe der α bestehen soll, die Existenz der $\frac{n.n+1}{2}$ einzelnen Gleichungen

$$(f_i)=0, \qquad [f_i, f_k]=0.$$

Die Gleichung (20.) setzt uns also in Stand, aus einer linearen Combination der aus (1.) direct fliessenden Bedingungsgleichungen zu der Form (15.) und umgekehrt von dieser zu der ersteren zurückzukehren.

§. 3.

Directer Beweis der zwischen den Operationen (φ) und $[\varphi, \psi]$ bestehenden Beziehungen.

Wenn man ein System simultaner partieller Differentialgleichungen nach Art des Systems (15.) zu integriren hat, so wird man zunächst immer untersuchen, ob sich durch Differentiation aus dem gegebenen System neue Gleichungen ableiten lassen, welche ebenfalls nur *erste* Differentialquotienten enthalten; wodurch denn die Anzahl der Gleichungen des Systems vermehrt und die Integration derselben wesentlich erleichtert wird. Aber wenn man bei dem System (15.) dergleichen Operationen ausführt, welche neue Differentialgleichungen zu liefern geeignet sind, so findet man, dass das Resultat

immer identisch verschwindet, und man gelangt zugleich zu dem directen Beweise der zwischen den Operationen (φ) und $[\varphi, \psi]$ eintretenden Beziehungen, welche ich zuerst in der ersten dieser Abhandlungen gegeben habe, und auf denen die Integration des Systems (15.) wesentlich beruht.

Man erhält nämlich sofort, wenn φ, ψ, χ ganz beliebige Functionen bedeuten:

$$\begin{aligned}
[[\varphi,\psi],\chi] &= \sum^{(4)} \frac{R_{ik}}{R}\,\frac{\partial\chi}{\partial x_k}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\Big)\\
&= \sum^{(4)} \frac{R_{ik}}{R}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\Big)\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\\
&+ \sum^{(4)} \frac{R_{ik}R_{\mu\nu}}{R^2}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_\nu}\\
&+ \sum^{(4)} \frac{R_{ik}R_{\mu\nu}}{R^2}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_k}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_\mu},
\end{aligned}$$

wo die Summe sich auf die vier Indices i, k, μ, ν bezieht. Vertauscht man nun cyclisch die Functionen φ, ψ, χ, und zugleich ebenso die Indices k, μ, ν, so erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&[[\varphi,\psi],\chi]+[[\psi,\chi],\varphi]+[[\chi,\varphi],\psi]\\
&\left\{\begin{aligned}
&= \sum^{(4)} \frac{\partial\chi}{\partial x_k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\Big\{\frac{R_{ik}}{R}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\Big)+\frac{R_{i\mu}}{R}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\nu k}}{R}\Big)+\frac{R_{i\nu}}{R}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{k\mu}}{R}\Big)\Big\}\\
&+ \sum^{(4)} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_\mu}\cdot\frac{R_{ik}R_{\mu\nu}+R_{i\nu}R_{k\mu}}{R^2}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_k}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\\
&+ \sum^{(4)} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_\nu}\cdot\frac{R_{i\mu}R_{\nu k}+R_{ik}R_{\mu\nu}}{R^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\chi}{\partial x_k}\\
&+ \sum^{(4)} \frac{\partial^2\chi}{\partial x_i\partial x_k}\cdot\frac{R_{i\nu}R_{k\mu}+R_{i\mu}R_{\nu k}}{R^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}.
\end{aligned}\right. \qquad (21.)
\end{aligned}$$

Die drei letzten Summen verschwinden, da sie durch blosse Vertauschung der Indices ihr Vorzeichen ändern; die zweite Summe durch Vertauschung von i und μ, die dritte durch Vertauschung von i und ν, die vierte durch Vertauschung von i und k. Ferner werde ich weiter unten beweisen, dass die Grössen R, wie sie oben definirt wurden, immer den Gleichungen genügen:

$$\Sigma_i\Big\{\frac{R_{ik}}{R}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\Big)+\frac{R_{i\mu}}{R}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\nu k}}{R}\Big)+\frac{R_{i\nu}}{R}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{k\mu}}{R}\Big)\Big\} = 0, \qquad (22.)$$

welches auch die Indices k, μ, ν sein mögen. Und dies vorausgesetzt er-

giebt sich aus (21.) ohne Weiteres:

$$(23.) \quad [[\varphi, \psi], \chi]+[[\psi, \chi], \varphi]+[[\chi, \varphi], \psi] = 0,$$

welches die eine der zu beweisenden Gleichungen ist.

Aber ich werde weiter unten auch beweisen, dass die Gleichungen (22.) nur erfüllt sein können, wenn die Grössen R die ihnen im Vorigen beigelegte Bedeutung haben, sobald man nur annimmt, dass $R_{ik} = -R_{ki}$, und dass die Determinante der Grössen $\frac{R_{ik}}{R}$ nicht verschwinden dürfe. Lässt man daher in den durch $[\varphi, \psi]$ bezeichneten Ausdrücken die Bedeutung der Coefficienten R vorläufig unbestimmt, nur so, dass ihre Determinante nicht verschwinde, und sucht umgekehrt die Bedingungen auf, unter welchen solche Ausdrücke $[\varphi, \psi]$ der Gleichung (23.) genügen können, oder die Bedingungen, unter welchen die rechte Seite der Gleichung (21.) allgemein verschwindet, so treten dabei zunächst die Bedingungen (22.) auf, welche die erste Summe (21.) verschwinden machen. Die Bedingung aber, dass auch die anderen Summen verschwinden, ist:

$$0 = R_{ik}.R_{\mu\nu}+R_{i\nu}.R_{k\mu}+R_{\mu k}.R_{i\nu}+R_{\mu\nu}.R_{ki},$$

oder

$$(R_{ik}+R_{ki})R_{\mu\nu}+(R_{k\mu}+R_{\mu k})R_{i\nu} = 0.$$

Setzt man hier $\mu = i$, so kommt:

$$(R_{ik}+R_{ki}).R_{i\nu} = 0;$$

und da nicht alle $R_{i\nu}$ mit einem beliebigen Index i verschwinden können, ohne dass die Determinante der R verschwindet (welcher Fall ausgenommen ist), so hat man allgemein:

$$R_{ik}+R_{ki} = 0.$$

Da nun nach dem unten zu erweisenden Theorem in Folge dieser Gleichung die Gleichung (22.) genügt, um den Grössen R die im Früheren festgestellte Bedeutung zu vindiciren, so erhält man folgendes Theorem:

Theorem 5.

Der Ausdruck

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

genügt der identischen Gleichung

$$[[\varphi, \psi], \chi]+[[\psi, \chi], \varphi]+[[\chi, \varphi], \psi] = 0,$$

in welcher φ, χ, ψ ganz beliebige Functionen bedeuten, immer dann,

wenn die Grössen R sich aus n Functionen X so zusammensetzen, dass R die Quadratwurzel der aus den Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildeten Determinante, und R_{ik} den Differentialquotienten derselben nach a_{ik} bedeutet. Vorausgesetzt aber, dass die Determinante der R_{ik} nicht verschwinden soll, giebt es keine andere Bestimmungsweise dieser Coefficienten, bei welcher ebenfalls die obige Gleichung identisch erfüllt wäre.

Man sieht aus diesem Theorem, dass die identische Gleichung (22.) durch das *Pfaff*sche Problem gewissermassen erschöpft wird, indem dieselbe nur für solche Coefficienten R bestehen kann, welche mit demselben in unmittelbarer Beziehung stehen.

Betrachten wir ferner den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
[(\varphi),\psi] &= \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\mu\nu}}{R} X_\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\Big) \\
&= \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\Big) \cdot X_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \\
&+ \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}R_{\mu\nu}}{R^2} \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \\
&+ \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}R_{\mu\nu}X_\mu}{R^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_\nu} \cdot
\end{aligned}$$

Indem man in der zweiten Summe i mit μ, in der dritten i mit ν vertauscht, geht dies über in:

$$\begin{aligned}
[(\varphi),\psi] &= \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\Big) \cdot X_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \\
&+ \tfrac{1}{2} \overset{(4)}{\Sigma} \Big\{ \frac{R_{ik}R_{\mu\nu}}{R^2} \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} + \frac{R_{\mu k}R_{i\nu}}{R^2} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_\mu} \Big\} \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \\
&+ \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{\nu k}R_{\mu i}X_\mu}{R^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_\nu} \cdot
\end{aligned}$$

Zieht man nun hiervon denjenigen Ausdruck ab, welchen man durch Vertauschung von φ mit ψ und von k mit ν aus dem vorliegenden erhält, so kommt:

$$\begin{aligned}
[(\varphi),\psi] - [(\psi),\varphi] &= \overset{(4)}{\Sigma} \Big\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\Big) - \frac{R_{i\nu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{R_{\mu k}}{R}\Big) \Big\} X_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \\
&+ \tfrac{1}{2} \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}R_{\mu\nu} - R_{\mu k}R_{i\nu}}{R^2} \Big(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_\mu}\Big) \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \\
&+ \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{\nu k}R_{\mu i}X_\mu}{R^2} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\Big).
\end{aligned}$$

Die letzte Summe lässt sich auch unter der Form darstellen:

$$\overset{(+)}{\Sigma} \frac{R_{\mu i} X_\mu}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\nu k}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\right) - \overset{(+)}{\Sigma} \frac{R_{\mu i} X_\mu}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\nu k}}{R}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu},$$

deren erster Theil nichts Anderes ist als $([\varphi, \psi])$; und führt man dies ein, so nimmt die vorliegende Gleichung die Gestalt an:

$$(24.) \quad \left.\begin{aligned} &[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] - ([\varphi, \psi]) \\ &= \overset{(+)}{\Sigma} \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\right) + \frac{R_{i\nu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\mu}}{R}\right) + \frac{R_{i\mu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\nu k}}{R}\right) \right\} X_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \\ &+ \tfrac{1}{2} \overset{(+)}{\Sigma} \frac{R_{ik} R_{\mu\nu} - R_{\mu k} R_{i\nu}}{R^2} \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_\mu}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}. \end{aligned}\right.$$

Hier ist aber der eingeklammerte Coefficient der ersten Summe der nach (22.) verschwindende Ausdruck; somit verschwindet die erste Summe vollständig. Ferner ist

$$\frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_\mu} = a_{\mu i},$$

und daher

$$\Sigma_\mu \Sigma_i (R_{ik} R_{\mu\nu} - R_{\mu k} R_{i\nu}) a_{\mu i} = R . R_{\nu k} - R . R_{k\nu} = 2R . R_{\nu k},$$

also die zweite Summe in (24.) gleich

$$\Sigma_\nu \Sigma_k \frac{R_{\nu k}}{R} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} = [\varphi, \psi].$$

Und so reducirt sich (24.) auf die zweite der in der angeführten Abhandlung aufgestellten Identitäten:

$$[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi]) + [\varphi, \psi].$$

Diese Gleichung beschränkt sich zwar, wenn die Ausdrücke (φ), $[\varphi, \psi]$ als beliebig vorausgesetzt werden, keineswegs auf die vorliegenden Formen. Aber wenn man annimmt, dass zugleich die Gleichung (23.) bestehen soll, so ist dies in der That nur für die vorliegenden Formen möglich. Nehmen wir (φ) vorläufig in der willkürlichen Form

$$(\varphi) = C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + C_{2n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n}}$$

an, so kann man, da die Determinante der R nicht verschwinden soll, immer solche n Functionen Y bestimmen, dass

$$C_k = \Sigma_i \frac{R_{ik}}{R} Y_i.$$

Alsdann unterscheidet sich die betrachtete Form φ von der früheren nur noch

dadurch, dass an Stelle der zur Bildung der R (nach Theorem 5.) zu benutzenden Functionen X vorläufig in der Form (φ) neben den R_{ik} andere Functionen Y auftreten. Bildet man nun den Ausdruck

$$[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] - ([\varphi, \psi]),$$

so nimmt er genau den in (24.) gegebenen Ausdruck an, nur dass für

$$X_\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_\mu}$$

zu setzen ist:

$$Y_\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial Y_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_\mu}.$$

So verschwindet also die erste Summe in (24.) noch immer; und damit die zweite, wie die vorgelegte identische Gleichung verlangt, sich auf $[\varphi, \psi]$ reducire, hat man die Bedingung:

$$\Sigma_\mu \Sigma_i (R_{ik} R_{\mu\nu} - R_{\mu k} R_{i\nu}) \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_\mu} \right) = 2R . R_{\nu k}.$$

Multiplicirt man dies mit a_{hk} und summirt nach k, so erhält man links

$$R . \Sigma_\mu R_{\mu\nu} \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} \right) - R . \Sigma_i R_{i\nu} \left(\frac{\partial Y_h}{\partial x_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_h} \right) = 2R . \Sigma_\mu R_{\mu\nu} \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} \right).$$

und rechts $2R^2$ oder 0, jenachdem ν und h gleich oder verschieden sind. Man hat also

$$\Sigma_\mu R_{\mu h} \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} \right) = R,$$

$$\Sigma_\mu R_{\mu\nu} \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} \right) = 0,$$

wo in der letzten Gleichung h und ν verschieden sind. Aus diesen Gleichungen aber ergiebt sich durch Auflösung sofort:

$$\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} = a_{\mu h} = \frac{\partial X_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_\mu}.$$

Diese Gleichung stellt nichts Anderes vor, als die Bedingungen dafür, dass der Ausdruck

$$(Y_1 - X_1)\, dx_1 + (Y_2 - X_2)\, dx_2 + \cdots + (Y_{2n} - X_{2n})\, dx_{2n}$$

ein vollständiges Differential ist. Man kann also setzen:

$$Y_1 = X_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1},$$

$$Y_2 = X_2 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_2},$$

. . . . . .

wo Ω eine unbestimmte Function ist. Setzen wir diese Werthe in (φ) ein, so zerfällt der entstehende Ausdruck in die Summe zweier Terme, deren einer genau das früher durch (φ) bezeichnete Aggregat wird, während der andere nach den angewandten Bezeichnungen $[\Omega, \varphi]$ ist. Verstehen wir also jetzt wieder unter (φ) den aus den X gebildeten Ausdruck, so geht die mit Benutzung der Y durch

$$[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi]) + [\varphi, \psi]$$

dargestellte Beziehung über in

$$[(\varphi) + [\Omega, \varphi], \psi] - [(\psi) + [\Omega, \psi], \varphi] = ([\varphi, \psi]) + [\Omega, [\varphi, \psi]].$$

Aber hier verschwinden die mit Ω behafteten Terme zusammen wegen der ersten der behandelten Identitäten; und man sieht daraus, dass die Function Ω, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, gleich Null gesetzt werden darf, so dass die Y mit den X zusammenfallen. Dies giebt sonach folgendes Theorem:

Theorem 6.

Die beiden Ausdrücke

$$(\varphi) = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

genügen ausser der identischen Gleichung

$$[[\varphi, \psi], \chi] + [[\psi, \chi], \varphi] + [[\chi, \varphi], \psi] = 0$$

auch noch der zweiten:

$$[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi]) + [\varphi, \psi],$$

sobald R die Quadratwurzel der aus den Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildeten Determinante, und R_{ik} den Differentialquotienten von R nach a_{ik} bedeutet; und es giebt keine andere den Coefficienten der Ausdrücke (φ), $[\varphi, \psi]$ beizulegende Bedeutung, für welche jene identischen Gleichungen ebenfalls beständen, vorausgesetzt, dass die Determinante der R_{ik} nicht verschwinden darf.

§. 4.

Beweis des im Vorigen benutzten Satzes über die Grössen R_{ik}.

Es ist noch übrig, den Beweis des Satzes nachzutragen, auf welchem die Betrachtungen des vorigen §. wesentlich beruhen, und welcher sich folgendermassen aussprechen lässt:

Theorem 7.

Bedeuten $X_1, X_2, \ldots X_{2n}$ beliebige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$, welche der einzigen Bedingung genügen, dass die aus den Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildete Determinante nicht verschwindet; ist ferner R die Quadratwurzel dieser Determinante, und R_{ik} der Differentialquotient von R nach a_{ik}, so ist für jeden Werth der Indices k, λ, μ immer

$$0 = \Sigma_i \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\lambda\mu}}{R}\right) + \frac{R_{i\lambda}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu k}}{R}\right) + \frac{R_{i\mu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\lambda}}{R}\right) \right\}.$$

Und umgekehrt, wenn man die Grössen $a_{ik} = -a_{ki}$, aus welchen die Grössen R_{ik} sich auf die angegebene Weise zusammensetzen, übrigens beliebig lässt und sie nur zwingt der Bedingung

$$0 = \Sigma_i \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\lambda u}}{R}\right) + \frac{R_{i\lambda}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu k}}{R}\right) + \frac{R_{iu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\lambda}}{R}\right) \right\}$$

für alle Werthe von k, λ, μ zu genügen, so kann dies nicht anders geschehen, als indem man $2n$ Functionen X annimmt, mit Hülfe deren sich die a_{ik} durch die Gleichung

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

bestimmen.

Um den ersten Theil dieses Theorems zu beweisen, ist es nur nöthig, die zu beweisende Gleichung zu entwickeln. Dieselbe nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn man den bekannten Satz

$$D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{k\lambda} \partial a_{\varrho\sigma}} = \frac{\partial D}{\partial a_{k\lambda}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{\varrho\sigma}} - \frac{\partial D}{\partial a_{k\sigma}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{\varrho\lambda}}$$

benutzt, in welchem D die Determinante bedeuten soll, deren Quadratwurzel R ist. Aus derselben folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial D}{D \partial a_{k\lambda}} = \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{\frac{\partial D}{\partial a_{k\sigma}} \frac{\partial D}{\partial a_{\varrho\lambda}}}{D^2} \cdot \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i},$$

oder, da

$$\frac{\frac{\partial D}{\partial a_{k\lambda}}}{D} = \frac{R_{k\lambda}}{R},$$

auch:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{R_{k\lambda}}{R} = \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{R_{k\sigma} R_{\varrho\lambda}}{R^2} \cdot \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}.$$

wo Ω eine unbestimmte Function ist. Setzen wir diese Werthe in (φ) ein, so zerfällt der entstehende Ausdruck in die Summe zweier Terme, deren einer genau das früher durch (φ) bezeichnete Aggregat wird, während der andere nach den angewandten Bezeichnungen $[\Omega, \varphi]$ ist. Verstehen wir also jetzt wieder unter (φ) den aus den X gebildeten Ausdruck, so geht die mit Benutzung der Y durch

$$[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi]) + [\varphi, \psi]$$

dargestellte Beziehung über in

$$[(\varphi) + [\Omega, \varphi], \psi] - [(\psi) + [\Omega, \psi], \varphi] = ([\varphi, \psi]) + [\Omega, [\varphi, \psi]].$$

Aber hier verschwinden die mit Ω behafteten Terme zusammen wegen der ersten der behandelten Identitäten; und man sieht daraus, dass die Function Ω, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, gleich Null gesetzt werden darf, so dass die Y mit den X zusammenfallen. Dies giebt sonach folgendes Theorem:

Theorem 6.

Die beiden Ausdrücke

$$(\varphi) = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

genügen ausser der identischen Gleichung

$$[[\varphi, \psi], \chi] + [[\psi, \chi], \varphi] + [[\chi, \varphi], \psi] = 0$$

auch noch der zweiten:

$$[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi]) + [\varphi, \psi],$$

sobald R die Quadratwurzel der aus den Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildeten Determinante, und R_{ik} den Differentialquotienten von R nach a_{ik} bedeutet; und es giebt keine andere den Coefficienten der Ausdrücke (φ), $[\varphi, \psi]$ beizulegende Bedeutung, für welche jene identischen Gleichungen ebenfalls beständen, vorausgesetzt, dass die Determinante der R_{ik} nicht verschwinden darf.

§. 4.

Beweis des im Vorigen benutzten Satzes über die Grössen R_{ik}.

Es ist noch übrig, den Beweis des Satzes nachzutragen, auf welchem die Betrachtungen des vorigen §. wesentlich beruhen, und welcher sich folgendermassen aussprechen lässt:

Theorem 7.

Bedeuten $X_1, X_2, \ldots X_{2n}$ beliebige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$, welche der einzigen Bedingung genügen, dass die aus den Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildete Determinante nicht verschwindet; ist ferner R die Quadratwurzel dieser Determinante, und R_{ik} der Differentialquotient von R nach a_{ik}, so ist für jeden Werth der Indices k, λ, μ immer

$$0 = \Sigma_i \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\lambda\mu}}{R}\right) + \frac{R_{i\lambda}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu k}}{R}\right) + \frac{R_{i\mu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\lambda}}{R}\right) \right\}.$$

Und umgekehrt, wenn man die Grössen $a_{ik} = -a_{ki}$, aus welchen die Grössen R_{ik} sich auf die angegebene Weise zusammensetzen, übrigens beliebig lässt und sie nur zwingt der Bedingung

$$0 = \Sigma_i \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\lambda\mu}}{R}\right) + \frac{R_{i\lambda}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu k}}{R}\right) + \frac{R_{i\mu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\lambda}}{R}\right) \right\}$$

für alle Werthe von k, λ, μ zu genügen, so kann dies nicht anders geschehen, als indem man $2n$ Functionen X annimmt, mit Hülfe deren sich die a_{ik} durch die Gleichung

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

bestimmen.

Um den ersten Theil dieses Theorems zu beweisen, ist es nur nöthig, die zu beweisende Gleichung zu entwickeln. Dieselbe nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn man den bekannten Satz

$$D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{k\lambda} \partial a_{\varrho\sigma}} = \frac{\partial D}{\partial a_{k\lambda}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{\varrho\sigma}} - \frac{\partial D}{\partial a_{k\sigma}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{\varrho\lambda}}$$

benutzt, in welchem D die Determinante bedeuten soll, deren Quadratwurzel R ist. Aus derselben folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial D}{D \partial a_{k\lambda}} = \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{\dfrac{\partial D}{\partial a_{k\sigma}} \dfrac{\partial D}{\partial a_{\varrho\lambda}}}{D^2} \cdot \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i},$$

oder, da

$$\frac{\dfrac{\partial D}{\partial a_{k\lambda}}}{D} = \frac{R_{k\lambda}}{R},$$

auch:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{R_{k\lambda}}{R} = \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{R_{k\sigma} R_{\varrho\lambda}}{R^2} \cdot \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}.$$

Führt man dies in die zu beweisende Gleichung ein, so nimmt dieselbe die Form an:

$$0 = \Sigma_i \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{R_{k\sigma} R_{\varrho\lambda} R_{i\mu} + R_{\lambda\sigma} R_{\varrho\mu} R_{ik} + R_{\mu\sigma} R_{\varrho k} R_{i\lambda}}{R^3} \cdot \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}.$$

Vertauschen wir in der dreifachen Summe nun die Indices i, ϱ, σ cyclisch, so bleibt der Zähler des ersten Factors ungeändert, indem nur immer jedes Glied desselben in das folgende übergeht. An Stelle der obigen Gleichung kann man daher auch die folgende setzen:

$$(25.) \qquad 0 = \Sigma_i \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{R_{k\sigma} R_{\lambda\varrho} R_{\mu i}}{R^3} \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{\sigma i}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial a_{i\varrho}}{\partial x_\sigma} \right).$$

Da nun die eingeklammerte Grösse identisch verschwindet, wenn man den a_{ik} die Bedeutung

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

beilegt, so ist (25.) durch diese Annahme identisch erfüllt, und also der erste Theil des Theorems bewiesen.

Um auch den zweiten zu erweisen, bemerke man nur, dass bei Ableitung der Gleichung (25.) keine andere Eigenschaft der a_{ik} benutzt ist, als dass $a_{ik} + a_{ki} = 0$. Man kann also ganz allgemein statt der vorgelegten Gleichung die Gleichung (25.) zum Ausgangspunkt nehmen, um die a_{ik} in geeigneter Weise zu bestimmen. Multiplicirt man aber diese Gleichung mit

$$a_{\alpha\sigma} . a_{\beta\varrho} . a_{\gamma i}$$

und summirt nach σ, ϱ, i, so erhält man sogleich:

$$(26.) \qquad \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0,$$

und zwar muss diese Gleichung für alle Werthe von α, β, γ erfüllt sein.

Nun kann man offenbar immer $2n$ Functionen Y so bestimmen, dass

$$(27.) \qquad a_{1\gamma} = \frac{\partial Y_1}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_1}.$$

Setzt man in (26.) sodann $\alpha = 1$, $\beta = 2$, und den Werth von $a_{1\gamma}$ aus (27.) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ a_{2\gamma} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_2} \right\} = 0.$$

Man kann also immer die Grössen $a_{2\gamma}$, wo $\gamma = 2, 3, \ldots 2n$, durch die Gleichung

$$(28.) \qquad a_{2\gamma} = \frac{\partial Y_2}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_2} + \frac{\partial Y'_2}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial Y'_\gamma}{\partial x_2}$$

darstellen, wo die Y' ganz beliebige Grössen bedeuten, die aber von x_1 unabhängig sind; wodurch denn die $2n-1$ Grössen

$$\frac{\partial Y'_2}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial Y'_\gamma}{\partial x_2}$$

ganz beliebige Werthe darstellen, welche nur von x_1 frei sind.

Durch die Gleichungen (27.), (28.) werden alle Gleichungen (26.) erfüllt, in welchen zwei Indices 1 und 2 werden, und zwar erfüllt auf die allgemeinste Weise. Betrachtet man nun diejenigen Gleichungen (26.), welche die Indices $\alpha=1$, $\beta=3$ oder $\alpha=2$, $\beta=3$ enthalten, und in denen $\gamma=4, 5, \ldots$ sein kann. Mit Hülfe der Gleichungen (27.), (28.) nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{a_{3\gamma} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_3}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{a_{3\gamma} - \frac{\partial (Y_3 + Y'_3)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial (Y_\gamma + Y'_\gamma)}{\partial x_3}\right\} = 0.$$

Diese Gleichungen werden auf die allgemeinste Weise erfüllt durch die Annahme:

$$a_{3\gamma} = \frac{\partial Y_3}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_3} + \frac{\partial Y'_3}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial Y'_\gamma}{\partial x_3} + \frac{\partial Y''_3}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial Y''_\gamma}{\partial x_3},$$

wobei die Grössen

$$Y''_3, \quad Y''_4, \quad \ldots \quad Y''_{2n}$$

weder x_1 noch x_2 enthalten.

Indem man auf diese Weise fortschreitet, gelangt man zu der allgemeinen Gleichung:

$$a_{i\gamma} = \frac{\partial (Y_i + Y'_i + \cdots + Y_i^{(i-1)})}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial (Y_\gamma + Y'_\gamma + \cdots + Y_\gamma^{(i-1)})}{\partial x_i},$$

in welcher γ eine der Zahlen $i+1, i+2, \ldots 2n$ bedeutet, und wo die Grössen Y'_i, Y'_γ von x_1, die Grössen Y''_i, Y''_γ von x_1, x_2, ... die Grössen $Y_i^{(i-1)}$, $Y_\gamma^{(i-1)}$ von x_1, x_2, ... x_{i-1} frei sind. Man darf daher sofort an Stelle dieser Gleichung auch setzen:

$$a_{i\gamma} = \frac{\partial (Y_i + Y'_i + \cdots + Y_i^{(i-1)})}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial (Y_\gamma + Y'_\gamma + \cdots + Y_\gamma^{(\gamma-1)})}{\partial x_i},$$

da die hinzugefügten Terme bei der Differentiation verschwinden. Setzt man nun

$$X_i = Y_i + Y'_i + \cdots + Y_i^{(i-1)},$$

so hat man ganz allgemein:

$$a_{i\gamma} = \frac{\partial X_i}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial X_\gamma}{\partial x_i},$$

was zu beweisen war.

§. 5.

Ueber einige Folgerungen, welche sich aus der in §. 2 abgeleiteten identischen Gleichung ableiten lassen, wenn man derselben ihre allgemeinste Form giebt.

Die Ableitung der identischen Gleichung (19.) giebt zu einer Bemerkung Veranlassung, welche auf den ersten Anblick überraschend scheint. Denn man sieht sofort, dass dieselbe identische Gleichung auch noch besteht, *wenn man statt der a_{ik} irgend welche Grössen setzt, die nur der Bedingung $a_{ik}+a_{ki}=0$ genügen, und deren Determinante nicht verschwindet.* Man kann sogar diese Betrachtung noch dahin verallgemeinern, dass man an Stelle der a_{ik} *ganz beliebige* Grössen treten lässt, deren Determinante nicht verschwindet. Bezeichnet man durch D noch ihre Determinante und durch D_{ik} den Differentialquotienten derselben nach a_{ik}, so geht mit der Gleichung (19.) nur die wesentliche Veränderung vor, dass auf der rechten Seite an Stelle der Elemente

$$\begin{array}{cccc}
0 & [f_1,f_2] & \ldots & [f_1,f_n] \quad (f_1)\\
-[f_1,f_2] & 0 & \ldots & [f_2,f_n] \quad (f_2)\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
-[f_1,f_n] & -[f_2,f_n] & \ldots & 0 \quad (f_n)\\
-(f_1) & -(f_2) & \ldots & -(f_n) \quad 0
\end{array}$$

die folgenden treten:

$$\begin{array}{cccc}
[f_1,f_1] & [f_1,f_2] & \ldots & [f_1,f_n] \quad (f_1,X)\\
[f_2,f_1] & [f_2,f_2] & \ldots & [f_2,f_n] \quad (f_2,X)\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
[f_n,f_1] & [f_n,f_2] & \ldots & [f_n,f_n] \quad (f_n,X)\\
(X,f_1) & (X,f_2) & \ldots & (X,f_n) \quad (X,X);
\end{array}$$

wobei für den Augenblick die Grössen

$$[f_i,f_k],\quad (f_i,X),\quad (X,f_k),\quad (X,X)$$

die Bedeutungen haben:

$$[f_i,f_k]=\Sigma_\mu\Sigma_\nu\frac{D_{\mu\nu}}{D}\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial f_k}{\partial x_\nu},$$

$$(X,f_k)=\Sigma_\mu\Sigma_\nu\frac{D_{\mu\nu}}{D}X_i\frac{\partial f_k}{\partial x_\nu},$$

$$(f_i,X)=\Sigma_\mu\Sigma_\nu\frac{D_{\mu\nu}}{D}\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu}X_\nu,$$

$$(X,X)=\Sigma_\mu\Sigma_\nu\frac{D_{\mu\nu}}{D}X_\mu X_\nu.$$

Offenbar verschwindet V dann noch immer für sämmtliche Werthe der α, sobald alle diese Elemente verschwinden, und man hat sonach, da, falls die a_{ik} ganz beliebig waren, auch die Grössen $\frac{D_{ik}}{D} = b_{ik}$ ganz beliebig angenommen werden können, den Satz:

Theorem 8.

Bedeuten die $(2n)^2$ Grössen b_{ik} ganz beliebige Functionen von x_1, x_2, ... x_{2n}, welche der einzigen Bedingung

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu b_{\mu\nu} X_\mu X_\nu = 0$$

genügen, und deren Determinante nicht verschwindet; und kann man ferner n Functionen f_1, f_2, ... f_n so bestimmen, dass gleichzeitig den $n(n+2)$ Gleichungen

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu b_{\mu\nu} X_\mu \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} = 0,$$

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu b_{\mu\nu} X_\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} = 0,$$

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu b_{\mu\nu} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial f_k}{\partial x_\nu} = 0$$

Genüge geschieht, so sind immer die Gleichungen

$$f_1 = \text{Const.}, \quad f_2 = \text{Const.}, \quad \ldots \quad f_n = \text{Const.}$$

ein System von Integralen des Pfaffschen Problems, d. h. es giebt immer solche Multiplicatoren F_1, F_2, ... F_n, dass identisch:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n.$$

Dieses Theorem enthält die Gleichungen (15.) als speciellen Fall in sich, und scheint sonach eine sehr viel allgemeinere Auflösungsmethode des *Pfaff*schen Problems in sich zu bergen als die in jenen Gleichungen enthaltene. Ja, da die Anzahl der Gleichungen des vorliegenden Theorems im Allgemeinen viel grösser ist als die der Gleichungen (15.), so würde eine andere Bestimmungsweise der b sogar eine leichtere und niedrigere Integrationen fordernde Methode ergeben. Aber der Werth dieser Bemerkung wird sofort durch die andere wieder aufgehoben, dass es höchst wahrscheinlich keine andere Bestimmungsweise der b giebt, ausser der in den Formeln (15.) enthaltenen, zu welcher man gelangen könnte, ohne schwierige Integrationen ausgeführt zu haben, oder selbst ohne vorherige Lösung des *Pfaff*schen Problems. Denn freilich, wenn man irgend eine Lösung dieses Problems kennt, lassen sich derselben gemäss die b noch auf unendlich viele

Arten so bestimmen, dass die Gleichungen des Theorems für das gefundene System von Integralen erfüllt werden. Auf der anderen Seite kann man, indem man wiederholt Combinationen der Gleichungen des Theorems bildet, ähnlich wie in §. 3, welche nur die *ersten* Differentialquotienten der Functionen f enthalten, zu Differentialgleichungen gelangen, denen die Grössen b nothwendig genügen müssen, falls die Gleichungen des Theorems neben einander bestehen sollen. Aber es ist durchaus nicht zu vermuthen, dass man *im Allgemeinen*, ohne über die Functionen X besondere Voraussetzungen zu machen, auch nur particulare Lösungen dieser Gleichungen auffinden sollte, diejenigen ausgenommen, welche den Gleichungen (15.) entsprechen. Damit ist freilich nicht ausgeschlossen, dass nicht *bei besonderen Annahmen* der X solche Systeme von Grössen b vielleicht gefunden, und damit eine ganz andere Integrationsmethode des *Pfaff*schen Problems angebahnt werden könnte, welche dann allerdings nur auf die betreffenden speciellen Formen anwendbar wäre.

§. 6.

Ueber den Multiplicator und das letzte Integral des *Pfaff*schen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

In der erwähnten Abhandlung habe ich von dem Nutzen gesprochen, welcher von den in §. 3. bewiesenen Identitäten für die Integration der Gleichung

$$(\varphi) = 0,$$

oder für die Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{2n} = \Sigma_i R_{i1} X_i : \Sigma_i R_{i2} X_i : \ldots : \Sigma_i R_{i,2n} X_i$$

gezogen werden kann, sobald drei oder selbst nur zwei Integrale dieses Systems gefunden sind. Ich werde den dort angegebenen Sätzen bei dieser Gelegenheit einige weitere hinzufügen.

Führt man eine Hülfsveränderliche t so ein, dass das eben angegebene System in die Gestalt übergeht:

$$(29.) \qquad dt : dx_1 : dx_2 \ldots = R : \Sigma_i R_{i1} X_i : \Sigma_i R_{i2} X_i \ldots,$$

so hat *Jacobi* (dieses Journal Bd. 29, p. 238) gezeigt, dass die allgemeine Gleichung des letzten Multiplicators die Gestalt annimmt:

$$R\frac{\partial M}{\partial t} + \Sigma_i \Sigma_k R_{ik} X_i \frac{\partial M}{\partial x_k} + nRM = 0,$$

oder, nach der im Vorigen angewandten Bezeichnung:

$$(30.) \qquad \frac{\partial M}{\partial t} + nM + (M) = 0.$$

Nimmt man an, dass M von den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ unabhängig sei, so findet sich hieraus der von *Jacobi* angegebene Multiplicator

$$M = e^{-nt}.$$

Wenn man hingegen einen Multiplicator aufsucht, welcher zwar $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$, nicht aber t enthält, so ist derselbe durch die Gleichung

$$(M)+nM = 0,$$

oder auch, indem man mit $\frac{1}{n}\cdot M^{\frac{1}{n}-1}$ multiplicirt, durch die Gleichung

$$(31.) \qquad \left(M^{\frac{1}{n}}\right)+M^{\frac{1}{n}} = 0.$$

gegeben.

Sind nun φ, ψ irgend zwei Functionen, welche die Gleichungen

$$(\varphi) = 0, \qquad (\psi) = 0$$

befriedigen, oder sind

$$\varphi = \text{Const.}, \qquad \psi = \text{Const.}$$

irgend zwei von t freie Integrale des Systems (29.), so hat man in Folge der allgemeinen identischen Gleichung

$$[(\varphi), \psi]-[(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi])+[\varphi, \psi]$$

auch immer:

$$([\varphi, \psi])+[\varphi, \psi] = 0.$$

Vergleicht man dies mit (31.), so kann man offenbar immer setzen:

$$(32.) \qquad M^{\frac{1}{n}} = [\varphi, \psi], \qquad M = \{[\varphi, \psi]\}^n,$$

und man erhält so den Satz:

Theorem 9.

Sind $\varphi = Const.$, $\psi = Const.$ irgend zwei von t freie Integrale des Systems

$$\frac{dx_k}{dt} = \Sigma_i \frac{R_{ik}}{R} X_i,$$

auf welche das Pfaffsche Problem zunächst führt, so ist immer

$$\{[\varphi, \psi]\}^n = \left\{\Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right\}^n$$

ein Multiplicator des Systems.

Aber der Quotient zweier Multiplicatoren ist immer, einer Constanten gleich gesetzt, ein neues Integral. Vergleicht man also den soeben gefundenen Multiplicator mit dem von *Jacobi* aufgestellten $M = e^{-nt}$, so findet sich das Integral

$$C.e^{-nt} = [\varphi, \psi]^n,$$

oder

$$\tau - t = \log[\varphi, \psi].$$

Dieses ist offenbar das *letzte* Integral des Systems, von welchem *Jacobi* bereits nachgewiesen hat, dass es nach Aufstellung *sämmtlicher* Integrale durch blosse Differentiation ermittelt werden könne. Aber hier zeigt sich, dass es zur Aufstellung dieses letzten Integrals nur *zweier* gefundenen bedarf; aus welchen dasselbe direct gebildet werden kann, während die übrigen nur successive aus einander abgeleitet werden können. Uebrigens erhellt der Satz, welchen ich in der angeführten Abhandlung bewiesen habe, dass man aus *drei* Integralen alle übrigen leicht ableiten könne, aus der obigen Formel sofort. Denn ist $\chi = \text{Const.}$ ein drittes Integral, so wird auch

$$\tau' - t = \log[\varphi, \chi],$$

wo τ' eine neue Constante bedeutet. Durch Elimination von t also folgt

$$\tau - \tau' = \log[\varphi, \psi] - \log[\varphi, \chi] \quad \text{oder}$$

$$\frac{[\varphi, \psi]}{[\varphi, \chi]} = \text{Const.},$$

was der dort bewiesene Satz ist.

Man kann nach dem Obigen folgendes Theorem aufstellen:

Theorem 10.

Sind $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ irgend zwei von t unabhängige Integrale des Systems

$$\frac{dx_k}{dt} = \Sigma_i \frac{R_{ik}}{R} X_i,$$

so ist immer das letzte Integral dieses Systems:

$$\tau - t = \log[\varphi, \psi],$$

welches somit nach Auffindung zweier Integrale unmittelbar angegeben werden kann.

§. 7.

Hülfssatz zur Integration der aufgestellten simultanen partiellen Differentialgleichungen.

Die Auflösung des *Pfaff*schen Problems lässt sich unmittelbar an die Gleichungen (15.) knüpfen, mit Hülfe der beiden die Operationen (φ), $[\varphi, \psi]$ betreffenden identischen Gleichungen, welche in §. 3. bewiesen sind.

Die n Functionen f müssen dem Obigen gemäss folgenden $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
&(f_1) = 0,\\
&(f_2) = 0, \quad [f_1, f_2] = 0,\\
&(f_3) = 0, \quad [f_1, f_3] = 0, \quad [f_2, f_3] = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(f_n) = 0, \quad [f_1, f_n] = 0, \quad [f_2, f_n] = 0, \ \ldots \quad [f_{n-1}, f_n] = 0.
\end{aligned}$$

Man wird also die Function f_1 aus *einer* Gleichung zu bestimmen haben; die Function f_2 wird sodann *zwei* simultanen Gleichungen zu genügen haben, die Function f_3 *dreien*, u. s. w.

Zur Bestimmung von f_1 bedarf man demnach eines Integrals von einem System von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Function f_2 aber führt auf zwei simultane Differentialgleichungen. Eliminirt man aus beiden etwa einmal $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, das andere Mal $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$, so gelangt man zu zwei simultanen Differentialgleichungen, deren jede nur $2n-1$ Veränderliche enthält, nach denen differentiirt wird, während immer eine der Veränderlichen als constant betrachtet werden kann. Aber jede dieser Differentialgleichungen wird auch noch erfüllt durch $f_2 = f_1$; mithin lässt sich, indem man f_1 als Veränderliche einführt, jede der Differentialgleichungen auf eine mit nur $2n-2$ Veränderlichen zurückführen. Nach der in der angeführten Abhandlung von mir aus einander gesetzten Methode steht zu vermuthen, dass die simultane Integration dieser beiden Gleichungen nur die Kenntniss je eines Integrals von zwei Systemen von $2n-3$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung erfordert.

Ebenso führt die Function f_3 auf drei simultane partielle Differentialgleichungen. Drückt man aus denselben etwa $\frac{\partial f_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ durch die übrigen Differentialquotienten aus, so erhält man drei Gleichungen mit je $2n-2$ Veränderlichen; und da diese ausserdem noch durch $f_3 = f_1$, $f_3 = f_2$ erfüllt werden, so lässt sich die Anzahl der Veränderlichen noch in jeder Gleichung um zwei erniedrigen. Man hat also drei Gleichungen mit je $2n-4$ Veränderlichen; und nach der angeführten Methode ist zu vermuthen, dass die simultane Integration die Kenntniss je eines Integrals von drei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit je $2n-4$ Veränderlichen verlangt.

Allgemein führt so die Function f_i auf i simultane Gleichungen mit je $2n-i+2$ Veränderlichen, deren Integration, wie zu vermuthen ist, durch Kenntniss je eines Integrals von i Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit je $2n-2i+2$ Veränderlichen vermittelt wird.

Dies Verfahren aber lässt sich noch allgemeiner darstellen, wobei denn zugleich das für die Integration anzuwendende Verfahren auf einfache Weise hervortritt. Ich werde dasselbe an dem System aus einander setzen, welches zur Auffindung der Function f_i führt. Dies System besteht aus folgenden i Gleichungen:

$$(33.) \qquad (\varphi) = 0, \quad [f_1, \varphi] = 0, \quad [f_2, \varphi] = 0, \ \ldots \quad [f_{i-1}, \varphi] = 0.$$

An Stelle dieser i Gleichungen werde ich i andere setzen, welche lineare Combinationen derselben sind. Seien zu diesem Ende $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_i$ ganz beliebige Functionen, und bestimmen wir i Differentialausdrücke

$$(\varphi)_1, \quad (\varphi)_2, \ \ldots \quad (\varphi)_i$$

aus folgenden linearen Gleichungen:

$$(34.) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (\varphi) & = & (\Omega_1)(\varphi)_1 + (\Omega_2)(\varphi)_2 \quad + \cdots + (\Omega_i)(\varphi)_i, \\ [f_1, \varphi] & = & [f_1, \Omega_1](\varphi)_1 + [f_1, \Omega_2](\varphi)_2 \ + \cdots + [f_1, \Omega_i](\varphi)_i, \\ [f_2, \varphi] & = & [f_2, \Omega_1](\varphi)_1 + [f_2, \Omega_2](\varphi)_2 \ + \cdots + [f_2, \Omega_i](\varphi)_i, \\ & \cdots & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ [f_{i-1}, \varphi] & = & [f_{i-1}, \Omega_1](\varphi)_1 + [f_{i-1}, \Omega_2](\varphi)_2 + \cdots + [f_{i-1}, \Omega_i](\varphi)_i. \end{array} \right.$$

Setzt man in diesen Gleichungen, bei denen als einzige Eigenschaft der Functionen Ω vorausgesetzt wird, dass die Determinante der Coefficienten auf der rechten Seite nicht verschwinde, φ gleich $f_1, f_2, \ldots$, so verschwinden die linken Theile und also auch $(\varphi)_1, (\varphi)_2, \ldots (\varphi)_i$. Man schliesst daraus, dass sämmtlichen Gleichungen

$$(35.) \qquad (\varphi)_1 = 0, \quad (\varphi)_2 = 0, \ \ldots \quad (\varphi)_i = 0,$$

welche in Folge der Gleichungen (34.) an Stelle der Gleichungen (33.) gesetzt werden können, durch die Lösungen $\varphi = f_1$, $\varphi = f_2$, $\ldots$ $\varphi = f_{i-1}$ genügt wird.

Setzt man aber in den Gleichungen (34.) φ gleich einer der Functionen Ω, etwa gleich Ω_h, so findet sich offenbar aus (34.), dass alle Grössen $(\varphi)_1, (\varphi)_2, \ldots$ verschwinden bis auf $(\varphi)_h$, welches gleich 1 wird. Auf diese Weise kennt man von jeder der Gleichungen (35.) $2i-2$ Lösungen, nämlich von

$$\begin{array}{l} (\varphi)_1 = 0 : f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_i, \\ (\varphi)_2 = 0 : f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, \Omega_1, \Omega_3, \ldots \Omega_i, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ (\varphi)_i = 0 : f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{i-1}. \end{array}$$

Mit welcher dieser Gleichungen man also auch beginnen mag, immer wird die Aufsuchung einer neuen Lösung mit der Aufsuchung eines Integrals in einem System von $2n-2i+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung aequivalent sein.

Zwischen diesen Ausdrücken $(\varphi)_1, (\varphi)_2, \ldots (\varphi)_i$ besteht ein sehr einfacher Zusammenhang, welcher die Methode der simultanen Integration wesent-

lich bedingt. Um diesen Zusammenhang nachzuweisen, gehe ich zu den beiden identischen Gleichungen zurück, welche für die Ausdrücke (φ), $[\varphi, \psi]$ bestehen:

$$[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi]) + [\varphi, \psi],$$
$$[[\varphi, \psi], \chi] + [[\psi, \chi], \varphi] + [[\chi, \varphi], \psi] = 0.$$

In diesen Gleichungen setze ich $\psi = f_k$, $\chi = f_h$, indem h und k zwei verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, ... $i-1$ bedeuten sollen. Die Functionen f_k, f_h genügen den Gleichungen:

$$(f_k) = 0, \quad (f_h) = 0, \quad [f_k, f_h] = 0.$$

Daher kann man den obigen identischen Gleichungen für diesen Fall folgende Form geben:

$$(36.) \quad \begin{cases} ([f_k, \varphi]) + [f_k, \varphi] - [f_k, (\varphi)] = 0, \\ [f_h, [f_k, \varphi]] - [f_k, [f_h, \varphi]] = 0. \end{cases}$$

Führen wir in diesen Gleichungen statt der Operationen (φ), $[f_k, \varphi]$ aus den Gleichungen (34.) die Operationen $(\varphi)_\lambda$ ein; und zwar soll dies zunächst für die durch die *inneren* Klammern dargestellten Operationen allein geschehen, während die durch die äusseren Klammern dargestellten fortbestehen mögen. Indem man dies ausführt, bemerkt man, dass die linken Theile der Gleichungen (36.) sich in zwei Theile sondern; indem nämlich für $[f_k, \varphi]$ oder (φ) der Werth aus (34.) gesetzt und sodann die äusseren Operationen in den Formeln (36.) angewendet werden, entstehen einerseits Glieder, welche von der Anwendung der äusseren Operation auf die Coefficienten (Ω), $[f_k, \Omega]$ herrühren, während in den anderen die Operation auf die Factoren $(\varphi)_\lambda$ angewandt wird. Alle Glieder der ersten Art enthalten einen der Ausdrücke $(\varphi)_\lambda$ als Factor; man überzeugt sich aber sofort, dass in den ganzen Ausdrücken, in welche die linken Theile der Gleichungen (36.) übergehen, der Coefficient jedes Ausdrucks $(\varphi)_\lambda$ verschwindet. Denn ein solcher Coefficient ist nichts Anderes, *als die linke Seite einer der Gleichungen* (36.) *selbst, nur für φ darin Ω_λ gesetzt.* Da nun die linken Theile der Gleichungen (36.) für *jede* Function φ verschwinden, so sind die gedachten Coefficienten Null; und es bleiben also in den aus (36.) entstehenden Relationen nur diejenigen Terme übrig, welche von der Anwendung der äusseren Operationen auf die Factoren $(\varphi)_\lambda$ herrühren. Jene Gleichungen werden also jetzt:

$$0 = \Sigma_\lambda \{[f_k, \Omega_\lambda]((\varphi)_\lambda) - (\Omega_\lambda)[f_k, (\varphi)_\lambda]\},$$
$$0 = \Sigma_\lambda \{[f_k, \Omega_\lambda][f_h, (\varphi)_\lambda] - [f_h, \Omega_\lambda][f_k, (\varphi)_\lambda]\}.$$

Drückt man nun auch noch die äusseren Operationen mit Hülfe der Gleichungen (34.) durch die Operationen $(\varphi)_\mu$ aus, so erhält man:

$$0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu \{[f_k, \Omega_\lambda](\Omega_\mu) - [f_k, \Omega_\mu](\Omega_\lambda)\}((\varphi)_\lambda)_\mu,$$
$$0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu \{[f_k, \Omega_\lambda][f_h, \Omega_\mu] - [f_k, \Omega_\mu][f_h, \Omega_\lambda]\}((\varphi)_\lambda)_\mu$$

oder auch, indem man der Kürze wegen

$$(37.) \qquad x_{\lambda,\mu} = ((\varphi)_\lambda)_\mu - ((\varphi)_\mu)_\lambda$$

setzt, durch Vertauschung von λ mit μ in den letzten Gliedern der Doppelsummen:

$$(38.) \qquad \begin{cases} 0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu [f_k, \Omega_\lambda](\Omega_\mu) . x_{\lambda,\mu}, \\ 0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu [f_k, \Omega_\lambda][f_h, \Omega_\mu] . x_{\lambda,\mu}. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen kann man noch die Gleichung

$$0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu (\Omega_\lambda)(\Omega_\mu) . x_{\lambda,\mu}$$

hinzufügen, welche identisch erfüllt ist, da $x_{\lambda,\mu} = -x_{\mu,\lambda}$. Vergleicht man aber diese Gleichung mit der ersten Gleichung (38.), und legt in letzterer dem Index k alle möglichen Werthe bei; erinnert man sich ferner, dass die aus den Ausdrücken (Ω_λ), $[f_k, \Omega_\lambda]$ gebildete Determinante nicht verschwinden soll, so findet sich sofort, dass diese Gleichungen das System

$$(39.) \qquad 0 = \Sigma_\mu (\Omega_\mu) . x_{\lambda,\mu}$$

mit sich führen, in welchem λ alle Werthe von 1 bis i erhalten kann.

Combinirt man hingegen eine der ersten Gleichungen (38.) mit denjenigen aus der zweiten entspringenden Gleichungen, welchen derselbe Werth von k zukommt, so findet sich, da wieder jene Determinante nicht verschwinden darf, dass die Gleichungen bestehen müssen:

$$(40.) \qquad 0 = \Sigma_\lambda [f_k, \Omega_\lambda] . x_{\lambda,\mu},$$

wo der Index μ die Werthe 1, 2, ... i annehmen kann. Schreibt man inzwischen statt (39.):

$$0 = \Sigma_\lambda (\Omega_\lambda) . x_{\lambda,\mu},$$

so folgt abermals aus der Erwägung, dass die gedachte Determinante nicht verschwinden kann, dass

$$x_{\lambda,\mu} = 0,$$

dass also für jeden Werth von λ und μ:

$$((\varphi)_\lambda)_\mu = ((\varphi)_\mu)_\lambda.$$

Und diese Gleichung enthält folgenden Satz:

Theorem 11.

Sind $f_1, f_2, \ldots f_{i-1}$ Functionen, welche den Gleichungen

$$(f_k) = 0, \quad (f_h) = 0, \quad [f_k, f_h] = 0$$

genügen, und $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_i$ ganz beliebige Functionen, welche die einzige Eigenschaft haben, dass die Determinante der Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\Omega_1)(\varphi)_1 + \quad & (\Omega_2)(\varphi)_2 + \cdots + \quad (\Omega_i)(\varphi)_i = (\varphi), \\
[f_1, \Omega_1](\varphi)_1 + \; & [f_1, \Omega_2](\varphi)_2 + \cdots + \; [f_1, \Omega_i](\varphi)_i = [f_1, \varphi], \\
[f_2, \Omega_1](\varphi)_1 + \; & [f_2, \Omega_2](\varphi)_2 + \cdots + \; [f_2, \Omega_i](\varphi)_i = [f_2, \varphi], \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[f_{i-1}, \Omega_1](\varphi)_1 + & [f_{i-1}, \Omega_2](\varphi)_2 + \cdots + [f_{i-1}, \Omega_i](\varphi)_i = [f_{i-1}, \varphi]
\end{aligned}$$

nicht verschwindet, so haben die Differentialoperationen

$$(\varphi)_1, \quad (\varphi)_2, \quad \ldots \quad (\varphi)_i,$$

welche sich aus vorstehenden Gleichungen ergeben, die Eigenschaft, dass die successive Anwendung derselben oder einiger derselben immer dasselbe Resultat giebt, welches auch die Reihenfolge der angewandten Operationen sein möge, indem immer:

$$((\varphi)_\lambda)_\mu = ((\varphi)_\mu)_\lambda.$$

§. 8.

Simultane Integration irgend eines der Systeme, auf welche nach dem Obigen die Lösung des *Pfaff*schen Problems zurückkommt.

Mit Hülfe des soeben aufgestellten Theorems erkennt man ohne Weiteres, dass die Gleichungen

$$(\varphi)_1 = 0, \quad (\varphi)_2 = 0, \quad \ldots \quad (\varphi)_i = 0$$

ein solches simultanes System bilden, wie es *Jacobi* in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auflösen gelehrt hat; und bei welchem die Auffindung einer gemeinschaftlichen Lösung nur die Kenntniss je eines Integrals von i Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert, deren eines immer, die anderen im Allgemeinen $2n-2i+2$ Veränderliche enthalten. Denn ist $\varphi = \text{Const.}$ etwa ein Integral des Systems, auf welches die Integration der Gleichung

$$(\varphi)_1 = 0$$

führt, und welches, da $2(i-1)$ Integrale desselben,

$$\begin{aligned}
f_1 &= \text{Const.}, \quad f_2 = \text{Const.}, \quad \ldots \quad f_{i-1} = \text{Const.}, \\
\Omega_2 &= \text{Const.}, \quad \Omega_3 = \text{Const.}, \quad \ldots \quad \Omega_i = \text{Const.},
\end{aligned}$$

bereits bekannt sind, die Stelle eines Systems mit $2(n-i)+2$ Veränderlichen vertritt, so sind auch

$$\varphi' = (\varphi)_2, \quad \varphi'' = ((\varphi)_2)_2, \quad \text{etc.}$$

Integrale desselben Systems, oder es sind

$$\varphi, \quad \varphi', \quad \varphi'', \quad \ldots$$

Lösungen der Gleichung

$$(\varphi)_1 = 0.$$

In der That folgt aus der Gleichung des Theorems (11.), wenn man $\lambda = 1$, $\mu = 2$ setzt, und zugleich berücksichtigt, dass

$$(\varphi)_1 = 0$$

sein soll, sofort:

$$((\varphi)_2)_1 = 0$$

oder

$$(\varphi')_1 = 0;$$

sodann, indem man in der Gleichung des Theorems φ' an die Stelle von φ setzt, auch:

$$((\varphi')_2)_1 = 0, \quad \text{oder} \quad (\varphi'')_1 = 0,$$

u. s. w.

Aus einer Lösung kann man also, blos mit Hülfe der Operation $(\varphi)_2$, beliebig viele bilden; ebenso natürlich mit Hülfe der anderen Operationen, was oft von Nutzen sein kann, hier aber, um die Darstellung des Integrationsverfahrens nicht zu stören, übergangen sein mag.

Unter den so erhaltenen Lösungen $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ der Gleichung $(\varphi)_1 = 0$ ist ohne Zweifel eine Lösung $\varphi^{(\mu)}$, welche sich als eine Function von $\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}, f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_i$ darstellen lässt, und zwar ist $\mu \leqq 2n-2i+1$, da die Anzahl der unabhängigen Lösungen von $(\varphi)_1 = 0$ nur $2n-1$ beträgt.

Man kann nun immer eine Function ψ von

$$\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}, f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_i,$$

d. h. eine im Vorigen enthaltene Lösung der Gleichung $(\psi)_1 = 0$, so bestimmen, dass sie zugleich der Gleichung $(\psi)_2 = 0$ genügt. Denn denkt man sich

$$\psi = \psi\{\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}, f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_i\},$$

und führt diese Function in $(\psi)_2 = 0$ ein, so erhält man:

$$(\psi)_2 = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(\varphi)_2 + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi'}(\varphi')_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi^{(\mu-1)}}(\varphi^{(\mu-1)})_2,$$
$$+ \frac{\partial\psi}{\partial f_1}(f_1)_2 + \frac{\partial\psi}{\partial f_2}(f_2)_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial f_{i-1}}(f_{i-1})_2,$$
$$+ \frac{\partial\psi}{\partial\Omega_2}(\Omega_2)_2 + \frac{\partial\psi}{\partial\Omega_3}(\Omega_3)_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial\Omega_i}(\Omega_i)_2.$$

Aber nach §. 7. verschwinden die Ausdrücke

$$(f_1)_2,\ (f_2)_2,\ \ldots\ (f_{i-1})_2,\ (\Omega_3)_2,\ (\Omega_4)_2,\ \ldots\ (\Omega_i)_2,$$

und $(\Omega_2)_2$ wird 1. Ferner ist

$$(\varphi)_2 = \varphi',\ (\varphi')_2 = \varphi'',\ \ldots\ (\varphi^{(\mu-1)})_2 = \Pi(\varphi, \varphi' \ldots, f_1, f_2 \ldots, \Omega_2, \Omega_3 \ldots),$$

so dass die Gleichung $(\psi)_2 = 0$ übergeht in folgende:

$$(41.) \qquad 0 = \frac{\partial\psi}{\partial\Omega_2} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi'}\varphi'' + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi^{(\mu-1)}}\cdot\Pi,$$

eine Gleichung mit nur $\mu+1$, d. h. höchstens $2n-2i+2$ unabhängigen Veränderlichen. Kennt man eine Lösung dieser Gleichung, d. h. ein Integral des entsprechenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen*) mit $\mu+1$ oder höchstens $2n-2i+2$ Veränderlichen, so hat man eine Function ψ, welche gleichzeitig den Gleichungen

$$(\psi)_1 = 0, \qquad (\psi)_2 = 0$$

genügt.

Wendet man nun die Operation $(\varphi)_3$ auf die gefundene Function ψ an, so erhält man, ganz wie oben aus φ, neue Functionen

$$\psi' = (\psi)_3, \qquad \psi'' = (\psi')_3 \quad \text{etc.},$$

welche wegen der Gleichungen des Theorems (11.)

$$((\psi)_3)_1 = ((\psi)_1)_3 = 0, \qquad ((\psi)_3)_2 = ((\psi)_2)_3 = 0$$
$$((\psi')_3)_1 = ((\psi')_1)_3 = 0, \qquad ((\psi')_3)_2 = ((\psi')_2)_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ebenfalls den Gleichungen

$$(\psi)_1 = 0, \qquad (\psi)_2 = 0$$

---

*) Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass dies System durch die Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung

$$\frac{d^\mu\varphi}{d\Omega_2^\mu} = \Pi$$

ersetzt werden kann, wenn in Π die Functionen φ', φ'' ... $\varphi^{(\mu-1)}$ respective durch $\frac{d\varphi}{d\Omega_2}, \frac{d^2\varphi}{d\Omega_2^2} \cdots \frac{d^{\mu-1}\varphi}{d\Omega_2^{\mu-1}}$ ersetzt werden.

genügen. Ebenso wie vorhin ψ aus φ, kann also aus ψ eine neue Function χ abgeleitet werden, welche zugleich den Gleichungen

$$(\chi)_1 = 0, \quad (\chi)_2 = 0, \quad (\chi)_3 = 0$$

genügt, und zu deren Auffindung man wieder eines Integrals für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit höchstens $2n-2i+2$ Veränderlichen bedarf.

Fährt man auf diese Weise fort, so erkennt man, dass man schliesslich zu einer gemeinsamen Lösung f_i sämmtlicher Gleichungen

$$(\varphi)_1 = 0, \quad (\varphi)_2 = 0, \ \ldots \quad (\varphi)_i = 0,$$

oder

$$(\varphi) = 0, \ [\varphi_1, f_1] = 0, \ \ldots \ [\varphi_1, f_{i-1}] = 0$$

gelangt; und zwar bedarf man dazu nur je eines Integrals von i Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Und von diesen Systemen enthält das erste schlechterdings $2n-2i+2$ Veränderliche; die anderen aber, deren entsprechende partielle Differentialgleichungen nach dem Muster von (41.) gebildet werden, können auch eine geringere Anzahl von Veränderlichen enthalten.

§. 9.

Gang der Integrationen, welche die allgemeinste Auflösungsmethode des *Pfaff*schen Problems erfordert.

Hieraus ergiebt sich dann leicht die allgemeinste Methode das *Pfaff*sche Problem zu lösen, d. h. dem Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

zu geben; wobei vorausgesetzt wird, dass die Determinante D der Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

nicht verschwinde. Es sei $D = R^2$, und $R_{ik} = \frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$, endlich

$$(\varphi) = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}.$$

Erstens suche man eine Function $\varphi = f_1$, welche die Gleichung

$$(\varphi) = 0$$

befriedigt.

Zweitens bilde man zwei Ausdrücke $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$, welche durch die Gleichungen

$$(\varphi) = (A_1)(\varphi)_1 + (A_2)(\varphi)_2,$$
$$[f_1, \varphi] = [f_1, A_1](\varphi)_1 + [f_1, A_2](\varphi)_2$$

bestimmt werden, wo A_1, A_2 beliebige Functionen bezeichnen, für welche nur die Auflösung dieser Gleichungen nach $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$ möglich ist. Man suche irgend eine Lösung φ der Gleichung $(\varphi)_1 = 0$, welche von den beiden bekannten Lösungen A_2, f_1 verschieden ist. Sodann bilde man die Ausdrücke

$$\varphi' = (\varphi)_2, \quad \varphi'' = (\varphi')_2, \quad \ldots$$

bis man zu einer Function $\varphi^{(\mu)}$ gelangt, welche durch φ, φ', $\ldots$ $\varphi^{(\mu-1)}$, f_1, A_2 ausdrückbar ist, so dass

$$\varphi^{(\mu)} = \Pi(\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}, f_1, A_2),$$

wo dann $\mu \leqq 2n-3$, und suche eine Lösung $\psi = f_2$ der Gleichung

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial A_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi'}\varphi'' + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi^{(\mu-1)}} \cdot \Pi.$$

Drittens bilde man drei Ausdrücke $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$, $(\varphi)_3$, welche den drei Gleichungen

$$(\varphi) = (B_1)(\varphi)_1 + (B_2)(\varphi)_2 + (B_3)(\varphi)_3,$$
$$[f_1, \varphi] = [f_1, B_1](\varphi)_1 + [f_1, B_2](\varphi)_2 + [f_1, B_3](\varphi)_3$$
$$[f_2, \varphi] = [f_2, B_1](\varphi)_1 + [f_2, B_2](\varphi)_2 + [f_2, B_3](\varphi)_3$$

genügen. Darin sind B_1, B_2, B_3 abermals beliebige Functionen, welche nur der einen Bedingung genügen, dass die Auflösung der vorliegenden linearen Gleichuugen nicht unmöglich sei. Man suche eine beliebige Lösung der Gleichung

$$(\varphi)_1 = 0,$$

welche von den bekannten Lösungen B_2, B_3, f_1, f_2 verschieden ist, und bilde die Functionen

$$\varphi' = (\varphi)_2, \quad \varphi'' = (\varphi')_2, \quad \ldots$$

bis man zu einer Function $\varphi^{(\nu)}$ gelangt, welche sich durch φ, φ', $\ldots$ $\varphi^{(\nu-1)}$, B_2, B_3, f_1, f_2 ausdrücken lässt. Ist dann

$$\varphi^{(\mu)} = \Pi(\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\nu-1)}, f_1, f_2, B_2, B_3),$$

so suche man eine Lösung der Gleichung

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial B_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot \varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi'} \cdot \varphi'' + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi^{(\nu-1)}} \cdot \Pi.$$

Man bilde sodann die Ausdrücke

$$\psi' = (\psi)_3, \quad \psi'' = (\psi')_3, \quad \ldots$$

bis man zu einem Ausdrucke $\psi^{(\nu')}$ gelangt, welcher durch ψ, ψ', ... $\psi^{(\nu'-1)}$, f_1, f_2, B_3 darstellbar ist. Und hat man dann

$$\psi^{(\nu')} = \Pi_1(\psi, \psi', \ldots \psi^{(\nu'-1)}, f_1, f_2, B_3),$$

so suche man eine Lösung $\chi = f_3$ der Gleichung

$$0 = \frac{\partial\chi}{\partial B_3} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi}\cdot\psi' + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'}\cdot\psi'' + \cdots + \frac{\partial\chi}{\partial\psi^{(\nu-1)}}\cdot\Pi_1.$$

Die Zahlen ν, ν' sind dabei immer gleich oder kleiner als $2n-5$.

Auf ähnliche Weise sucht man die Functionen f_4, f_5, ... *Endlich*, um die Function f_n zu finden, bildet man n Ausdrücke $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$, ... $(\varphi)_n$, welche den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
(\varphi) &= (N_1)(\varphi)_1 + (N_2)(\varphi)_2 + \cdots + (N_n)(\varphi)_n,\\
[f_1, \varphi] &= [f_1, N_1](\varphi)_1 + [f_1, N_2](\varphi)_2 + \cdots + [f_1, N_n](\varphi)_n,\\
[f_2, \varphi] &= [f_2, N_1](\varphi)_1 + [f_2, N_2](\varphi)_2 + \cdots + [f_2, N_n](\varphi)_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[f_{n-1}, \varphi] &= [f_{n-1}, N_1](\varphi)_1 + [f_{n-1}, N_2](\varphi)_2 + \cdots + [f_{n-1}, N_n](\varphi)_n,
\end{aligned}$$

wo N_1, N_2, ... N_n beliebige Functionen sind, welche nur die Auflösung dieser linearen Gleichungen gestatten. Man sucht sodann diejenige Lösung der Gleichung

$$(\varphi)_1 = 0,$$

welche ausser den bekannten Lösungen, N_2, N_3, ... N_n, f_1, f_2, ... f_{n-1}, noch existirt, und bildet die Function

$$\varphi' = (\varphi)_2,$$

welche nothwendig sich durch φ, N_2, N_3, ... N_n, f_1, f_2, ... f_{n-1} ausdrücken lässt, so dass

$$\varphi' = \Pi(\varphi, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, N_2, N_3, \ldots N_n).$$

Hierauf sucht man die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial\psi}{\partial N_2} + \Pi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0;$$

bildet alsdann die Function

$$\psi' = (\psi)_3,$$

welche sich durch ψ, f_1, f_2, ... f_{n-1}, N_3, N_4, ... N_n ausdrücken lässt, so dass

$$\psi' = \Pi_1(\psi, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, N_3, N_4, \ldots N_n).$$

Man sucht ferner die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial\chi}{\partial N_3} + \Pi_1\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\psi} = 0,$$

bildet die Function

$$\chi' = (\psi)_4 = \Pi_2(\chi, f_1, f_2, \dots f_{n-1}, N_4, N_5, \dots N_n)$$

u. s. w.

Auf diese Weise gelangt man allmälig zu einer Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial N_{n-1}} + \Pi_{n-3} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0,$$

wo Π_{n-3} eine Function von z, f_1, f_2, $\dots$ f_{n-1}, N_{n-1}, N_n ist. Man sucht die Lösung dieser Gleichung, bildet die Function

$$\vartheta' = (\vartheta)_n = \Pi_{n-2}(\vartheta, f_1, f_2, \dots f_{n-1}, N_n),$$

und sucht schliesslich die Lösung $\omega = f_n$ der Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial N_n} + \Pi_{n-2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} = 0.$$

Die Operationen sind hiermit abgeschlossen; die gefundenen Functionen f_n, Constanten gleich gesetzt, geben die Lösungen des *Pfaff*schen Problems.

Die geforderte Bestimmung kam wesentlich darauf hinaus, die Functionen f so zu wählen, dass den $2n$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
X_1 &= F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \\
X_2 &= F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X_{2n} &= F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} + \dots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}}
\end{aligned}$$

durch n Functionen F gleichzeitig genügt werden kann. Da dies geschehen ist, so finden sich die Functionen F ohne Weiteres, indem man irgend n dieser Gleichungen zur Bestimmung derselben benutzt.

Carlruhe, den 25sten Januar 1861.

Das Potential eines homogenen rechtwinkligen Cylinders.

(Von Herrn *O. Röthig.*)

Nachdem durch die Arbeit des Herrn *Grube*, de cylindri et coni attractione, Diss. inaug. Goettingae 1859, eine Methode bekannt geworden, die Attractionscomponenten eines elliptischen Cylinders auf elliptische Integrale zurückzuführen, erlaube ich mir im Folgenden eine Form des Potentials eines solchen Cylinders herzuleiten, die den Vortheil bietet, dass sie für *alle* Lagen des angezogenen Punktes gilt, und dass ihre Ableitungen die Attractionscomponenten des Cylinders durch ebenfalls für *alle* Lagen des angezogenen Punktes gültige Integale ausdrücken. Diese führt man durch theilweise Integration in die Form von elliptischen Integralen und nach *Jacobi*schen Methoden in die canonische Form.

Der Anfangspunkt der Coordinaten liege im Mittelpunkte des Cylinders; die Ellipse, welche die Grundfläche desselben bildet, habe die Axen a und b und demnach die Gleichung:

$$(1.) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Axe der z liege in der Axe des Cylinders, dessen Höhe $2c$ sei. Der Cylinder ist ein gerader, das Coordinatensystem also rechtwinklig. Man nenne noch, entsprechend den x, y, z des Cylinders, die Coordinaten des angezogenen Punktes ξ, η, ζ und setze die constante Dichtigkeit der Masse gleich der Einheit.

Denkt man sich nun den Cylinder parallel der yz-Ebene durch Ebenen geschnitten, deren Abstand von einander dx betragen möge, so wird der Cylinder in prismatische Elemente zerlegt, von denen eines, in der Entfernung x vom Mittelpunkte, die Seiten dx, $2y$, $2c$ hat. Das Potential dieses Elementes in Beziehung auf den Punkt (ξ, η, ζ) lässt sich nun aus dem im 58sten Bande pg. 249 gegebenen Werthe des Potentials eines Parallelepipedums *) leicht auffinden. Man muss nämlich zu diesem Zwecke, wie man sich leicht über-

*) Das Potential eines Parallelepipedums ist jedoch schon von *Bessel* im 27. Bande von *Zachs* monatlicher Correspondenz pag. 82 ohne Beweis mitgetheilt worden.

zeugt, in der dort hergeleiteten Gleichung (3.) $\frac{1}{2}dx$ für a, y für b, ferner $\xi-(x+\frac{1}{2}dx)$ für ξ setzen, und erhält so, wenn man noch den vierten Theil des in Gleichung (9.) a. a. O. definirten Ausdruckes Φ hier mit Φ bezeichnet, für das Potential des betrachteten Cylinderelementes den Werth:

$$(2.) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma\Phi[\tfrac{1}{2}dx+\varepsilon(\xi-x-\tfrac{1}{2}dx),\ y+\varepsilon'\eta,\ c+\varepsilon''\zeta],$$

welcher in Folge des Resultates des citirten Aufsatzes für jede Lage des angezogenen Punktes den richtigen Ausdruck für das Potential liefert.

Die Summe in (2.) bedeutet, dass man den Grössen ε, ε', ε'' die Werthe $+1$ und -1 beilegen, und die so erhaltenen acht Φ addiren soll. Giebt man daher der Grösse ε die Werthe $+1$ und -1, und erinnert sich, dass Φ mit dem ersten Argumente sein Zeichen ändert, so überzeugt man sich leicht, dass (2.) übergeht in:

$$(3.) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma\{\Phi(x-\xi+dx,\ y+\varepsilon'\eta,\ c+\varepsilon''\zeta)-\Phi(x-\xi,\ y+\varepsilon'\eta,\ c+\varepsilon''\zeta)\},$$

und hierin bezieht sich die Summe nur noch auf die Grössen ε' und ε''. Es ist aber die Differenz unter dem Summenzeichen in (3.) die Ableitung von Φ nach x multiplicirt mit dx; bezeichnet man nun diese Ableitung mit X, so erhält (3.) die Form:

$$(4.) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma X(x-\xi,\ y+\varepsilon'\eta,\ c+\varepsilon''\zeta)\,dx,$$

und dies ist der Ausdruck für das Potential des Cylinderelementes, der im Folgenden zur Anwendung kommen wird.

Nach Gleichung (8.) a. a. O. hat $X(\alpha,\beta,\gamma)$ den Werth:

$$(5.) \qquad \begin{cases} X(\alpha,\beta,\gamma) = \beta\log\dfrac{\varrho+\gamma}{\varrho-\gamma}+\gamma\log\dfrac{\varrho+\beta}{\varrho-\beta}-2\alpha\operatorname{arctg}\dfrac{\beta\gamma}{\alpha\varrho}, \\ \varrho^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2, \end{cases}$$

ferner ist:

$$(5^a.) \qquad \frac{\partial X}{\partial\alpha}=-2\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho}, \quad \frac{\partial X}{\partial\beta}=\log\frac{\varrho+\gamma}{\varrho-\gamma}, \quad \frac{\partial X}{\partial\gamma}=\log\frac{\varrho+\beta}{\varrho-\beta},$$

und der arctg immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen.

Integrirt man nun den Ausdruck (4.) nach x von $-a$ bis $+a$, so hat man über sämmtliche Elemente des Cylinders summirt, und erhält so als Ausdruck für das Potential des Cylinders, welches hier und ferner mit P bezeichnet werden möge, den Werth

$$(6.) \qquad 2P = \Sigma\int_{-a}^{+a} X(x-\xi,\ y+\varepsilon'\eta,\ c+\varepsilon''\zeta)\,dx,$$

worin, wie schon oben bemerkt, die Summe bedeutet, dass den Grössen ε'

und ε'' die Werthe $+1$ und -1 beigelegt und die so erhaltenen vier Integrale addirt werden sollen.

Wir setzen nun

$$x = a\cos\varphi$$

und also nach (1.) auch

$$y = b\sin\varphi,$$

und erhalten dadurch:

$$(7.) \qquad 2P = a\Sigma\int_0^{\pi} \sin\varphi\, X(a\cos\varphi - \xi, b\sin\varphi + \varepsilon'\eta, c + \varepsilon\zeta)\, d\varphi,$$

wo ε für ε'' geschrieben worden ist.

Es soll jetzt die Summe nach ε' ausgeführt werden. Zu diesem Zwecke bezeichne man der Kürze wegen das X in (7.) nur mit $X(b\sin\varphi + \varepsilon'\eta)$. setze für ε' seine Werthe, und erhält so für die rechte Seite von (7.):

$$a\Sigma\int_0^{\pi} \sin\varphi\, X(b\sin\varphi + \eta)\, d\varphi + a\Sigma\int_0^{\pi} \sin\varphi\, X(b\sin\varphi - \eta)\, d\varphi.$$

Hierin bezieht sich die Summe nur noch auf ε.

Setzt man jetzt in dem ersten der beiden vorstehenden Theile $2\pi - \varphi$ für φ, so geht, da $\cos\varphi$ ungeändert bleibt, $\sin\varphi$ in $-\sin\varphi$ übergeht, und X mit dem zweiten Argumente sein Zeichen ändert, dieser erste Theil über in:

$$a\Sigma\int_{\pi}^{2\pi} \sin\varphi\, X(b\sin\varphi - \eta)\, d\varphi,$$

und giebt, zu dem zweiten addirt, den schliesslichen Ausdruck für das Potential des Cylinders:

$$(8.) \qquad 2P = a\Sigma\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, X(a\cos\varphi - \xi, b\sin\varphi - \eta, c + \varepsilon\zeta)\, d\varphi.$$

Es ist also das Potential eines Cylinders die halbe Summe zweier solcher Integrale, wie in (8.) vorkommen, und zwar unterscheiden sich dieselben nur darin, dass das eine $c+\zeta$ das andere $c-\zeta$ enthält.

Würde man den Cylinder parallel der xz-Ebene durch Ebenen geschnitten haben, so hätte man auf ähnliche Weise erhalten:

$$(8^a.) \qquad 2P = b\Sigma\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, X(b\sin\varphi - \eta, a\cos\varphi - \xi, c + \varepsilon\zeta)\, d\varphi.$$

Man sieht aber die Identität der beiden Ausdrücke in (8.) und (8^a.) sehr leicht auch dadurch ein, dass man in (8.) a mit b, $\cos\varphi$ mit $\sin\varphi$, ξ mit η

vertauscht, was geschehen darf, da es gleichbedeutend ist mit der offenbar gestatteten Vertauschung von a mit b, x mit y und ξ mit η in (6.).

Die Formen (8.) und (8^a.) des Potentials gelten, wie die Herleitung beweist, für *alle* Lagen des angezogenen Punktes. Auch können sie nach der *Dirichlet*schen Methode vollständig verificirt werden.

Für die Attractionscomponenten erhält man jetzt mit Hülfe der unter (5^a.) angegebenen Eigenschaften des Ausdruckes X:

Aus (8.)

$$(9.)\quad 2\frac{\partial P}{\partial \xi} = 2a\Sigma\int_0^{2\pi} \sin\varphi \,.\, \operatorname{arctg}\frac{(b\sin\varphi-\eta)(c+\varepsilon\zeta)}{(a\cos\varphi-\xi)R}\,d\varphi,$$

$$(10.)\quad 2\frac{\partial P}{\partial \eta} = -a\Sigma\int_0^{2\pi} \sin\varphi \,.\, \log\frac{R+(c+\varepsilon\zeta)}{R-(c+\varepsilon\zeta)}\,d\varphi,$$

$$(11.)\quad 2\frac{\partial P}{\partial \zeta} = a\Sigma\varepsilon\int_0^{2\pi} \sin\varphi \,.\, \log\frac{R+(b\sin\varphi-\eta)}{R-(b\sin\varphi-\eta)}\,d\varphi,$$

aus (8^a.)

$$(9^a.)\quad 2\frac{\partial P}{\partial \xi} = -b\Sigma\int_0^{2\pi} \cos\varphi \,.\, \log\frac{R+(c+\varepsilon\zeta)}{R-(c+\varepsilon\zeta)}\,d\varphi,$$

$$(10^a.)\quad 2\frac{\partial P}{\partial \eta} = 2b\Sigma\int_0^{2\pi} \cos\varphi \,.\, \operatorname{arctg}\frac{(a\cos\varphi-\xi)(c+\varepsilon\zeta)}{(b\sin\varphi-\eta)R}\,d\varphi,$$

$$(11^a.)\quad 2\frac{\partial P}{\partial \zeta} = b\Sigma\varepsilon\int_0^{2\pi} \cos\varphi \,.\, \log\frac{R+(a\cos\varphi-\xi)}{R-(a\cos\varphi-\xi)}\,d\varphi,$$

$$R^2 = (a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2+(c+\varepsilon\zeta)^2.$$

Jede der Attractionscomponenten ist hiernach durch zwei in ihrer Form verschiedene Ausdrücke dargestellt. Zur Reduction auf elliptische Integrale sind nun für die Componenten nach der x- und y-Axe die Formen (9^a.) und (10.) am geeignetsten, während es für die dritte Componente gleichgültig ist, welchen der beiden Ausdrücke (11.) und (11^a.) man dazu benutzt. Es gelingt ferner diese Reduction durch theilweise Integration, und man erhält vermittelst derselben aus (9^a.):

$$(12.)\quad \frac{\partial P}{\partial \xi} = b\Sigma(c+\varepsilon\zeta)\int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\varphi-\xi)a\sin^2\varphi-(b\sin\varphi-\eta)b\sin\varphi\cos\varphi}{(a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2}\cdot\frac{d\varphi}{R},$$

aus (10.)

$$(13.)\quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = a\Sigma(c+\varepsilon\zeta)\int_0^{2\pi} \frac{(b\sin\varphi-\eta)b\cos^2\varphi-(a\cos\varphi-\xi)a\sin\varphi\cos\varphi}{(a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2}\cdot\frac{d\varphi}{R},$$

und endlich nach einigen leicht bemerkbaren Reductionen:

aus (11.)

$$(14.)\qquad \frac{\partial P}{\partial \xi} = ab\Sigma\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{R} + a^2\Sigma\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\varphi-\xi)(b\sin\varphi-\eta)\sin\varphi\cos\varphi}{(a\cos\varphi-\xi)^2+(c+\varepsilon\zeta)^2}\cdot\frac{d\varphi}{R},$$

aus (11^a.)

$$(14^a.)\qquad \frac{\partial P}{\partial \xi} = ab\Sigma\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{R} + b^2\Sigma\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\varphi-\xi)(b\sin\varphi-\eta)\sin\varphi\cos\varphi}{(b\sin\varphi-\eta)^2+(c+\varepsilon\zeta)^2}\cdot\frac{d\varphi}{R}.$$

In diesen Gleichungen sind die Attractionscomponenten durch elliptische Integrale ausgedrückt, welche jedoch noch nicht die canonische Form haben. Für den Fall eines Kreiscylinders gelingt es leicht, die Wurzel in die canonische Form zu bringen.

Ist nämlich $b=a$, also der Cylinder ein kreisförmiger, so darf unbeschadet der Allgemeinheit $\eta=0$ gesetzt werden. Dann wird in den vorstehenden Gleichungen

$$R^2 = a^2+\xi^2+(c+\varepsilon\zeta)^2-2a\xi\cos\varphi.$$

Schreibt man nun überall $\pi-2\varphi$ für φ, so gehen die Grenzen der Integrale der Gleichungen (12.) bis (14^a.) über in $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$, während

$$R^2 = (a+\xi)^2+(c+\varepsilon\zeta)^2-4a\xi\sin^2\varphi$$

wird. Setzt man endlich:

$$k^2 = \frac{4a\xi}{(a+\xi)^2+(c+\varepsilon\zeta)^2},\qquad (k^2<1),$$

so hat jetzt die Wurzel in den Integralen der Gleichungen (12.) bis (14^a.) die canonische Form, und der Modul dieser Integrale ist k; sie sind ferner vollständige elliptische Integrale, da zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ integrirt wird.

Für die weitere Untersuchung des Potentiales selbst, ist zunächst zu bemerken, dass P eine homogene Function zweiten Grades der Grössen a, b, c, ξ, η, ζ ist. Denn X ist homogen ersten Grades in Bezug auf diese Grössen, wie in dem citirten Aufsatze bewiesen worden, also P homogen zweiten Grades wegen der Factoren a respective b vor den Integralen in (8.) und (8^a.). Desshalb gilt die Gleichung:

$$2P = a\frac{\partial P}{\partial a}+b\frac{\partial P}{\partial b}+c\frac{\partial P}{\partial c}+\xi\frac{\partial P}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial P}{\partial \eta}+\zeta\frac{\partial P}{\partial \zeta}.$$

Nun erhält man offenbar $\frac{\partial P}{\partial c}$ aus $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$, indem man in den Ausdrücken der letzteren Grösse den Factor ε auslässt, also können die vier letzten Summanden auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung durch *elliptische* Integrale ausgedrückt werden. Anders verhält sich die Summe der beiden ersten Summanden.

Aus (8ª.) folgt nämlich:

$$2\frac{\partial P}{\partial a} = b\Sigma\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\log\frac{R+(c+\varepsilon\zeta)}{R-(c+\varepsilon\zeta)}d\varphi,$$

und aus (8.)

$$2\frac{\partial P}{\partial b} = a\Sigma\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\log\frac{R+(c+\varepsilon\zeta)}{R-(c+\varepsilon\zeta)}d\varphi,$$

also erhält man:

$$a\frac{\partial P}{\partial a}+b\frac{\partial P}{\partial b} = \tfrac{1}{2}ab\Sigma\int_0^{2\pi}\log\frac{R+(c+\varepsilon\zeta)}{R-(c+\varepsilon\zeta)}d\varphi.$$

Nun ist

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\log\frac{R+(c+\varepsilon\zeta)}{R-(c+\varepsilon\zeta)} = \int_{-c}^{+c}\frac{dz}{R_1},$$

wo

$$R_1^2 = (a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

also:

$$a\frac{\partial P}{\partial a}+b\frac{\partial P}{\partial b} = ab\int_0^{2\pi}\int_{-c}^{+c}\frac{d\varphi\,dz}{R_1}.$$

Führt man hier zunächst die Integration nach φ aus, so erhält man, wie noch deutlicher aus der folgenden Bemerkung des Herrn *Clebsch* folgt, ein einziges vollständiges Integral erster Gattung, dessen Modul von z abhängig ist, und dieses ist, wie die vorstehende Gleichung zeigt, noch zwischen den Grenzen $-c$ und $+c$ zu integriren. Der allgemeine Ausdruck des Potentials des Cylinders enthält also ausser dem vorstehenden Integrale nur noch elliptische.

Die Reduction der Integrale (12.), (13.), (14.) für den allgemeinen Fall in die canonische Form ist schon von *Gauss* in der determinatio attractionis etc., comment. Goetting. Band IV, pag. 21 und von *Jacobi* an verschiedenen Stellen dieses Journals Band 2 pag. 234, Band 8 pag. 253 und pag. 321, Band 12 pag. 1 behandelt worden. Auch lassen sich, wie aus Band 8 §. 21 pag. 334 erhellt, sämmtliche auf die Reduction der Wurzel bezügliche Formeln aus den von *Jacobi* gegebenen Gleichungen (67.) und (68.)

Band 8 pag. 329 unmittelbar abschreiben. Ich verweise jedoch wegen dieser Fragen auf die nachstehende Bemerkung des Herrn *Clebsch*, welche in übersichtlicherer und kürzerer Weise zu den Endformeln gelangt, als die *Jacobi*sche Abhandlung.

Nach diesen Bemerkungen beschränkt sich also die vollständige Trennung der Integrale in den Gleichungen (12.), (13.), (14.) in die drei Gattungen auf die rein algebraische Behandlung der in $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ rationalen Brüche unter den Integralzeichen, welche ich hier nicht weiter verfolgen will.

Was endlich noch die Frage betrifft, ob die entwickelten Formen der Attractionscomponenten wirklich für *alle* Lagen des angezogenen Punktes gelten, so zeigt eine leichte Untersuchung der Function X in (8.) und (8^a.), dass dieselbe für *alle* Werthe der Argumente endlich und stetig bleibt. Die Differentiationen nach ξ, η, ζ unter den Integralzeichen in (8.) und (8^a.) sind daher ohne alle Einschränkung erlaubt, und die dadurch erhaltenen Gleichungen (9.) bis (11^a.) gelten also für alle Lagen des angezogenen Punktes.

Berlin, April 1861.

Bemerkung zu der vorstehenden Abhandlung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Zur Reduction der elliptischen Integrale, welche in dem obigen Aufsatze auftreten, kann man sich passend der Methode *Jacobi*s bedienen, welche eine solche Reduction auf die gleichzeitige Verwandlung zweier homogenen Functionen zweiter Ordnung in Aggregate von Quadraten zurückführt.

Setzt man in dem Differentialausdrucke

$$dJ = \frac{d\varphi}{\sqrt{(a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2+\gamma^2}}$$

für $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ die Ausdrücke $\frac{x_1}{x}$, $\frac{x_2}{x}$, so bezeichnen x, x_1, x_2 drei Veränderliche, zwischen denen die Gleichung

$$x_1^2+x_2^2-x^2 = 0$$

besteht, und es wird

$$(1.) \qquad dJ = \frac{x_1\,dx_2-x_2\,dx_1}{x\,.\sqrt{f}},$$

wo f die homogene Function zweiter Ordnung

$$(2.) \qquad f = (ax_1-\xi x)^2+(bx_2-\eta x)^2+\gamma^2x^2$$

bedeutet. Es seien nun y, y', y'' neue Veränderliche, welche mit den x durch die linearen Beziehungen

$$(3.) \qquad \begin{cases} x = \alpha' y' + \alpha'' y'' - \alpha y, \\ x_1 = \alpha_1' y' + \alpha_1'' y'' - \alpha_1 y, \\ x_2 = \alpha_2' y' + \alpha_2'' y'' - \alpha_2 y \end{cases}$$

verbunden sind. Man kann dann bekanntlich die Coefficienten α immer so bestimmen, dass

$$(4.) \qquad x_1^2+x_2^2-x^2 = y'^2+y''^2-y^2,$$

während zugleich f die Form

$$(5.) \qquad f = \lambda' y'^2+\lambda'' y''^2-\lambda y^2$$

annimmt, wobei die λ reelle Zahlen bedeuten.

Führt man die Ausdrücke (3.) in (4.) ein, und vergleicht die Coefficienten auf beiden Seiten, so erhält man:

$$(6.) \qquad \begin{cases} \alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha^2 = -1, & \alpha_1'\alpha_1''+\alpha_2'\alpha_2''-\alpha'\alpha'' = 0, \\ \alpha_1'^2+\alpha_2'^2-\alpha'^2 = 1, & \alpha_1''\alpha_1+\alpha_2''\alpha_2-\alpha''\alpha = 0, \\ \alpha_1''^2+\alpha_2''^2-\alpha''^2 = 1, & \alpha_1\alpha_1'+\alpha_2\alpha_2'-\alpha\alpha' = 0. \end{cases}$$

Band 8 pag. 329 unmittelbar abschreiben. Ich verweise jedoch wegen dieser Fragen auf die nachstehende Bemerkung des Herrn *Clebsch*, welche in übersichtlicherer und kürzerer Weise zu den Endformeln gelangt, als die *Jacobi*sche Abhandlung.

Nach diesen Bemerkungen beschränkt sich also die vollständige Trennung der Integrale in den Gleichungen (12.), (13.), (14.) in die drei Gattungen auf die rein algebraische Behandlung der in $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ rationalen Brüche unter den Integralzeichen, welche ich hier nicht weiter verfolgen will.

Was endlich noch die Frage betrifft, ob die entwickelten Formen der Attractionscomponenten wirklich für *alle* Lagen des angezogenen Punktes gelten, so zeigt eine leichte Untersuchung der Function X in (8.) und (8^a.), dass dieselbe für *alle* Werthe der Argumente endlich und stetig bleibt. Die Differentiationen nach ξ, η, ζ unter den Integralzeichen in (8.) und (8^a.) sind daher ohne alle Einschränkung erlaubt, und die dadurch erhaltenen Gleichungen (9.) bis (11^a.) gelten also für alle Lagen des angezogenen Punktes.

Berlin, April 1861.

Bemerkung zu der vorstehenden Abhandlung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Zur Reduction der elliptischen Integrale, welche in dem obigen Aufsatze auftreten, kann man sich passend der Methode *Jacobi*s bedienen, welche eine solche Reduction auf die gleichzeitige Verwandlung zweier homogenen Functionen zweiter Ordnung in Aggregate von Quadraten zurückführt.

Setzt man in dem Differentialausdrucke

$$dJ = \frac{d\varphi}{\sqrt{(a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2+\gamma^2}}$$

für $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ die Ausdrücke $\frac{x_1}{x}$, $\frac{x_2}{x}$, so bezeichnen x, x_1, x_2 drei Veränderliche, zwischen denen die Gleichung

$$x_1^2+x_2^2-x^2 = 0$$

besteht, und es wird

$$(1.) \qquad dJ = \frac{x_1\,dx_2-x_2\,dx_1}{x.\sqrt{f}},$$

wo f die homogene Function zweiter Ordnung

$$(2.) \qquad f = (ax_1-\xi x)^2+(bx_2-\eta x)^2+\gamma^2x^2$$

bedeutet. Es seien nun y, y', y'' neue Veränderliche, welche mit den x durch die linearen Beziehungen

$$(3.) \qquad \begin{cases} x = \alpha' y' + \alpha'' y'' - \alpha y, \\ x_1 = \alpha_1' y' + \alpha_1'' y'' - \alpha_1 y, \\ x_2 = \alpha_2' y' + \alpha_2'' y'' - \alpha_2 y \end{cases}$$

verbunden sind. Man kann dann bekanntlich die Coefficienten α immer so bestimmen, dass

$$(4.) \qquad x_1^2+x_2^2-x^2 = y'^2+y''^2-y^2,$$

während zugleich f die Form

$$(5.) \qquad f = \lambda' y'^2+\lambda'' y''^2-\lambda y^2$$

annimmt, wobei die λ reelle Zahlen bedeuten.

Führt man die Ausdrücke (3.) in (4.) ein, und vergleicht die Coefficienten auf beiden Seiten, so erhält man:

$$(6.) \qquad \begin{cases} \alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha^2 = -1, & \alpha_1'\alpha_1''+\alpha_2'\alpha_2''-\alpha'\alpha'' = 0, \\ \alpha_1'^2+\alpha_2'^2-\alpha'^2 = 1, & \alpha_1''\alpha_1+\alpha_2''\alpha_2-\alpha''\alpha = 0, \\ \alpha_1''^2+\alpha_2''^2-\alpha''^2 = 1, & \alpha_1\alpha_1'+\alpha_2\alpha_2'-\alpha\alpha' = 0. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen giebt die Auflösung des Systems (3.):

$$\begin{aligned} y &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha x, \\ y' &= \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 - \alpha' x, \\ y'' &= \alpha_1'' x_1 + \alpha_2'' x_2 - \alpha'' x. \end{aligned}$$

Nach der gewöhnlichen Methode hätte man diese Auflösungen durch die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha' & \alpha_1' & \alpha_2' \\ \alpha'' & \alpha_1'' & \alpha_2'' \end{vmatrix}$$

und deren Differentialquotienten ausgedrückt erhalten. Aber multiplicirt man Δ mit

$$-\Delta = \begin{vmatrix} -\alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha' & \alpha_1' & \alpha_2' \\ -\alpha'' & \alpha_1'' & \alpha_2'' \end{vmatrix},$$

so kommt nach (6.) $\Delta^2 = 1$, $\Delta = \pm 1$. Da inzwischen der Natur der Aufgabe nach nichts geändert wird, wenn man einige der y und zugleich die entsprechenden Coefficienten α ihr Zeichen ändern lässt, so kann man es immer so einrichten, dass $\Delta = +1$; ich füge auch noch die immer erfüllbare Bedingung hinzu, dass $\alpha > 0$.

Ist $\Delta = +1$, so giebt die Vergleichung beider Auflösungsarten des Systems (3.):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}, & \alpha' &= -\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha'}, & \alpha'' &= -\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha''}, \\ \alpha_1 &= -\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1}, & \alpha_1' &= \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1'}, & \alpha_1'' &= \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1''}, \\ \alpha_2 &= -\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2}, & \alpha_2' &= \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2'}, & \alpha_2'' &= \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2''}. \end{aligned}$$

In Folge dieser Gleichungen hat man

$$\begin{aligned} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 &= \begin{vmatrix} \alpha_1' y' + \alpha_1'' y'' - \alpha_1 y & \alpha_1' dy' + \alpha_1'' dy'' - \alpha_1 dy \\ \alpha_2' y' + \alpha_2'' y'' - \alpha_2 y & \alpha_2' dy' + \alpha_2'' dy'' - \alpha_2 dy \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' \\ \alpha_2 & \alpha_2' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ dy & dy' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1'' \\ \alpha_2' & \alpha_2'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ dy' & dy'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_1'' & \alpha_1 \\ \alpha_2'' & \alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y'' & y \\ dy'' & dy \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha & y & dy \\ \alpha' & y' & dy' \\ \alpha'' & y'' & dy'' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aber der Gleichung (4.) wegen sind die y an einander gebunden durch die Gleichung:

$$y'^2+y''^2-y^2 = 0;$$

man kann also immer einen Winkel ψ so bestimmen, dass

$$y' = y\cos\psi, \qquad y'' = y\sin\psi.$$

Dies eingeführt, hat man

$$(7.) \qquad x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = y(\alpha y - \alpha' y' - \alpha'' y'')\, d\psi = -xy\, d\psi.$$

Man erhält daher aus (1.) den transformirten Differentialausdruck:

$$(8.) \qquad \begin{cases} dJ = \dfrac{\mp y\, d\psi}{\sqrt{\lambda' y'^2 + \lambda'' y''^2 - \lambda y^2}} = \dfrac{\mp d\psi}{\sqrt{\lambda'-\lambda}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \\ k^2 = \dfrac{\lambda'-\lambda''}{\lambda'-\lambda}. \end{cases}$$

Nimmt man hier $\lambda' > \lambda'' > \lambda$, so erfüllt diese Form alle nöthigen Bedingungen; der Factor $\sqrt{\lambda'-\lambda}$ ist reell, und k^2 positiv und kleiner als 1. Schreibt man (7.) noch in der Form

$$y\, d\psi = -x\, d\varphi$$

oder

$$d\psi = d\varphi(\alpha - \alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi),$$

und bemerkt, dass α positiv sein sollte, sowie dass nach (6) $\alpha^2 > \alpha_1^2+\alpha_2^2$, so zeigt sich, dass der Factor $\alpha-\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi$ immer positiv ist, dass also ψ mit φ gleichzeitig wächst. Man muss sonach, die Quadratwurzeln als positiv vorausgesetzt, in (8.) das untere Zeichen wählen, und schreiben:

$$(9.) \qquad dJ = \frac{d\psi}{\sqrt{\lambda'-\lambda}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

Was die Grenzen betrifft, so sind dieselben in den Integralen, auf welche die vorstehende Abhandlung führt, 0 und 2π. Da inzwischen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ mit $\sin\psi$, $\cos\psi$ linear zusammenhängt, und ψ mit φ stets wächst, so durchläuft ψ die ganze Peripherie, während φ dieselbe durchläuft, und zwar in gleichem Sinne; und da endlich der Anfangspunkt des Umlaufs offenbar gleichgültig ist, so kann man auch als die neuen Grenzen 0 und 2π betrachten.

So bleibt nur die numerische Bestimmung der λ und α übrig. Differentiirt man (5.) nach x, x_1, x_2 und setzt dann immer eines der y gleich 1, während man die beiden anderen verschwinden lässt, so erhält man das folgende System, in welchem i die Werthe 0, 1, 2 annehmen kann:

$$a(a\alpha_1^{(i)} - \xi\alpha^{(i)}) = \lambda^{(i)}\alpha_1^{(i)}, \qquad b(b\alpha_2^{(i)} - \eta\alpha^{(i)}) = \lambda^{(i)}\alpha_2^{(i)},$$
$$-a\xi\alpha_1^{(i)} - b\eta\alpha_2^{(i)} + (\xi^2+\eta^2+\gamma^2)\alpha^{(i)} = -\lambda^{(i)}\alpha^{(i)}.$$

Die beiden ersten Gleichungen geben:

$$(10.)\quad \begin{cases} \alpha_1^{(i)} = \dfrac{a\xi\alpha^{(i)}}{a^2-\lambda^{(i)}}, \\ \alpha_2^{(i)} = \dfrac{b\eta\alpha^{(i)}}{b^2-\lambda^{(i)}}, \end{cases}$$

und führt man dies in die dritte ein, so sieht man, dass λ, λ', λ'' die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(11.)\quad \frac{\xi^2}{a^2-\lambda}+\frac{\eta^2}{b^2-\lambda}-\frac{\gamma^2}{\lambda}-1 = 0$$

sind, d. h. die Parameter confocaler Flächen, deren Focalellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 = 0$$

ist, und welche durch den Punkt ξ, η, γ gehen. Von diesen liegt bekanntlich, wenn man, was ein für alle Mal geschehen soll, $a > b$ annimmt, λ' zwischen a^2 und b^2, λ'' zwischen b^2 und 0, λ zwischen 0 und $-\infty$.

Führt man die drei Wurzeln λ ein, so drücken sich ξ^2, η^2, γ^2 durch dieselben aus mit Hülfe der Gleichungen:

$$\xi^2 = \frac{a^2-\lambda.a^2-\lambda'.a^2-\lambda''}{a^2.a^2-b^2},$$

$$\eta^2 = \frac{b^2-\lambda.b^2-\lambda'.b^2-\lambda''}{b^2.b^2-a^2},$$

$$\gamma^2 = -\frac{\lambda\lambda'\lambda''}{a^2b^2}.$$

Da nun die identische Gleichung stattfindet:

$$\frac{a^2-\lambda'.a^2-\lambda''}{a^2-b^2.a^2-\lambda}+\frac{b^2-\lambda'.b^2-\lambda''}{b^2-a^2.b^2-\lambda}-1 = -\frac{\lambda-\lambda'.\lambda-\lambda''}{a^2-\lambda.b^2-\lambda},$$

so giebt die Einführung dieser Werthe in (10.), und der Werthe (10.) in (6.) für α, α', α'' die Ausdrücke:

$$(12.)\quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{a^2-\lambda.b^2-\lambda}{\lambda-\lambda'.\lambda-\lambda''}}, \\ \alpha' = \sqrt{-\dfrac{a^2-\lambda'.b^2-\lambda'}{\lambda'-\lambda''.\lambda'-\lambda}}, \\ \alpha'' = \sqrt{-\dfrac{a^2-\lambda''.b^2-\lambda''}{\lambda''-\lambda.\lambda''-\lambda'}}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke sind, den oben über die λ gemachten Voraussetzungen gemäss, sämmtlich reell. Ich nehme sie auch positiv an; dann ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \alpha_1 & \alpha_1' & \alpha_1'' \\ \alpha_2 & \alpha_2' & \alpha_2'' \end{vmatrix} = \alpha\alpha'\alpha''.\xi\eta.ab \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a^2-\lambda} & \frac{1}{b^2-\lambda} \\ 1 & \frac{1}{a^2-\lambda'} & \frac{1}{b^2-\lambda'} \\ 1 & \frac{1}{a^2-\lambda''} & \frac{1}{b^2-\lambda''} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)\,ab.\alpha\alpha'\alpha''.\xi\eta.\lambda-\lambda'.\lambda'-\lambda''.\lambda''-\lambda}{a^2-\lambda.a^2-\lambda'.a^2-\lambda''.b^2-\lambda.b^2-\lambda'.b^2-\lambda''}$$

ebenfalls positiv, sobald man die Vorstellung hinzufügt, welche immer erlaubt ist, dass ξ, η positiv seien. Die oben geforderten Zeichenbedingungen sind daher sämmtlich erfüllt, und ich gebe nur noch die Transformationsformeln selbst an, in welchen die Buchstaben α, α', α'' an Stelle ihrer Ausdrücke (12.) geblieben sind:

$$(13.)\quad \begin{cases} \cos\varphi = a\xi \dfrac{\frac{\alpha'\cos\psi}{a^2-\lambda'} + \frac{\alpha''\sin\psi}{a^2-\lambda''} - \frac{\alpha}{a^2-\lambda}}{\alpha'\cos\psi + \alpha''\sin\psi - \alpha}, \quad \cos\psi = \dfrac{\alpha'}{\alpha}\cdot\dfrac{\frac{a\xi\cos\varphi}{a^2-\lambda'} + \frac{b\eta\sin\varphi}{b^2-\lambda'} - 1}{\frac{a\xi\cos\varphi}{a^2-\lambda} + \frac{b\eta\sin\varphi}{b^2-\lambda} - 1}, \\ \sin\varphi = b\eta \dfrac{\frac{\alpha'\cos\psi}{b^2-\lambda'} + \frac{\alpha''\sin\psi}{b^2-\lambda''} - \frac{\alpha}{b^2-\lambda}}{\alpha'\cos\psi + \alpha''\sin\psi - \alpha}, \quad \sin\psi = \dfrac{\alpha''}{\alpha}\cdot\dfrac{\frac{a\xi\cos\varphi}{a^2-\lambda''} + \frac{b\eta\sin\varphi}{b^2-\lambda''} - 1}{\frac{a\xi\cos\varphi}{a^2-\lambda} + \frac{b\eta\sin\varphi}{b^2-\lambda} - 1}. \end{cases}$$

Diese Resultate erfordern eine leichte Modification, wenn $b = a$. Dann ist auch $\lambda' = a^2$, und man darf zugleich $\eta = 0$ setzen. Es werden λ, λ'' Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2-\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} = 1,$$

und zwar liegt λ'' zwischen 0 und a^2, λ zwischen 0 und $-\infty$. Die Gleichungen (12.) geben:

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2-\lambda}{\lambda''-\lambda}}, \qquad \alpha' = 0, \qquad \alpha'' = \sqrt{\frac{a^2-\lambda''}{\lambda''-\lambda}};$$

aus (10.) aber erhält man ferner:

$$\alpha_1 = \frac{a\xi\alpha}{a^2-\lambda}, \qquad \alpha_1' = 0, \qquad \alpha_1'' = \frac{a\xi\alpha''}{a^2-\lambda''},$$

$$\alpha_2 = 0, \qquad \alpha_2' = -1, \qquad \alpha_2'' = 0.$$

Das Vorzeichen von α_2' ergiebt sich aus der Bemerkung, dass α_2' überhaupt dem Vorhergehenden nach immer negativ sein muss. Drückt man noch ξ durch λ, λ'' aus, so wird

$$\xi^2 = \frac{a^2-\lambda.a^2-\lambda''}{a^2},$$

und

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{a^2-\lambda''}{\lambda''-\lambda}}, \qquad \alpha_1'' = \sqrt{\frac{a^2-\lambda}{\lambda''-\lambda}},$$

so dass die Substitutionsformeln, wenn man den Modul

$$k = \sqrt{\frac{a^2-\lambda''}{a^2-\lambda}}, \qquad k_1 = \sqrt{\frac{\lambda''-\lambda}{a^2-\lambda}}$$

einführt, die einfache Gestalt annehmen:

$$(14.)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{k-\sin\psi}{1-k\sin\psi}, & \cos\psi = \dfrac{k_1\sin\varphi}{1-k\cos\varphi}, \\ \sin\varphi = \dfrac{k_1\cos\psi}{1-k\sin\psi}, & \sin\psi = \dfrac{k-\cos\varphi}{1-k\cos\varphi}. \end{cases}$$

Der Modul endlich, ausgedrückt in den ursprünglich gegebenen Grössen, ist:

$$(15.)\quad k^2 = \frac{\xi^2+\gamma^2+a^2-\sqrt{(\xi^2+\gamma^2-a^2)^2+4\gamma^2a^2}}{\xi^2+\gamma^2+a^2+\sqrt{(\xi^2+\gamma^2-a^2)^2+4\gamma^2a^2}}.$$

Diese Substitutionen und dieser Modul sind allerdings nicht diejenigen, welche Herr *Röthig* für diesen Fall angegeben hat, aber sie hängen mit jenen auf die einfachste Weise zusammen, nämlich durch die Transformation von *Landen*. Setzt man in dem gegebenen Differentialausdruck:

$$dJ = \frac{d\varphi}{\sqrt{(a\cos\varphi-\xi)^2+a^2\sin^2\varphi+\gamma^2}}$$

$\varphi = 180^0-2v$, so wird direct:

$$dJ = -\frac{2\,dv}{\sqrt{(a+\xi)^2+\gamma^2}\cdot\sqrt{1-\mu^2\sin^2 v}},$$

wo

$$\mu^2 = \frac{4a\xi}{(a+\xi)^2+\gamma^2},$$

was die Formel von Herrn *Röthig* ist. Setzt man auch in (14.) $\varphi = 180^0-2v$, so erhält man

$$(16.)\quad \cos\psi = \frac{2k'\sin v\cos v}{(1+k)\cos^2 v+(1-k)\sin^2 v}, \qquad \sin\psi = \frac{(1+k)\cos^2 v-(1-k)\sin^2 v}{(1+k)\cos^2 v+(1-k)\sin^2 v}.$$

Dies sind die Formeln der *Landen*schen Substitution, und man weiss, dass in

Folge dessen

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -\frac{2}{1+k}\,\frac{dv}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2 v}},$$

wo

$$\mu^2 = \frac{4k}{(1+k)^2}$$

genau die oben diesem Buchstaben beigelegte Bedeutung hat. Aus (9.) ergiebt sich daher:

$$dJ = \frac{1}{\sqrt{a^2-\lambda}}\cdot\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -\frac{2dv}{(1+k)\sqrt{a^2-\lambda}\sqrt{1-\mu^2\sin^2 v}},$$

was, da $(1+k)\sqrt{a^2-\lambda} = \sqrt{(a+\xi)^2+\gamma^2}$, mit der obigen Formel genau übereinstimmt.

Wendet man auf die allgemeine Transformationsformel die *Landen*sche Substitution an, d. h. setzt man die Werthe (16.) in die Formeln (13.) ein, so erhält man

$$dJ = -\frac{2}{\sqrt{\lambda'-\lambda}.(1+k)}\cdot\frac{dv}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2 v}},$$

wo

$$\mu^2 = \frac{4\sqrt{\lambda'-\lambda''.\lambda'-\lambda}}{2\lambda'-\lambda''-\lambda+2\sqrt{(\lambda'-\lambda'')(\lambda'-\lambda)}}.$$

Diese Formeln haben gewisse Vorzüge; denn bezeichnet man mit $F(z)$ die Function

$$\begin{aligned} F(z) &= \lambda-z.\lambda'-z.\lambda''-z \\ &= \xi^2(b^2-z)z+\eta^2(a^2-z)z-\gamma^2(a^2-z)(b^2-z)-z(a^2-z)(b^2-z), \end{aligned}$$

so kann man die obigen Gleichungen auch schreiben:

$$dJ = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{-F''(\lambda')+4\sqrt{-F'(\lambda')}}}\cdot\frac{dv}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2 v}},$$

$$\mu^2 = \frac{8\sqrt{-F'(\lambda')}}{-F''(\lambda')+4\sqrt{-F'(\lambda')}}.$$

so dass Alles durch *eine* Wurzel der cubischen Gleichung ausgedrückt ist. Bemerkt man übrigens, dass der gegebene Differentialausdruck durch die Substitution $z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ die algebraische Form $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ annimmt, sowie, dass

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$$

$$= \frac{(\alpha_2+\alpha_2'')(1+k)\cos^2 v+2k_1\alpha_2'\sin v\cos v+(\alpha_2-\alpha_2'')(1-k)\sin^2 v}{(\alpha+\alpha''+\alpha_1+\alpha_1'')(1+k)\cos^2 v+2k_1(\alpha'+\alpha_1)\sin v\cos v+(\alpha-\alpha''+\alpha_1-\alpha_1'')(1-k)\sin^2 v}$$

sich nach dem Obigen als Quotienten zweier homogenen Functionen zweiter Ordnung von $\sin v$, $\cos v$ darstellt, so sieht man, dass der directe Zusammenhang dieser Transformationen in der Aufgabe liegt, *das Integral* $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ *durch die Substitution zweiter Ordnung*

$$z = \frac{p + qu + ru^2}{p' + q'u + r'u^2}$$

auf die Gestalt $\frac{m\,du}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+\mu_1^2 u^2}}$ *zurückzuführen*, welche letztere durch die Substitution $u = \operatorname{tg} v$ gerade die oben erhaltene Form annimmt.

Carlsruhe, October 1861.

Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Obgleich das Problem der Reflexion von Lichtstrahlen an einer gegebenen Fläche längst die Aufmerksamkeit der Geometer in vielfacher Hinsicht auf sich gezogen hat, so ist doch niemals der Versuch gemacht worden, aus den Bewegungsgleichungen selbst die Gesetze dieser Erscheinungen zu deduciren, und so theoretisch eine sichere Basis für Untersuchungen dieser Art zu gewinnen. Der einzige Fall, den man betrachtete, war der einer unendlich ausgedehnten brechenden Ebene, auf welche ebene Wellen fallen; und so kam es, dass die geometrischen Sätze der Dioptrik und Katoptrik mit dem, was man heute eigentlich Optik zu nennen gewohnt ist, nur durch einige Betrachtungen der Enveloppentheorie lose und gewaltsam verknüpft sind.

In dem Folgenden ist ein Versuch gemacht, in dem einfachen Falle einer reflectirenden Kugel die reflectirten Bewegungen aus den Gleichungen für die Oscillationen eines elastischen Mediums abzuleiten. Mit Hülfe der Theorie der Kugelfunctionen kann man diese Aufgabe allgemein lösen, sobald man sich nur über die Grenzbedingungen, durch welche die Reflexion zu Stande kommt, bestimmte Vorstellungen bildet. Es ist dies bekanntlich ein Punkt, über den weder die Theorie noch die Erfahrung bisher genügenden Aufschluss zu geben vermocht hat. Um so mehr wird man es gerechtfertigt finden, wenn im Folgenden die möglichst einfache Hypothese benutzt ist, dass nämlich die Kugel *vollständig* reflectire, und dass, bei Abwesenheit gebrochener Wellen, die einfallenden und die reflectirenden Bewegungen an der Oberfläche der Kugel sich in ihrer Summe genau aufheben. Die Lösung des Problems erfordert dann wesentlich nur die Lösung des auch rein mathematisch interessanten Problems, *den Differentialquotienten einer Function von x, y, z nach einer dieser Veränderlichen in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe zu entwickeln, wenn die entsprechende Reihe für die Function selbst bekannt ist.* Die Lösung erfolgt einfach und symmetrisch, wenn man sich statt der Kugelfunctionen der entsprechenden homogenen Functionen n^{ter} Ordnung bedient, deren Untersuchung von *Euler* herrührt, und auf welche ich an einem anderen Orte hingewiesen habe.

Die Resultate der ganzen Untersuchung sind sehr verwickelt, und namentlich für den in der Optik wichtigen Fall einer sehr kleinen Wellenlänge scheint es sehr schwer dieselben einfach in passender Form darzustellen. Der entgegengesetzte Fall eines gegen die Wellenlänge sehr kleinen Radius der reflectirenden Kugel ist dagegen für eine Annäherung sehr geeignet, und man findet eine genauere Discussion dieses Falles am Ende der Abhandlung.

---

§. 1.

Zurückführung der Gleichungen der Elasticität auf getrennte partielle Differentialgleichungen.

Die Gleichungen, von denen die kleinen Bewegungen eines uncrystallinischen Mittels abhängen, sind bekanntlich, wenn u, v, w die Componenten der Verschiebung eines Theilchens ausdrücken, von der Form:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + b^2 \Delta^2 u, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + b^2 \Delta^2 v, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + b^2 \Delta^2 w. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet Θ die Verbindung

$$(2.)\quad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

und Δ^2 stellt, nach *Lamé*, die Operation dar:

$$(3.)\quad \Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Es ist bekannt, dass in Folge dieser Gleichungen Θ der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \Theta$$

genügt, und dass die drei Ausdrücke

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 \varphi$$

sind, wie dies z. B. Herr *Stokes* in seiner Abhandlung über die Beugung (Cambridge Transactions, vol. IX, p. 12) benutzt hat. Aber während so sich gewisse Combinationen der Differentialquotienten von u, v, w als Lösungen einfacher partieller Differentialgleichungen darstellen, scheint es vielmehr umgekehrt wünschenswerth und wird erst dadurch in Wahrheit eine Reduction der Gleichungen (1.) bewerkstelligt, dass man u, v, w selbst aus den Differentialquotienten neuer Functionen zusammensetze, die ihrerseits jenen einfachen Differentialgleichungen genügen. Denn nur in einem solchen Fall kann man behaupten, dass die neuen Gleichungen wirklich die Gleichungen (1.) ersetzen. Zu einer solchen Reduction aber gelangt man durch folgende Betrachtung.

Man kann immer setzen:

$$(4.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial P}{\partial x} + u', \\ v = \dfrac{\partial P}{\partial y} + v', \\ w = \dfrac{\partial P}{\partial z} + w', \end{cases}$$

und dann, da vier unbestimmte Functionen an die Stelle von dreien getreten sind, die Bedingung hinzufügen:

$$(5.)\quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichungen (4.), (5.) lassen sich in der That immer zusammen erfüllen, welches auch die Werthe der Functionen u, v, w sein mögen; und zwar auf unendlich viel Weisen, indem für P jede Lösung der Differentialgleichung, welche sich durch Elimination der u', v', w' ergiebt,

$$\Delta^2 P = \Theta$$

gesetzt werden kann; während freilich, nachdem über P verfügt worden, u', v', w' völlig bestimmt sind.

Die Gleichungen (1.) gehen hierdurch über in:

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 u' - \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 v' - \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 w' - \dfrac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

wo Ω die Bedeutung hat:

$$(7.) \qquad \Omega = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 P.$$

Diese Function ist, wie man leicht sieht, indem man die Gleichungen (6.) mit Rücksicht auf (5.) differentiirt, eine Lösung der Gleichung

$$\Delta^2 \Omega = 0.$$

Aber wie auch den Werthen der u, v, w gemäss die Functionen P, u', v', w' zu bestimmen sein mögen, immer kann man zu denselben, ohne die Werthe von u, v, w zu verändern, solche Functionen Q, u'', v'', w'' respective addiren, welche den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + u'' = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} + v'' = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + w'' = 0,$$

$$\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z} = -\Delta^2 Q = 0.$$

Man kann daher, wegen der letzten Gleichung, Q immer so bestimmen, dass $\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\Omega$; und da die Ausdrücke $\Delta^2 u''$, $\Delta^2 v''$, $\Delta^2 w''$ offenbar ebenfalls verschwinden, dann an Stelle von (6.) folgende Gleichungen setzen:

$$\frac{\partial^2 (u' + u'')}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 (u' + u''),$$

$$\frac{\partial^2 (v' + v'')}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 (v' + v''),$$

$$\frac{\partial^2 (w' + w'')}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 (w' + w''),$$

während die u, v, w die Formen annehmen:

$$u = \frac{\partial (P+Q)}{\partial x} + u' + u'',$$

$$v = \frac{\partial (P+Q)}{\partial y} + v' + v'',$$

$$w = \frac{\partial (P+Q)}{\partial z} + w' + w'',$$

während endlich aus der Gleichung (7.) sich noch ergiebt:

$$\frac{\partial^2 (P+Q)}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 (P+Q).$$

Setzt man nun wieder die Buchstaben P, u', v', w' an Stelle von $P+Q$, $u'+u''$, $v'+v''$, $w'+w''$, so hat man offenbar den Satz bewiesen, dass die Gleichun-

gen (4.), (5.) zusammen auch dann noch die allgemeinste Lösung der Gleichungen (1.) repräsentiren, wenn darin u', v', w' beliebige Lösungen der Gleichung

$$(8.) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = b^2\Delta^2\varphi,$$

P eine beliebige Lösung der Gleichung

$$(9.) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\Delta^2\psi$$

bedeutet. Aber die drei ersten Lösungen sind durch die Bedingung (5.) noch verbunden. Um diese zu umgehen, setze man

$$u' = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$
$$v' = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w' = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

und lasse dann U, V, W abermals Lösungen der Gleichung (8.) bedeuten. Dann erhält man folgenden Satz:

Satz 1.

Die allgemeinsten Lösungen der Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + b^2\Delta^2 u,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + b^2\Delta^2 v,$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + b^2\Delta^2 w,$$

erhält man, indem man setzt:

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$
$$v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

wo P eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2\Delta^2 P,$$

U, V, W aber Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = b^2\Delta^2\varphi$$

bedeuten.

§. 2.

Entwickelung von *P, U, V, W* nach Kugelfunctionen.

Die soeben angeführte Form der Lösung ist sehr geschickt um eine allgemeine Entwickelung nach Kugelfunctionen eintreten zu lassen.

Es ist bekannt, dass eine innerhalb eines gewissen Raumes endliche, eindeutige und stetige Function sich innerhalb desselben nach gewissen Functionen zweier Winkel entwickeln lässt, deren Coefficienten dann nur noch den Radius enthalten. Aber die Unsymmetrie, welche durch die Einführung zweier Winkel bedingt wird, drängt darauf hin, für allgemeinere Untersuchungen diese Entwickelung zu modificiren. Jene Functionen zweier Winkel haben die Eigenschaft, mit einer gewissen Potenz des Radius Vector multiplicirt, in ganze homogene Functionen der Coordinaten überzugehen; man kann daher an die Stelle einer Entwickelung nach jenen Functionen zweier Winkel eine Entwickelung nach gewissen ganzen homogenen Functionen der Coordinaten treten lassen, in deren Coefficienten nur der Radius Vector noch auftritt. Es sei mir erlaubt diese homogenen Functionen der Kürze wegen noch als Kugelfunctionen zu bezeichnen. In einer Entwickelung der angegebenen Art treten dann vier formell unabhängige Grössen auf: die Coordinaten x, y, z, so weit dieselben in den Kugelfunctionen vorkommen, und der Radius Vector, letzterer in doppelter Weise, einmal in den Coefficienten, sodann aber auch wohl in den Kugelfunctionen selbst, sofern etwa in diesen die Verbindung $x^2+y^2+z^2=r^2$ den homogenen Functionen integrirend angehört. Im Folgenden werde ich auch durch die Bezeichnung diese beiden Arten des Vorkommens unterscheiden: und zwar soll der Radius Vector durch r bezeichnet werden, soweit er innerhalb der homogenen Functionen als Verbindung der Veränderlichen auftritt; durch $\mathfrak{r}$ aber, soweit er nur den Coefficienten jener Functionen angehört.

Jene homogenen Functionen werden dadurch charakterisirt, dass, wenn M_n eine solche bezeichnet, und n den Grad der Function ausdrückt, sowohl M_n als $\frac{M_n}{r^{2n+1}}$ der Gleichung

$$\Delta^2(\varphi) = 0$$

genügen. Und somit ist also die Aufgabe, die Grössen u, v, w nach Functionen M_n dergestalt zu entwickeln, dass nur noch $\mathfrak{r}$ in den Coefficienten dieser Entwickelung auftritt.

Betrachten wir zunächst etwa die Function P, welche der Gleichung genügt:

$$(10.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 P.$$

In derselben bezieht sich die Operation Δ^2 sowohl auf die Veränderlichen x, y, z, soweit sie in die aus P entspringenden Kugelfunctionen explicite eingehen, als auf dieselben Veränderlichen, soweit sie in $\mathfrak{r}$ enthalten sind. Trennt man beides, und bezieht Δ^2 nur noch auf die explicite vorkommenden x, y, z, so muss man für $\Delta^2 P$ schreiben:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\mathfrak{r}^2 \frac{\partial P}{\partial \mathfrak{r}}\right) + \frac{2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + z\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \Delta^2 P.$$

In diesem Sinne aber verschwindet $\Delta^2 P$, da jedes einzelne Glied der Gleichung $\Delta^2 \varphi = 0$ genügt; und setzt man

$$(11.) \qquad P = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots$$

so ist ferner

$$x\frac{\partial M_n}{\partial x} + y\frac{\partial M_n}{\partial y} + z\frac{\partial M_n}{\partial z} = nM_n,$$

so dass die Gleichung (10.) übergeht in:

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 M_n}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}} \right) \right\}.$$

Bemerken wir nun, dass die einzelnen Glieder dieser Entwickelung, da sie nur nach den in den Coefficienten enthaltenen Grössen t, $\mathfrak{r}$ differentiirt werden, selbst Kugelfunctionen sind, so löst sich die vorstehende Gleichung sofort in die einzelnen auf:

$$(12.) \qquad \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 M_n}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}} \right) = 0,$$

welche die in der Entwickelung von P auftretenden Functionen M als Functionen der Zeit und des Radius Vector definiren.

Setzen wir ganz ebenso:

$$(13.) \qquad \begin{cases} U = M_0^u + M_1^u + M_2^u + \cdots, \\ V = M_0^v + M_1^v + M_2^v + \cdots, \\ W = M_0^w + M_1^w + M_2^w + \cdots, \end{cases}$$

so sind die Functionen M_n^u, M_n^v, M_n^w in gleicher Weise als Functionen von $\mathfrak{r}$, t definirt durch die gemeinsame Differentialgleichung:

$$(14.) \qquad \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} - b^2 \left(\frac{\partial^2 M_n}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}} \right) = 0.$$

Hierdurch ist also die Entwickelung von P, U, V, W auf die Betrachtung der Differentialgleichungen (12.), (14.) zurückgeführt, welche nur noch zwei Veränderliche enthalten.

§. 3.

Sätze über die Functionen M_n.

Man sieht, dass die Functionen M_n noch gewisse Willkürlichkeiten enthalten. Aber die Formen, in welchen die willkürlichen Functionen in die verschiedenen M eingehen, stehen unter einander in einer bestimmten Verwandtschaft, so dass aus dem allgemeinsten M_n andere Functionen abgeleitet werden können, welche in Bezug auf die Veränderlichen x, y, z oder in Bezug auf die Veränderlichen $\mathfrak{r}$, t oder endlich in beiden Beziehungen den Character der Functionen M_{n-1} und M_{n+1} besitzen.

Betrachten wir zunächst eine beliebige homogene Function n^{ter} Ordnung φ_n von x, y, z, welche der Gleichung $\Delta^2(\varphi_n) = 0$ genügt. Dann genügt immer auch $\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}$ derselben Gleichung, aber auch, wie aus Differentiirung der Differentialgleichung sofort folgt, die Functionen:

$$\alpha\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varphi_n}{\partial z},$$

$$\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}.$$

Nun ist der erste Ausdruck eine homogene Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von x, y, z, also eine Kugelfunction $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; der zweite ist eine Function $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, dividirt durch r^{2n+3}, aber mit der Eigenschaft begabt (wie eine kleine Rechnung sofort lehrt), dass sein Zähler für sich der Gleichung $\Delta^2\varphi = 0$ genügt. Dieser Zähler ist also eine Kugelfunction $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und man hat demnach folgenden Satz:

Satz 2.

Ist φ_n eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung, so ist

$$\alpha\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}$$

eine Kugelfunction $(n-1)^{ter}$ Ordnung und

$$r^{2n+3}\left\{\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}\right\}$$

eine Kugelfunction $(n+1)^{ter}$ Ordnung.

Man kann selbst zeigen, dass die beiden letzten Functionen die allgemeinsten ihrer Art sind, wenn φ_n ganz allgemein vorausgesetzt wird.

Wenden wir nunmehr eine ähnliche Betrachtung auf die Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 P$$

an. Ist P eine Lösung, so ist offenbar der Ausdruck

$$\delta P = \alpha \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma \frac{\partial P}{\partial z}$$

eine andere; oder, wenn man in P wieder die Veränderlichen x, y, z, $\mathfrak{r}$ unterscheidet:

$$\delta P = \alpha \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\mathfrak{r}} \frac{\partial P}{\partial \mathfrak{r}}.$$

Setzt man nun für P die oben gefundene Entwickelung nach Kugelfunctionen:

$$P = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots,$$

so wird:

$$(15.) \quad \begin{cases} \delta P = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial M_n}{\partial x} + \frac{x}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}} \right) + \beta \left(\frac{\partial M_n}{\partial y} + \frac{y}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}} \right) + \gamma \left(\frac{\partial M_n}{\partial z} + \frac{z}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}} \right) \right\} \\ \quad = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\left\{ \alpha \frac{\partial T_n}{\partial x} + \beta \frac{\partial T_n}{\partial y} + \gamma \frac{\partial T_n}{\partial z} \right\} \right. \\ \qquad \left. + r^{2n+3} \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{S_n}{r^{2n+1}} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \frac{S_n}{r^{2n+1}} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \frac{S_n}{r^{2n+1}} \right\} \right], \end{cases}$$

wo

$$(16.) \quad \begin{cases} T_n = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}} \frac{\partial . \mathfrak{r}^{2n+1} M_n}{\partial \mathfrak{r}}, \\ S_n = -\frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}} \end{cases}$$

gesetzt ist, und wo bei den Differentiationen nach x, y, z die Grösse $\mathfrak{r}$ als constant angesehen wird.

Bemerkt man nun, dass T_n, S_n in Rücksicht auf x, y, z Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung sind, dass demnach in Folge des Theorems 2. auch die Ausdrücke

$$\alpha \frac{\partial T_n}{\partial x} + \beta \frac{\partial T_n}{\partial y} + \gamma \frac{\partial T_n}{\partial z},$$

$$r^{2n+3} \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{S_n}{r^{2n+1}} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \frac{S_n}{r^{2n+1}} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \frac{S_n}{r^{2n+1}} \right\}$$

Kugelfunctionen bezüglich der $(n-1)^{\text{ten}}$ und $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, so zeigt sich, dass der Ausdruck δP nach Kugelfunctionen geordnet ist, dass also die einzelnen Glieder des Ausdrucks auch in Bezug auf $\mathfrak{r}$, t den Charakter der M_n haben müssen. Da aber in der vorliegenden Form die T, S nur nach den x, y, z differentiirt vorkommen, welche in Bezug auf die $\mathfrak{r}$, t constant sind, so muss dieser Charakter den S, T an sich zukommen; es muss also S_n in Bezug auf die Veränderlichen $\mathfrak{r}$, t von der Art der M_{n+1}, T_n von der Art der M_{n-1} sein. Und dies giebt folgenden Satz:

Satz 3.

Ist M_n eine Function von $\mathfrak{r}$, t, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 M_n}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}} \right\}$$

genügt, so ist

$$T_n = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}} \frac{\partial . \mathfrak{r}^{2n+1} M_n}{\partial \mathfrak{r}}$$

eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_{n-1}}{\partial \mathfrak{r}} \right\},$$

und

$$S_n = -\frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}}$$

eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{2n+4}{\mathfrak{r}} \frac{\partial M_{n+1}}{\partial \mathfrak{r}} \right\}.$$

Und zwar erhält man in T_n, S_n offenbar die allgemeinsten Formen von M_{n-1}, M_{n+1}, wenn die zu Grunde gelegte Function M_n allgemeinster Natur war.

§. 4.

Entwickelung der Verschiebungen.

Aus der Formel (15.) aber ergiebt sich noch ein anderes Resultat, nämlich die Entwickelung der Differentialquotienten einer Function nach den Coordinaten, wenn die Entwickelung der Function selbst nach Kugelfunctionen vorliegt. In der That ist bei Ableitung der Gleichung (15.) der Umstand noch nicht benutzt, dass P einer gewissen Differentialgleichung genügen sollte; man kann daher in dieser Gleichung unter P jede Function der Coordinaten

verstehen, und hat sodann folgenden Satz, indem man die Coefficienten von α, β, γ einzeln betrachtet:

Satz 4.

Sei P eine beliebige Function der Coordinaten, und sei, nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$P = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots;$$

setzt man dann in ähnlicher Weise:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = M_0^x + M_1^x + M_2^x + \cdots,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = M_0^y + M_1^y + M_2^y + \cdots,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = M_0^z + M_1^z + M_2^z + \cdots,$$

so wird

$$M_n^x = \frac{1}{2n+3}\frac{\partial T_{n+1}}{\partial x} + \frac{r^{2n+1}}{2n-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{S_{n-1}}{r^{2n-1}},$$
$$M_n^y = \frac{1}{2n+3}\frac{\partial T_{n+1}}{\partial y} + \frac{r^{2n+1}}{2n-1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{S_{n-1}}{r^{2n-1}},$$
$$M_n^z = \frac{1}{2n+3}\frac{\partial T_{n+1}}{\partial z} + \frac{r^{2n+1}}{2n-1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{S_{n-1}}{r^{2n-1}},$$

wo

$$T_n = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}}\frac{\partial . \mathfrak{r}^{2n+1} M_n}{\partial \mathfrak{r}}, \qquad S_n = -\frac{1}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial \mathfrak{r}},$$

und wo bei der Differentiation von S_n, T_n nach x, y, z die Grösse $\mathfrak{r}$ als constant gilt.

Dieser Satz führt nun sofort zur Entwickelung der Verschiebungen nach Kugelfunctionen. Bewahren wir die Buchstaben M, S, T für die aus P entspringenden Terme, und bezeichnen die analogen Grössen für U, V, W durch

$$M^u, \quad S^u, \quad T^u; \quad M^v, \quad S^v, \quad T^v; \quad M^w, \quad S^w, \quad T^w;$$

so erhalten wir Entwickelungen von der Form

$$(17.) \qquad \begin{cases} u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \\ v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots, \\ w = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots, \end{cases}$$

in denen die Terme u_n, v_n, w_n folgende Ausdrücke annehmen:

$$(18.)\quad \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2n+3}\left\{\dfrac{\partial T_{n+1}}{\partial x}+\dfrac{\partial T^{w}_{n+1}}{\partial y}-\dfrac{\partial T^{v}_{n+1}}{\partial z}\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{r^{2n+1}}{2n-1}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{S_{n-1}}{r^{2n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{S^{w}_{n-1}}{r^{2n-1}}-\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{S^{v}_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ v_n = \dfrac{1}{2n+3}\left\{\dfrac{\partial T_{n+1}}{\partial y}+\dfrac{\partial T^{u}_{n+1}}{\partial z}-\dfrac{\partial T^{w}_{n+1}}{\partial x}\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{r^{2n+1}}{2n-1}\left\{\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{S_{n-1}}{r^{2n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{S^{u}_{n-1}}{r^{2n-1}}-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{S^{w}_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ w_n = \dfrac{1}{2n+3}\left\{\dfrac{\partial T_{n+1}}{\partial z}+\dfrac{\partial T^{v}_{n+1}}{\partial x}-\dfrac{\partial T^{u}_{n+1}}{\partial y}\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{r^{2n+1}}{2n-1}\left\{\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{S_{n-1}}{r^{2n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{S^{v}_{n-1}}{r^{2n-1}}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{S^{u}_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern nun allerdings die vollständige allgemeine Entwickelung von u, v, w nach Kugelfunctionen. Aber dieselbe hat nicht die einfachste Form, deren sie fähig ist, und führt namentlich auf grössere Rechnungen für die Bestimmung der M, wenn die Werthe der u, v, w für einen bestimmten Werth von r gegeben vorliegen. Beiden Bedenken entgeht man, wenn man den u_n, v_n, w_n, was sehr leicht ist, die Form giebt:

$$(19.)\quad \begin{cases} u_n = \dfrac{\partial p_{n+1}}{\partial x}+r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\dfrac{\partial t_n}{\partial y}-y\dfrac{\partial t_n}{\partial z}, \\ v_n = \dfrac{\partial p_{n+1}}{\partial y}+r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\dfrac{\partial t_n}{\partial z}-z\dfrac{\partial t_n}{\partial x}, \\ w_n = \dfrac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\dfrac{\partial t_n}{\partial x}-x\dfrac{\partial t_n}{\partial y}, \end{cases}$$

wo q_{n-1}, t_n, p_{n+1} Kugelfunctionen respective der $(n-1)^{\text{ten}}$, n^{ten}, $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung bedeuten, und wo bei den Differentiationen immer r als constant anzusehen ist. Bemerkt man nämlich, dass in Folge der Eigenschaften der Kugelfunctionen:

$$(20.)\quad \Delta^2 p_{n+1}=0,\quad \Delta^2 q_{n-1}=0,\quad \Delta^2 t_n=0,$$

so ergiebt sich aus (19.) leicht:

$$(21.)\quad \begin{cases} n.2n+1.q_{n-1} = -\left\{\dfrac{\partial u_n}{\partial x}+\dfrac{\partial v_n}{\partial y}+\dfrac{\partial w_n}{\partial z}\right\}, \\ n+1.2n+1.p_{n+1} = -r^{2n+3}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{u_n}{r^{2n+1}}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{v_n}{r^{2n+1}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{w_n}{r^{2n+1}}\right\}, \\ n.n+1.t_n = x\left(\dfrac{\partial w_n}{\partial y}-\dfrac{\partial v_n}{\partial z}\right)+y\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial z}-\dfrac{\partial w_n}{\partial x}\right)+z\left(\dfrac{\partial v_n}{\partial x}-\dfrac{\partial u_n}{\partial y}\right), \text{*)} \end{cases}$$

*) Für $n=0$ verschwinden beide Seiten dieser Gleichung. Aber in der That ist der Werth von t_0 in den Gleichungen (19.) vollkommen gleichgültig, da die von demselben herrührenden Glieder in u_n, v_n, w_n identisch verschwinden.

und zwar sind die auf diese Weise erhaltenen Werthe von t_n, p_{n+1}, q_{n-1} wirklich mit den Gleichungen (20.) in Uebereinstimmung, da u_n, v_n, w_n Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung bedeuten sollten, und sind also auch wirklich p_{n+1}, q_{n-1}, t_n Kugelfunctionen der angegebenen Ordnung.

Substituirt man aber in den Ausdrücken (21.) rechts die Werthe von u_n, v_n, w_n, wie sie in den Gleichungen (18.) enthalten sind, so kommt:

$$(22.)\quad \begin{cases} q_{n-1} = \dfrac{S_{n-1}}{2n-1} - \dfrac{1}{n.2n-1}\left\{x\left(\dfrac{\partial S^w_{n-1}}{\partial y} - \dfrac{\partial S^v_{n-1}}{\partial z}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + y\left(\dfrac{\partial S^u_{n-1}}{\partial z} - \dfrac{\partial S^w_{n-1}}{\partial x}\right) + z\left(\dfrac{\partial S^v_{n-1}}{\partial x} - \dfrac{\partial S^u_{n-1}}{\partial y}\right)\right\}, \\ p_{n+1} = \dfrac{T_{n+1}}{2n+3} + \dfrac{1}{n+1.2n+3}\left\{x\left(\dfrac{\partial T^w_{n+1}}{\partial y} - \dfrac{\partial T^v_{n+1}}{\partial z}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + y\left(\dfrac{\partial T^u_{n+1}}{\partial z} - \dfrac{\partial T^w_{n+1}}{\partial x}\right) + z\left(\dfrac{\partial T^v_{n+1}}{\partial x} - \dfrac{\partial T^u_{n+1}}{\partial y}\right)\right\}, \\ t_n = \dfrac{1}{n+1.2n+3}\left(\dfrac{\partial T^u_{n+1}}{\partial x} + \dfrac{\partial T^v_{n+1}}{\partial y} + \dfrac{\partial T^w_{n+1}}{\partial z}\right) \\ \qquad\qquad - \dfrac{r^{2n+1}}{n.2n-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{S^u_{n-1}}{r^{2n-1}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{S^v_{n-1}}{r^{2n-1}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{S^w_{n-1}}{r^{2n-1}}\right). \end{cases}$$

Erinnern wir uns nun der Gleichungen (16.), mit deren Hülfe sich die T und S durch die ursprünglich eingeführten Kugelfunctionen M ausdrückten, so kann man den ersten beiden Gleichungen auch die Gestalt geben:

$$(23.)\quad \begin{cases} q_{n-1} = -\dfrac{\partial}{\mathfrak{r}\partial\mathfrak{r}}\left\{\dfrac{M_{n-1}}{2n-1} - \dfrac{M'_{n-1}}{n}\right\}, \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{\mathfrak{r}^{2n+2}}\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}}\left\{\mathfrak{r}^{2n+3}\left(\dfrac{M_{n+1}}{2n+3} + \dfrac{M'_{n+1}}{n+1}\right)\right\}, \end{cases}$$

wo M'_n die Kugelfunction n^{ter} Ordnung bedeutet:

$$(24.)\quad M'_n = \frac{1}{2n+1}\left\{x\left(\frac{\partial M^w_n}{\partial y} - \frac{\partial M^v_n}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial M^u_n}{\partial z} - \frac{\partial M^w_n}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial M^v_n}{\partial x} - \frac{\partial M^u_n}{\partial y}\right)\right\}.$$

Man erkennt hieraus, dass die Functionen M^u, M^v, M^w nur noch in zwei Verbindungen vorkommen, in den M'_n und in den t_n. Erwägt man zugleich, dass jene Functionen nur die Eigenschaft besitzen sollten, Kugelfunctionen zu sein, und in Bezug auf $\mathfrak{r}$, t den Gleichungen (14.) zu genügen, dass beide Eigenschaften aber den Functionen M'_n, t_n in gleicher Weise zukommen, so darf man offenbar statt der Functionenreihen M^u, M^v, M^w die beiden Functionenreihen M'_n, t_n unmittelbar einführen; mit der einzigen hinzutretenden Bedingung, dass, wie man aus (24.) sieht, die Function M'_0 verschwinde. Und

so erhält man eine Form der Lösung, welche sich in folgendem Satze aussprechen lässt:

Satz 5.

Die Lösungen der Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\frac{\partial \Theta}{\partial x}+b^2\Delta^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\frac{\partial \Theta}{\partial y}+b^2\Delta^2 v,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (a^2-b^2)\frac{\partial \Theta}{\partial z}+b^2\Delta^2 w$$

lassen sich nach Kugelfunctionen in die Reihen

$$u = u_0+u_1+u_2+\cdots,$$

$$v = v_0+v_1+v_2+\cdots,$$

$$w = w_0+w_1+w_2+\cdots$$

entwickeln, d. h. nach homogenen Functionen, die einzeln der Gleichung $\Delta^2\varphi = 0$ genügen, und in deren Coefficienten dann nur noch der Radius Vector $\mathfrak{r}$ eingeht; und zwar ist:

$$u_n = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\frac{\partial t_n}{\partial y}-y\frac{\partial t_n}{\partial z},$$

$$v_n = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial y}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\frac{\partial t_n}{\partial z}-z\frac{\partial t_n}{\partial x},$$

$$w_n = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\frac{\partial t_n}{\partial x}-x\frac{\partial t_n}{\partial y},$$

wo

$$q_{n-1} = -\frac{1}{\mathfrak{r}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left\{\frac{M_{n-1}}{2n-1}-\frac{M'_{n-1}}{n}\right\},$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n+2}}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left\{\mathfrak{r}^{2n+3}\left(\frac{M_{n+1}}{2n+3}+\frac{M'_{n+1}}{n+1}\right)\right\},$$

und wo M_n, M'_n, t_n beliebige Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung bedeuten; die Coefficienten der letzteren aber sind Functionen von $\mathfrak{r}$, t, und zwar genügen die Coefficienten von M_n der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathfrak{r}^2}+\frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{r}}\right\},$$

die Coefficienten von M'_n, t_n aber der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = b^2\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathfrak{r}^2}+\frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{r}}\right\},$$

wozu noch die Bedingung tritt, dass M'_0 verschwinde.

§. 5.

Integration der Gleichungen, denen die M in Bezug auf $\mathfrak{r}$, t genügen. Einführung der Grenzbedingungen.

Die Integration der Gleichungen (12.), (14.) ist leicht und bekannt. Nimmt man in (12.) für M_n die Form an:

$$M_n = \frac{c}{\mathfrak{r}^{n+1}}\{f^{(n)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n)}(\mathfrak{r}+at)\}+\frac{c'}{\mathfrak{r}^{n+2}}\{f^{(n-1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-1)}(\mathfrak{r}+at)\}+\cdots$$
$$+\frac{c^{(n)}}{\mathfrak{r}^{2n+1}}\{f(\mathfrak{r}-at)+F(\mathfrak{r}+at)\},$$

wo die c constante Coefficienten, die Indices bei den Functionszeichen Differentialquotienten bedeuten, so findet sich aus der Differentialgleichung selbst für die c eine einfache Recursionsformel, so dass man

$$(25.)\quad \left\{\begin{aligned} M_n = {} & \frac{f^{(n)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+1}} - \frac{n.n+1}{2}\,\frac{f^{(n-1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+2}} \\ & + \frac{n-1.n.n+1.n+2}{2.4}\,\frac{f^{(n-2)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-2)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+3}} \\ & -+\cdots\pm\frac{1.2\ldots 2n}{2.4\ldots 2n}\,\frac{f(\mathfrak{r}-at)+F(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{2n+1}} \end{aligned}\right.$$

setzen darf. Der dritte Satz findet hierdurch eine directe Bestätigung; denn indem man S_n, T_n bildet, wird:

$$(26.)\quad \left\{\begin{aligned} S_n = {} & -\Big\{\frac{f^{(n+1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n+1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+2}} - \frac{n+1.n+2}{2}\,\frac{f^{(n)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+3}} \\ & + \frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}\,\frac{f^{(n-1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+4}} -+\cdots \\ & \mp\frac{1.2\ldots 2n+2}{2.4\ldots 2n+2}\,\frac{f(\mathfrak{r}-at)+F(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{2n+3}}\Big\}, \\ T_n = {} & \frac{f^{(n+1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n+1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n}} - \frac{n-1.n}{2}\,\frac{f^{(n)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+1}} \\ & + \frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}\,\frac{f^{(n-1)}(\mathfrak{r}-at)+F^{(n-1)}(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{n+2}} -+\cdots \\ & \mp\frac{1.2\ldots 2n-2}{2.4\ldots 2n-2}\,\frac{f''(\mathfrak{r}-at)+F''(\mathfrak{r}+at)}{\mathfrak{r}^{2n-1}}, \end{aligned}\right.$$

so dass S_n sofort, abgesehen vom Vorzeichen, die Form von M_{n+1} annimmt, und T_n die Form von M_{n-1}, wenn man nicht f und F sondern f'' und F'' als die willkürlichen Functionen betrachtet.

Es bleibt also nur die Aufgabe übrig, die in den M_n, M_n', t_n vorkommenden willkürlichen Functionen von $\mathfrak{r}-at$ und $\mathfrak{r}+at$, welche ausserdem

Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung in Bezug auf x, y, z sein müssen, den etwa gegebenen Grenzbedingungen gemäss zu bestimmen. Die vorliegenden Entwickelungen sind immer anwendbar, wenn die Zustände des Mediums für irgend zwei Werthe von r, d. h. auf zwei concentrischen Kugelflächen, gegeben sind. Entwickelt man die Functionen, welche auf einer solchen Kugelfläche die Werthe von u, v, w angeben, nach den gewöhnlichen Functionen zweier Winkel, so werden die Coefficienten nur noch Functionen von t; und man verwandelt eine solche Entwickelung sofort in die hier benutzte Entwickelung nach homogenen Functionen, indem man das Aggregat aller Glieder n^{ter} Ordnung mit der n^{ten} Potenz des constanten Radius multiplicirt und dividirt. Indem man aber die so erhaltene Entwickelung mit der allgemeinen vergleicht, ergiebt sich eine Reihe von Bedingungen, welche ausdrücken, dass für den gegebenen Werth des Radius die homogenen Functionen n^{ter} Ordnung der allgemeinen Entwickelung von u, v, w mit den entsprechenden Gliedern der gegebenen Werthe identisch werden. Man erhält diese Bedingungen sofort aus (19.), indem man unter u_n, v_n, w_n die n^{ten} Glieder in der Entwickelung der *gegebenen* Functionen u, v, w versteht. Aber da bei dem Uebergange von (19.) zu (21.) nirgend nach dem hier als constant betrachteten Radius r differentiirt ist, so kann man ohne Weiteres statt (19.) die Gleichungen (21.), (23.) benutzen, welche durch die einfache Weise, in der M_n, M_n', t_n darin eingehen, grosse Vortheile darbieten. Man kann dies in folgende Regel zusammenfassen:

Sollen die allgemeinen Werthe von u, v, w für einen Werth von r gegebenen Functionen $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ gleich werden, so bestimme man die diesen letzteren entsprechenden Functionen $\overline{p_n}$, $\overline{q_n}$, $\overline{t_n}$, durch welche die Entwickelung derselben nach Kugelfunctionen die Form (17.), (19.) *annimmt; dann ist die geforderte Gleichheit dadurch ausgedrückt, dass für den gegebenen Werth von* r:

$$p_n = \overline{p_n}, \qquad q_n = \overline{q_n}, \qquad t_n = \overline{t_n}.$$

Da nun in den allgemeinen Ausdrücken von p_n, q_n, t_n nur sechs willkürliche Functionen vorkommen, so scheint daraus hervorzugehen, dass die Bewegungen innerhalb einer Kugelschale vollkommen bestimmt sein müssen, wenn die Bewegungsgleichungen für keinen Punkt im Innern aufhören zu gelten, und wenn ausserdem die Bewegung auf beiden Begrenzungsflächen gegeben ist. Dies ist aber nicht ganz richtig; in der That würde daraus folgen, dass, wenn auf beiden Begrenzungsflächen absolute Ruhe herrscht, dieselbe auch

im Innern der Schale herrschen müsste. In Wahrheit ist dies nicht nothwendig; vielmehr überzeugt man sich leicht, dass auch in einem solchen Zustande noch eine unendlich grosse Anzahl von Bewegungen im Innern herrschen könne; welche dann also auch bei anderweitig gegebenen Zuständen der Oberfläche begleitend auftreten können. Ein Beispiel hierfür werde ich im folgenden Paragraphen geben.

§. 6.

Vollständige Behandlung des Falles, wo eine, auf einer bestimmten Kugelfläche gegebene Bewegung sich ins Unendliche ausbreiten kann.

Ein besonderes Interesse bietet der Fall, wo die eine Kugelfläche ins Unendliche rückt. In diesem Falle ist es zugleich möglich, die vollständige Bestimmung der willkürlichen Functionen ganz allgemein auszuführen. Die Bedingung freilich, welche an der unendlich weit entfernten Kugelfläche erfüllt sein muss, ist nicht mehr in der im Vorigen angegebenen Weise zu benutzen. Dieselbe kann aber nach *Helmholtz* dadurch ausgedrückt werden, dass im Unendlichen, wo keine ausserhalb liegende Erregungsmittelpunkte mehr gedacht werden dürfen, nur noch Wellenbewegungen auftreten können, deren Gang von innen nach aussen gerichtet ist.

Denken wir uns, um die Vorstellungen zu fixiren, eine beliebige Reihe von Erregungscentren im Raume vertheilt; und denken wir uns, dass die von diesen ausgehenden Bewegungen an einer Kugel vom Radius ε reflectirt werden. Die Bewegungen an irgend einer Stelle des Raumes kann man dann durch die Componenten

$$u+U, \quad v+V, \quad w+W$$

ausdrücken, wo U, V, W die Bewegungen sind, welche in Abwesenheit der Kugel, lediglich in Folge der Erregungsmittelpunkte, allein vorhanden sein würden; u, v, w aber diejenigen Bewegungen, welche durch die Reflexion hinzutreten. Die Bewegungen U, V, W sind dann völlig bekannt; sie haben die Eigenschaft in verschiedenen einzelnen Punkten des Raumes, nämlich in den Erregungscentren selbst, unendlich gross zu werden, woraus sich denn weiter ergiebt, dass die Form ihrer Entwickelung nach Kugelfunctionen ganz verschieden sein wird innerhalb der verschiedenen Kugelflächen, welche vom Anfangspunkte als Mittelpunkt sich durch die verschiedenen Erregungspunkte legen lassen. Für die unbekannten und gesuchten Functionen u, v, w hingegen, welche die reflectirte Bewegung darstellen, findet offenbar eine solche

Unstetigkeit nicht statt; diese Functionen werden sich also im Allgemeinen auch überall durch dieselbe Entwickelung nach Kugelfunctionen darstellen lassen.

Dies vorausgesetzt werden also, nach dem Früheren, in der Unendlichkeit, ja selbst in dem Theile des Raumes, welcher jenseits der Erregungspunkte liegt, nur Wellen auftreten können, welche nach Aussen gerichtet sind; oder es werden in den u, v, w überhaupt nur Functionen von $\mathfrak{r}-at$, $\mathfrak{r}-bt$, nicht aber Functionen von $\mathfrak{r}+at$, $\mathfrak{r}+bt$ auftreten dürfen. Hierdurch reduciren sich die vorkommenden willkürlichen Functionen sofort auf die Hälfte. Aber noch ein wesentlicherer Vortheil wird erreicht: man kann den Grenzbedingungen sofort die Gestalt von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen geben, deren abhängige Veränderliche die gesuchten willkürlichen Functionen sind, während die unabhängige Veränderliche die Zeit wird.

Die Natur der Bedingungen, welche an der Grenze zweier elastischen Medien auftreten, ist bis jetzt noch nicht endgiltig festgestellt. Ich werde mich daher der möglichst einfachen Vorstellung bedienen, dass die Kugelfläche mit dem Radius ε die Bewegungen vollkommen reflectire, oder mit anderen Worten, dass die Summe der einfallenden und der reflectirten Bewegungen an der Oberfläche gleich Null sei. Man hat also für $\mathfrak{r}=\varepsilon$:

$$u=-U, \qquad v=-V, \qquad w=-W,$$

und hieraus folgt, wenn man sich U, V, W nach der Weise der Ausdrücke (17.), (19.) entwickelt denkt, gemäss der im vorigen Paragraphen aufgestellten Regel:

$$(27.) \qquad p_n=-\overline{p_n}, \qquad q_n=-\overline{q_n}, \qquad t_n=-\overline{t_n}.$$

Diese drei Gleichungen zusammen dienen zur Bestimmung der in M_n, M_n', t_n enthaltenen willkürlichen Functionen; und zwar nehmen nach (23.), (25.) diese Gleichungen folgende Gestalt an:

$$(28.)\quad \left\{\begin{aligned}
-\overline{p_n} &= \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^n}-\frac{n-1.n}{2}\frac{f^{(n)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+1}}+\frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}\frac{f^{(n-1)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+2}}-\right.\\
&\quad+\frac{1}{n}\left\{\frac{\varphi^{(n+1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^n}-\frac{n-1.n}{2}\frac{\varphi^{(n)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+1}}+\frac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}\frac{\varphi^{(n-1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+2}}-\right.\\
-\overline{q_n} &= -\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+2}}-\frac{n+1.n+2}{2}\frac{f^{(n)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+3}}+\frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}\frac{f^{(n-1)}(\varepsilon-at)}{\varepsilon^{n+4}}-\right.\\
&\quad+\frac{1}{n+1}\left\{\frac{\varphi^{(n+1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+2}}-\frac{n+1.n+2}{2}\frac{\varphi^{(n)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+3}}+\frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}\frac{\varphi^{(n-1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+4}}-\right.\\
-\overline{t_n} &= \frac{\psi^{(n)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+1}}-\frac{n.n+1}{2}\frac{\psi^{(n-1)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+2}}+\frac{n-1.n.n+1.n+2}{2.4}\frac{\psi^{(n-2)}(\varepsilon-bt)}{\varepsilon^{n+3}}-\cdots,
\end{aligned}\right.$$

wo durch f, φ, ψ respective die zu M_n, M_n', t_n gehörigen willkürlichen Functionen bezeichnet sind. Man sieht, dass diese Gleichungen sich sofort scheiden, indem f, φ aus den ersten beiden gemeinschaftlich, ψ aber aus der letzten allein bestimmt wird.

Bezeichnen wir jetzt durch ξ, η, ζ folgende Functionen der Zeit, in deren Coefficienten noch x, y, z vorkommen:

$$(29.) \qquad \xi = f(\varepsilon - at), \quad \eta = \varphi(\varepsilon - bt), \quad \zeta = \psi(\varepsilon - bt),$$

so hat man auch:

$$\frac{d^k\xi}{dt^k} = (-a)^k f^{(k)}(\varepsilon - at), \quad \frac{d^k\eta}{dt^k} = (-b)^k \varphi^{(k)}(\varepsilon - bt), \quad \frac{d^k\zeta}{dt^k} = (-b)^k \psi^{(k)}(\varepsilon - bt);$$

und die Gleichungen (28.) gehen in folgende gewöhnliche Differentialgleichungen über:

$$(30.) \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^n \frac{\overline{p_n}}{\varepsilon} &= \frac{1}{2n+1}\left\{\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dt^{n+1}} + \frac{n-1.n}{2}\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^n \frac{d^n\xi}{dt^n} + \cdots\right\} \\ &\quad + \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^{n+1}\frac{d^{n+1}\eta}{dt^{n+1}} + \frac{n-1.n}{2}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^n \frac{d^n\eta}{dt^n} + \cdots\right\}, \\ (-1)^n \overline{q_n}.\varepsilon &= -\frac{1}{2n+1}\left\{\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dt^{n+1}} + \frac{n+1.n+2}{2}\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^n \frac{d^n\xi}{dt^n} + \cdots\right\} \\ &\quad + \frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^{n+1}\frac{d^{n+1}\eta}{dt^{n+1}} + \frac{n+1.n+2}{2}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^n \frac{d^n\eta}{dt^n} + \cdots\right\}, \\ (-1)^{n+1}\overline{t_n}.\varepsilon &= \left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^n \frac{d^n\zeta}{dt^n} + \frac{n.n+1}{2}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^{n-1}\frac{d^{n-1}\zeta}{dt^{n-1}} + \cdots. \end{aligned} \right.$$

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen zeigt dann, dass die allgemeinsten Werthe der ξ, η, ζ sich aus bekannten Gliedern zusammensetzen, die etwa durch Variation der Constanten erhalten werden, und aus Gliedern respective der Form

$$A.e^{mt\varepsilon}, \qquad B.e^{mt\varepsilon}, \qquad C.e^{ut\varepsilon},$$

wobei das Verhältniss $A:B$ und m sich aus den Gleichungen bestimmen:

$$(31.) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \\ &\frac{A}{2n+1}\left\{(am)^{n+1} + \frac{n-1.n}{2}(am)^n + \cdots\right\} + \frac{B}{n}\left\{(bm)^{n+1} + \frac{n-1.n}{2}(bm)^n + \cdots\right\}, \\ 0 &= \\ &-\frac{A}{2n+1}\left\{(am)^{n+1} + \frac{n+1.n+2}{2}(am)^n + \cdots\right\} + \frac{B}{n+1}\left\{(bm)^{n+1} + \frac{n+1.n+2}{2}(bm)^n + \cdots\right\}, \end{aligned} \right.$$

während μ eine Wurzel der Gleichung

$$(32.) \qquad 0 = (b\mu)^n + \frac{n.n+1}{2}(b\mu)^{n-1} + \cdots$$

ist und C völlig willkürlich bleibt.

Die letzte Gleichung giebt n numerische Werthe für die Unbekannte b_μ; die ersten beiden Gleichungen führen, da die erste durch m^2 theilbar ist, neben der Doppelwurzel $m=0$ auf eine Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, deren Wurzeln noch von dem Verhältniss $a:b$ anhängen. Hiernach sind also noch, entsprechend einer Kugelfunction n^{ter} Ordnung, $3n$ verschiedene Bewegungen möglich, trotzdem dass auf der Oberfläche der Kugel ε absolute Ruhe herrscht. Aber es ist sehr wichtig zu bemerken, dass unter diesen Bewegungen keine isochron periodischen vorkommen, keine, welche sich durch einen Sinus oder Cosinus darstellen. In der That würde hierzu nöthig sein, dass die Gleichung (32.), sowie diejenige, welche die Elimination von A, B aus (31.) ergiebt, rein imaginäre Wurzeln zulasse. Dann zerfällt, $\mu=\mu'\sqrt{-1}$, $m=m'\sqrt{-1}$ gesetzt, jede dieser Gleichungen in zwei, nämlich (32.) in

$$(33.)\quad \begin{cases} (b_\mu{}')^n - \dfrac{n-1.n.n+1.n+2}{2.4}(b_\mu{}')^{n-2} + -\cdots = 0, \\ \dfrac{n.n+1}{2}\cdot(b_\mu{}')^{n-1} - \dfrac{n-2.n-1.n.n+1.n+2.n+3}{2.4.6}(b_\mu{}')^{n-4} + -\cdots = 0 \end{cases}$$

und die aus (31.) hervorgehende Gleichung

$$(34.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\left\{(am)^{n+1} + \dfrac{n-1.n}{2}(am)^n + \cdots\right\}\left\{(bm)^{n+1} + \dfrac{n+1.n+2}{2}(bm)^n + \cdots\right\} \\ + \dfrac{1}{n}\left\{(am)^{n+1} + \dfrac{n+1.n+2}{2}(am)^n + \cdots\right\}\left\{(bm)^{n+1} + \dfrac{n-1.n}{2}(bm)^n + \cdots\right\} = 0 \end{cases}$$

in die beiden:

$$(35.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\left[\left\{(am')^{n+1} - \dfrac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}(am')^{n-1} + -\cdots\right\}\left\{(bm')^{n+1} - \dfrac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}(bm')^{n-1} + -\cdots\right\}\right. \\ \left. -\left\{\dfrac{n-1.n}{2}(am')^n - \dfrac{n-3\ldots n+2}{2.4.6}(am')^{n-1} + -\cdots\right\}\left\{\dfrac{n+1.n+2}{2}(bm')^n - \dfrac{n-1\ldots n+4}{2.4.6}(bm')^{n-2} + -\cdots\right\}\right] \\ + \dfrac{1}{n}\left[\left\{(am')^{n+1} - \dfrac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}(am')^{n-1} + -\cdots\right\}\left\{(bm')^{n+1} - \dfrac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}(bm')^{n-1} + -\cdots\right\}\right. \\ \left. -\left\{\dfrac{n+1.n+2}{2}(am')^n - \dfrac{n-1\ldots n+4}{2.4.6}(am')^{n-2} + -\cdots\right\}\left\{\dfrac{n-1.n}{2}(bm')^n - \dfrac{n-3\ldots n+2}{2.4.6}(bm')^{n-2} + -\cdots\right\}\right] = \\ \dfrac{1}{n+1}\left[\left\{(am')^{n+1} - \dfrac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}(am')^{n-1} + -\cdots\right\}\left\{\dfrac{n+1.n+2}{2}(bm')^n - \dfrac{n-1\ldots n+4}{2.4.6}(bm')^{n-2} + -\cdots\right\}\right. \\ \left. +\left\{\dfrac{n-1.n}{2}(am')^n - \dfrac{n-3\ldots n+2}{2.4.6}(am')^{n-2} + -\cdots\right\}\left\{(bm')^{n+1} - \dfrac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}(bm')^{n-1} + -\cdots\right\}\right] \\ + \dfrac{1}{n}\left[\left\{(am')^{n+1} - \dfrac{n.n+1.n+2.n+3}{2.4}(am')^{n-1} + -\cdots\right\}\left\{\dfrac{n-1.n}{2}(bm')^n - \dfrac{n-3\ldots n+2}{2.4.6}(bm')^{n-2} + -\cdots\right\}\right. \\ \left. +\left\{\dfrac{n+1.n+2}{2}(am')^n - \dfrac{n-1\ldots n+4}{2.4.6}(am')^{n-2} + -\cdots\right\}\left\{(bm')^{n+1} - \dfrac{n-2.n-1.n.n+1}{2.4}(bm')^{n-1} + -\cdots\right\}\right] = \end{cases}$$

Von den Gleichungen (33.) ist leicht zu zeigen, was von vorn herein zu vermuthen ist, dass sie niemals zusammen bestehen können, oder dass ihre rein numerische Eliminationsresultante niemals Null ist. Der Beweis soll weiter unten gegeben werden. Die Gleichungen (35.), welche nach Elimination von m' auf eine Gleichung für $\frac{a}{b}$ führen, können, wie es scheint, für gewisse Werthe dieses Verhältnisses bestehen; die Beispiele aber, die man den niedrigsten Werthen von n entnimmt, scheinen für dies Verhältniss ausschliesslich negative Werthe zu geben, welche mit der oben gemachten Voraussetzung, dass a, b positiv seien, im Widerspruch stehen, und also nicht in Betracht kommen. Einen Beweis für die Allgemeinheit eines derartigen Verhaltens, der allerdings sehr wünschenswerth wäre, aufzufinden, ist mir bisher nicht gelungen.

Es folgt aber hieraus das wichtige Resultat, dass, wenn die durch U, V, W dargestellten Bewegungen, wie in den gewöhnlichen Wellen. isochron und periodisch sind, so dass die Ausdrücke links in (30.) aus Gliedern bestehen, welche den Sinus und Cosinus von Vielfachen der Zeit proportional sind, auch die reflectirten Bewegungen, auf welche die Variation der Constanten in Folge der Gleichungen (30.) führt, niemals die Zeit ausserhalb des sin. und cos. enthalten, also gleichfalls aus isochronen Schwingungen bestehen. Und von den unbestimmten Gliedern selbst, auf welche die Integration der Gleichungen (30.) führt, muss man folgerichtig abstrahiren, wenn man wirklich nur die reflectirten Bewegungen, d. h. solche aufsucht, welche, in Folge der einfallenden Bewegungen entstanden, gleichzeitig mit diesen verschwinden. Wenn man also, wie im Folgenden geschehen soll, die einfallenden Bewegungen einfach periodisch und isochron annimmt, so kann man einerseits die Aufgabe als völlig bestimmt ansehen, indem man die reflectirten Bewegungen von vorn herein in gleicher Weise isochron und periodisch annimmt, andererseits ist sie aber in dieser Form immer möglich, insofern nie ein unperiodisches Glied hinzutreten kann, d. h. indem die Nenner der linearen Gleichungen nicht verschwinden können, auf welche das in Frage stehende Problem führt. In der That, das Verschwinden jener Nenner würde nur anzeigen, dass die betrachteten Schwingungen identisch seien mit einer derjenigen, welche auch ohne alle einfallende Schwingungen in dem Medium existiren können, und diese eben sind es, bei welchen die Variation der Constanten auf ein unperiodisches Glied führt.

§. 7.

Einfachste Bewegungen. Einführung der Functionen f, φ.

Nehmen wir an, die einfallenden Bewegungen beständen aus einfachen Schwingungen von der Dauer $\frac{2\pi}{k}$; die Functionen U, V, W bestehen dann aus Gliedern, welche respective mit $\sin kt$ und $\cos kt$ multiplicirt sind. Für die Rechnung aber ist es sehr bequem, statt dessen imaginäre Exponentialgrössen einzuführen, so dass U, V, W mit $e^{kt\sqrt{-1}}$ proportional werden. Dann ist also auch, wenn man nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$\overline{p_n} = P_n e^{kt\sqrt{-1}}, \qquad \overline{q_n} = Q_n e^{kt\sqrt{-1}}, \qquad \overline{t_n} = T_n e^{kt\sqrt{-1}}.$$

Man darf nach dem Vorigen die reflectirten Bewegungen derselben Exponentialgrösse proportional annehmen, so dass eben jener Factor auch den Functionen p_n, q_n, t_n, M_n, M_n' zukommt. Da alsdann

$$\frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} = -k^2 M_n,$$

so gehen die partiellen Differentialgleichungen, denen M_n, M_n', t_n genügten, in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen über:

$$(36.) \qquad a^2\left(\frac{d^2M_n}{d\mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{dM_n}{d\mathfrak{r}}\right) + k^2 M_n = 0, \quad b^2\left(\frac{d^2M_n'}{d\mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{dM_n'}{d\mathfrak{r}}\right) + k^2 M_n' = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen erhält man leicht durch Specialisirung aus (25.), oder auch direct. Denn die Gleichung

$$(37.) \qquad \frac{d^2\Omega}{ds^2} + \frac{2n+2}{s}\frac{d\Omega}{ds} + \Omega = 0$$

hat die beiden Lösungen, aus welchen sich die allgemeine sofort zusammensetzt:

$$(38.) \qquad \begin{cases} \{f_n(s) + \varphi_n(s)\sqrt{-1}\}\, e^{s\sqrt{-1}} = F_n(s), \\ \{f_n(s) - \varphi_n(s)\sqrt{-1}\}\, e^{-s\sqrt{-1}} = \Phi_n(s), \end{cases}$$

wo f_n, φ_n die folgenden beiden ganzen Functionen von $\frac{1}{s}$ bedeuten:

$$(39.) \qquad \begin{cases} f_n(s) = \dfrac{1}{s^{n+1}} - \dfrac{n-1.n.n+1.n+2}{2.4.s^{n+3}} + \dfrac{n-3\ldots n+4}{2.4.6.8.s^{n+5}} - + \cdots, \\ \varphi_n(s) = \dfrac{n.n+1}{2s^{n+2}} - \dfrac{n-2\ldots n+3}{2.4.6.s^{n+4}} + \dfrac{n-4\ldots n+5}{2.4\ldots 10.s^{n+6}} - + \cdots. \end{cases}$$

Und so kann man also als die Werthe von M_n, M_n', t_n folgende Ausdrücke betrachten:

$$(40.)\quad \begin{cases} M_n = A_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t+\frac{\mathfrak{r}}{a}\right)\sqrt{-1}} \\ \qquad +B_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)-\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t-\frac{\mathfrak{r}}{a}\right)\sqrt{-1}}, \\ M_n' = C_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t+\frac{\mathfrak{r}}{b}\right)\sqrt{-1}} \\ \qquad +D_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)-\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t-\frac{\mathfrak{r}}{b}\right)\sqrt{-1}}, \\ t_n = E_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t+\frac{\mathfrak{r}}{b}\right)\sqrt{-1}} \\ \qquad +F_n\left\{f_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)-\varphi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\sqrt{-1}\right\}e^{k\left(t-\frac{\mathfrak{r}}{b}\right)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

in welchen A, B, C, D, E, F homogene Functionen n^{ter} Ordnung von x, y, z bezeichnen, welche der Gleichung $\Delta^2\varphi = 0$ genügen, d. h. Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung.

Die beiden Functionen $F_n(s)$, $\Phi_n(s)$, deren zweite aus der ersten blos durch Aenderung im Vorzeichen des imaginären Theils entsteht, unterliegen einem einfachen Gesetze, welches Functionen F_{n+1}, F_{n-1} aus F_n, und ebenso Φ_{n+1}, Φ_{n-1} aus Φ_n abzuleiten gestattet. Es genügt eine von beiden Functionen zu betrachten. Da nach dem Frühern $-\frac{1}{s}\frac{dM_n}{ds}$ die Form von M_{n+1}, und $\frac{1}{s^{2n}}\frac{d}{ds}\left(s^{2n+1}M_n\right)$ die Form von M_{n-1} hat, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$F_{n+1} = -\frac{\alpha}{s}\frac{dF_n}{ds},$$

$$F_{n-1} = \frac{\beta}{s^{2n}}\frac{d}{ds}(s^{2n+1}F_n),$$

wo α, β constante Zahlen bezeichnen. Die Vergleichung irgend welcher Coefficienten giebt $\alpha = \sqrt{-1}$, $\beta = -\sqrt{-1}$, und es ist also

$$(41.)\quad \begin{cases} F_{n+1} = -\frac{\sqrt{-1}}{s}\frac{dF_n}{ds}, \\ F_{n-1} = -\frac{\sqrt{-1}}{s^{2n}}\frac{d}{ds}(s^{2n+1}F_n). \end{cases}$$

Führt man hier die Werthe der F aus (38.) ein, und sondert Reelles von Imaginärem, so erhält man die Gleichungen:

$$(42.)\quad \begin{cases} f_{n+1} = \dfrac{1}{s}\dfrac{d\varphi_n}{ds} + \dfrac{f_n}{s}, & \varphi_{n+1} = -\dfrac{1}{s}\dfrac{df_n}{ds} + \dfrac{\varphi_n}{s}, \\ f_{n-1} = \dfrac{1}{s^{2n}}\dfrac{d.s^{2n+1}\varphi_n}{ds} + sf_n, & \varphi_{n-1} = -\dfrac{1}{s^{2n}}\dfrac{d.s^{2n+1}f_n}{ds} + s\varphi_n. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind für die Theorie der Functionen f, φ sehr wichtig. Zieht man die untereinanderstehenden Gleichungen von einander ab, nachdem man die untern mit s^2 dividirt hat, und eliminirt auf diese Weise die Differentialquotienten, so erhält man eine Recursionsformel, welche jedes Glied in einer der beiden Reihen:

$$f_0,\quad \varphi_1,\quad f_2,\quad \varphi_3,\quad f_4,\quad \ldots$$
$$\varphi_0,\quad f_1,\quad \varphi_2,\quad f_3,\quad \varphi_4,\quad \ldots$$

aus den beiden vorhergehenden Gliedern zu entwickeln gestattet:

$$(43.)\quad \begin{cases} f_{n+1} = \dfrac{f_{n-1}}{s^2} - \dfrac{(2n+1)\varphi_n}{s^2}, \\ \varphi_{n+1} = \dfrac{\varphi_{n-1}}{s^2} + \dfrac{(2n+1)f_n}{s^2}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen, verbunden mit den Werthen

$$f_0 = \frac{1}{s}, \qquad \varphi_0 = 0,$$
$$\varphi_1 = \frac{1}{s^3}, \qquad f_1 = \frac{1}{s^2},$$

sind sämmtliche Functionen f, φ vollständig gegeben. Setzt man an Stelle der Gleichungen (43.) die folgenden:

$$s^{n+1}.f_{n+1} = s^{n-1}.f_{n-1} - \frac{2n+1}{s}\cdot s^n\varphi_n,$$
$$s^{n+1}.\varphi_{n+1} = s^{n-1}.\varphi_{n-1} + \frac{2n+1}{s}\cdot s^n f_n,$$

so zeigt sich, dass die beiden Reihen:

$$-s.\varphi_0,\quad s^2.f_1,\quad -s^3.\varphi_2,\quad s^4.f_3,\quad \ldots$$
$$s.f_0,\quad s^2.\varphi_1,\quad s^3.f_2,\quad s^4.\varphi_3,\quad \ldots$$

Zähler und Nenner der auf einander folgenden Näherungswerthe des Kettenbruchs:

$$\operatorname{tg} s = -\frac{0}{1} + \cfrac{1}{\frac{1}{s} + \cfrac{1}{-\frac{3}{s} + \cfrac{1}{\frac{5}{s} + \cfrac{1}{-\frac{7}{s} + \text{etc.}}}}}$$

darstellen. Multiplicirt man aber die erste Gleichung (43.) mit φ_n, die zweite mit f_n, und addirt eine Gleichung zu der anderen, so kommt:

$$f_{n+1}\cdot\varphi_n+\varphi_{n+1}\cdot f_n = \frac{1}{s^2}(f_n\cdot\varphi_{n-1}+\varphi_n\cdot f_{n-1}),$$

so dass der Ausdruck links durch Erniedrigung des Index um 1 nur den Factor $\frac{1}{s^2}$ erhält. Durch fortgesetztes Erniedrigen ergiebt sich also, da $f_1\cdot\varphi_0+\varphi_1\cdot f_0=\frac{1}{s^4}$ ist:

$$(44.)\qquad f_{n+1}\cdot\varphi_n+\varphi_{n+1}\cdot f_n = \frac{1}{s^{2n+4}}.$$

Diese Gleichung enthält den im vorigen Paragraphen erwähnten Beweis, dass die Gleichungen (33.) niemals neben einander bestehen können; denn jene Gleichungen gehen nach der hier gewählten Bezeichnung über in:

$$f_n\left(\frac{1}{b\mu'}\right)=0,\qquad \varphi_n\left(\frac{1}{b\mu'}\right)=0,$$

was nach der Gleichung (44.) nicht bestehen kann, ohne dass $b\mu'=0$. Dieser Werth aber genügt jenen Gleichungen keineswegs. —

Setzt man in den Gleichungen (41.) $s=\frac{\mathfrak{r}a}{k}$ und $s=\frac{\mathfrak{r}b}{k}$, so dienen dieselben dazu, den Functionen q_{n-1}, p_{n+1}, welche mit Hülfe der Gleichungen (23.) sich aus den Functionen M, M', t zusammensetzen, eine einfachere Gestalt zu geben. Denn schreibt man die Gleichungen (40.) in der Form:

$$(45.)\qquad \begin{cases} M_n = \left\{A_nF_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+B_n\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}, \\ M_n' = \left\{C_nF_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+D_n\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}, \\ t_n = \left\{E_nF_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+F_n\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

so ergiebt sich aus (23.), (41.):

$$(46.)\qquad \begin{cases} q_{n-1} = -\frac{k^2\sqrt{-1}}{(2n-1)a^2}\left\{A_{n-1}F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+B_{n-1}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}} \\ \qquad\quad +\frac{k^2\sqrt{-1}}{nb^2}\left\{C_{n-1}F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+D_{n-1}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}, \\ p_{n+1} = \frac{\sqrt{-1}}{2n+3}\left\{A_{n+1}F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+B_{n+1}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}} \\ \qquad\quad +\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\left\{C_{n+1}F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)+D_{n+1}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}e^{kt\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Und auf diese Weise erhält man durch Substitution der Werthe von q_{n-1}, p_{n-1}, t_n in (19.) die folgenden definitiven Ausdrücke für u_n, v_n, w_n:

$$
(47.)\quad
\begin{cases}
u_n = e^{kt\sqrt{-1}}.\Big[F_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\Big)\sqrt{-1}\Big(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial A_{n+1}}{\partial x}-\frac{k^2r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{A_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big) \\
\qquad + F_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\Big)\Big(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial C_{n+1}}{\partial x}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{C_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\frac{\partial E_n}{\partial y}-y\frac{\partial E_n}{\partial z}\Big) \\
+\Phi_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\Big)\sqrt{-1}\Big(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial B_{n+1}}{\partial x}-\frac{k^2r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{B_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big) \\
\qquad + \Phi_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\Big)\Big(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial D_{n+1}}{\partial x}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\frac{\partial F_n}{\partial y}-y\frac{\partial F_n}{\partial z}\Big)\Big] \\
v_n = e^{kt\sqrt{-1}}.\Big[F_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\Big)\sqrt{-1}\Big(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial A_{n+1}}{\partial y}-\frac{k^2r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{A_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big) \\
\qquad + F_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\Big)\Big(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial C_{n+1}}{\partial y}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{C_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\frac{\partial E_n}{\partial z}-z\frac{\partial E_n}{\partial x}\Big) \\
+\Phi_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\Big)\sqrt{-1}\Big(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial B_{n+1}}{\partial y}-\frac{k^2r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{B_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big) \\
\qquad + \Phi_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\Big)\Big(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial D_{n+1}}{\partial y}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\frac{\partial F_n}{\partial z}-z\frac{\partial F_n}{\partial x}\Big)\Big] \\
w_n = e^{kt\sqrt{-1}}.\Big[F_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\Big)\sqrt{-1}\Big(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial A_{n+1}}{\partial z}-\frac{k^2r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{A_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big) \\
\qquad + F_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\Big)\Big(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial C_{n+1}}{\partial z}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{C_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\frac{\partial E_n}{\partial x}-x\frac{\partial E_n}{\partial y}\Big) \\
+\Phi_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\Big)\sqrt{-1}\Big(\frac{1}{2n+3}\frac{\partial B_{n+1}}{\partial z}-\frac{k^2r^{2n+1}}{2n-1.a^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{B_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big) \\
\qquad + \Phi_n\Big(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\Big)\Big(\frac{\sqrt{-1}}{n+1}\frac{\partial D_{n+1}}{\partial z}+\frac{k^2\sqrt{-1}.r^{2n+1}}{nb^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{D_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\frac{\partial F_n}{\partial x}-x\frac{\partial F_n}{\partial y}\Big)\Big]
\end{cases}
$$

Die Aufsuchung der Functionen u, v, w ist hierdurch auf die Aufsuchung der Kugelfunctionen A, B, C, D, E, F zurückgeführt; und die letztere erfolgt in denjenigen Fällen, für welche diese Entwickelungen passend sind, mit Hülfe linearer Gleichungen, welche sich aus (46.) ergeben. In solcher Weise enthalten diese Gleichungen die Lösung aller Probleme, in welchen die Bewegungen auf zwei concentrischen Kugelschalen gegeben sind, oder auf einer Kugelschale, mit der Bedingung ins Unendliche frei verlaufen zu können. Da inzwischen die Lösungen dieser Aufgaben nach dem Vorigen auf der Hand liegen, so wird es nicht nöthig, im Einzelnen allgemeine Probleme solcher Natur eingehender zu verfolgen.

Mögen die Grenzbedingungen wieder gegeben sein, wie in §. 6; so dass eine Kugel vom Radius ε die einfallenden Bewegungen in den un-

endlichen Raum hinaus reflectirt. Dann müssen, da nur Functionen von $\mathfrak{r}-at$, $\mathfrak{r}-bt$ vorkommen dürfen, alle diejenigen Glieder verschwinden, welche mit den Functionen $F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)$, $F_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)$ multiplicirt sind; es müssen also die Kugelfunctionen A, C, E sämmtlich gleich Null sein. Setzt man dann $\mathfrak{r}=\varepsilon$, und in (45), (46.) für q_n, p_n, t_n die Werthe

$$-P_n.e^{kt\sqrt{-1}},\quad -Q_n.e^{kt\sqrt{-1}},\quad -T_n.e^{kt\sqrt{-1}},$$

welche den aus der einfallenden Bewegung entspringenden Gliedern gleich und entgegengesetzt sind, so erhält man zur Bestimmung der B, D, F folgendes System von linearen Gleichungen:

$$-\frac{k^2\sqrt{-1}}{2n+1.a^2}\cdot B_n\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{k^2\sqrt{-1}}{(n+1)b^2}\cdot D_n\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)=-Q_n,$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{2n+1}\cdot B_n\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{n}\cdot D_n\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)=-P_n,$$

$$F_n\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)=-T_n,$$

aus deren Auflösung sich die Werthe ergeben*):

$$(48.)\quad\begin{cases} B_n=(2n+1)\sqrt{-1}\,\dfrac{-\frac{b^2Q_n}{n}\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)+\frac{k^2P_n}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}{\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)+\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)}\cdot\frac{a^2}{k^2}, \\ D_n=\sqrt{-1}\,\dfrac{a^2Q_n\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+k^2P_n\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)}{\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)+\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)}\cdot\frac{b^2}{k^2}, \\ F_n=-\dfrac{T_n}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen im Verein mit (47.) sind u, v, w völlig bestimmt; und es ist auch sehr leicht, von der imaginären Form zu den reellen Ausdrücken überzugehen.

---

*) Für $n=0$ muss mit M_0' auch D_0 verschwinden, und man hat also

$$B_0=\frac{a^2}{k^2\sqrt{-1}}\,\frac{Q_0}{\Phi_1\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)}.$$

§. 8.

Betrachtung eines einzelnen Erregungspunktes.

Nach dem Beispiel von *Helmholtz* (dieses Journal Bd. 57) kann man, wenn es sich nur um Bewegungen handelt, deren Quellen in endlicher Entfernung liegen, und welche ins Unendliche frei verlaufen können, als einfachste Lösungen der Gleichung

$$(49.) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta^2\varphi$$

diejenigen betrachten, welche von der Form sind:

$$(50.) \qquad \frac{\sin\frac{k(R-at)}{R}}{R}, \qquad \frac{\cos\frac{k(R-at)}{a}}{R},$$

und in welchen

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

die Entfernung von einem festen Punkte x_0, y_0, z_0 bedeutet. Diese Lösungen haben die Eigenschaft, nur für diesen Punkt unendlich gross zu werden, für alle anderen Punkte des Raumes aber endliche Werthe zu behalten. Man kann also die durch (50.) dargestellten Bewegungen so auffassen, als nähmen sie ihren Ursprung in einem Erregungspunkte, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 sind. Aus dem angeführten Aufsatz folgt sodann, dass beliebige in einem Medium vorhandene Erschütterungen sich entweder auf solche zurückführen lassen, welche von derartigen Erregungspunkten ausgehen, oder auf andere, welche aus Paaren unendlich nahe liegender Erregungspunkte entspringen, deren Intensität unendlich gross ist (a. a. O. p. 23, 24). Es wird also jedenfalls genügen, das im Vorigen behandelte Problem der Reflexion an einer Kugelfläche für den Fall zu untersuchen, wo die einfallenden Bewegungen von der Form (50.) sind und also von einem einzigen Punkte x_0, y_0, z_0 ausgehen. An Stelle der Lösungen (50.) aber werde ich der Bequemlichkeit der Rechnung wegen die imaginäre Lösung

$$\frac{e^{-\frac{k}{a}(R-at)\sqrt{-1}}}{R}$$

betrachten, aus welcher eine zweite sofort durch Aenderung des Vorzeichens von $\sqrt{-1}$ entsteht, während aus einer Combination beider die Lösungen (50.) erhalten werden.

Auf dieselbe Weise kann man bei der Behandlung der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = b^2\Delta^2\varphi$$

sich auf die Untersuchung der Lösung

$$\frac{e^{-\frac{k}{b}(R-bt)\sqrt{-1}}}{R}$$

beschränken; und indem man beides in die Ausdrücke einführt, welche nach dem Satz 1. für die Componenten der Bewegung gefunden waren, erhält man für die einfallenden Bewegungen von der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{k}$, welche von dem Erregungspunkte ausgehen, die einfachen Ausdrücke:

$$(51.)\quad \begin{cases} U = k\dfrac{x-x_0}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{a}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \\ V = k\dfrac{y-y_0}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{a}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \\ W = k\dfrac{z-z_0}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{a}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

und

$$(52.)\quad \begin{cases} U = \dfrac{C(y-y_0)-B(z-z_0)}{R}\cdot\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \\ V = \dfrac{A(z-z_0)-C(x-x_0)}{R}\cdot\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}, \\ W = \dfrac{B(x-x_0)-A(y-y_0)}{R}\cdot\dfrac{\partial}{\partial R}\cdot\dfrac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}}{R}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (51.) stellen longitudinale Schwingungen dar, da

$$(53.)\quad U : V : W = x-x_0 : y-y_0 : z-z_0,$$

und ausserdem wird $U^2+V^2+W^2$ nur Function von R, t, so dass die Bewegung sich nach allen Seiten mit gleicher Intensität verbreitet. Die Ausdrücke (52.) hingegen, bei welchen

$$(54.)\quad \begin{cases} U(x-x_0)+V(y-y_0)+W(z-z_0) = 0, \\ UA+VB+WC = 0, \end{cases}$$

stellen geradlinige transversale Bewegungen dar, welche überdies einer bestimmten Ebene

$$(55.)\quad Ax+By+Cz = 0$$

parallel sind. Auch wird

$$U^2+V^2+W^2 = \{(A^2+B^2+C^2)R^2-(A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0))^2\}\cdot F(R,t),$$

so dass die Intensität nicht mehr in allen Punkten einer um x_0, y_0, z_0 beschriebenen Kugelfläche dieselbe ist, sondern in der gegen die Ebene (55.) senkrechten Richtung überall Null ist, und in den ihr parallelen Richtungen ihr Maximum erreicht. Liegt der Punkt x_0, y_0, z_0 in unendlich grosser Entfernung, so verwandeln beide Bewegungen sich in ebene Wellen, von denen die erste longitudinal, die zweite transversal und geradlinig polarisirt ist.

§. 9.

Entwickelung von $\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R}$ nach Kugelfunctionen.

Um diese Lösungen in die Formeln des §. 7 einführen zu können, ist es zunächst nothwendig, dieselben nach Kugelfunctionen zu entwickeln. Inzwischen setzen sich U, V, W aus den Differentialquotienten von Functionen zusammen, welche in dem Schema

$$\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R}$$

enthalten sind; und da nach Satz 4. die Entwickelungen der Differentialquotienten sich sofort angeben lassen, sobald die Entwickelung der Grundfunction bekannt ist, so genügt es, zunächst die obige Function nach Kugelfunctionen zu entwickeln.

Setzt man

$$R = \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\mu},$$

wo also

$$\mu = \frac{xx_0+yy_0+zz_0}{rr_0},$$

und nimmt man $r < r_0$ an, so ist bekanntlich

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0}+\frac{r}{r_0^2}P^{(1)}(\mu)+\frac{r^2}{r_0^3}P^{(2)}(\mu)+\cdots,$$

und die Functionen P sind durch die endliche Reihe definirt:

$$P^{(n)}(\mu) = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}\left(\mu^n-\frac{n.n-1}{2.2n-1}\mu^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}\mu^{n-4}-+\cdots\right).$$

Ueberhaupt folgt, wenn man irgend eine Function von r, r_0, μ nach Potenzen von μ entwickelt, sodann aber statt der Potenzreihe eine nach den $P^{(n)}$ fortschreitende Reihe bildet, dass jede derartige Function durch eine Entwickelung nach den P darstellbar ist, deren Coefficienten allein von r, r_0 abhangen.

An Stelle der Functionen $P^{(n)}$ benutze ich nun, den hier überall angewandten Operationen entsprechend, die Functionen

$$(56.)\quad Y_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}\Big((xx_0+yy_0+zz_0)^n - \frac{n.n-1}{2.2n-1}r^2r_0^2(xx_0+yy_0+zz_0)^{n-2}+-\cdots\Big);$$

und hält man auch wieder, den obigen Bezeichnungen gemäss, den Unterschied zwischen r, $\mathfrak{r}$, r_0, $\mathfrak{r}_0$ fest, so würde die Entwickelung von $\frac{1}{R}$ folgende Gestalt annehmen:

$$(57.)\quad \frac{1}{R} = \frac{1}{\mathfrak{r}_0} + \frac{Y_1}{\mathfrak{r}_0^3} + \frac{Y_2}{\mathfrak{r}_0^5} + \cdots;$$

während bei jeder anderen Function von R die Entwickelung ebenfalls auf die Y führt, multiplicirt mit gewissen Functionen von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_0$.

Ebendies tritt also auch ein für die Entwickelung des vorliegenden Ausdrucks $\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R}$. Aber derselbe genügt ausserdem der Differentialgleichung

$$\Delta^2\varphi + m^2\varphi = 0;$$

und setzt man also

$$(58.)\quad \frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = M_0Y_0 + M_1Y_1 + M_2Y_2 + \cdots,$$

so sind die Coefficienten M Lösungen der Gleichungen (nach (36.))

$$\frac{d^2M_n}{d\mathfrak{r}^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}}\frac{dM_n}{d\mathfrak{r}} + m^2M_n = 0,$$

sowie, wegen der Symmetrie des gegebenen Ausdrucks für $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_0$, Lösungen der Gleichungen:

$$\frac{d^2M_n}{d\mathfrak{r}_0^2} + \frac{2n+2}{\mathfrak{r}_0}\frac{dM_n}{d\mathfrak{r}_0} + m^2M_n = 0;$$

oder, mit anderen Worten, M_n ist eine lineare Function, sowohl von

$$F_n(m\mathfrak{r}), \qquad \Phi_n(m\mathfrak{r})$$

als von

$$F_n(m\mathfrak{r}_0), \qquad \Phi_n(m\mathfrak{r}_0), \quad (38.),$$

so dass in M_n überhaupt nur vier constante Coefficienten zu bestimmen übrig bleiben.

Kehren wir, um diese Bestimmung zu leisten, zu der Form

$$R = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\mu}$$

zurück, nach welcher

$$\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = \frac{e^{-r_0m\sqrt{-1}\sqrt{1+\frac{r^2}{r_0^2}-2\frac{\mu rr_0}{r_0^2}}}}{r_0\sqrt{1+\frac{r^2}{r_0^2}-2\frac{\mu rr_0}{r_0^2}}}.$$

zu setzen ist. Man erhält die verlangte Entwickelung offenbar, wenn man nach Potenzen von $\frac{r^2}{r_0^2}$, $\frac{\mu r r_0}{r_0^2}$ entwickelt, und auf passende Weise ordnet. Aber man erkennt dann, dass erstlich nur $e^{-mr_0\sqrt{-1}}$, nicht aber $e^{mr_0\sqrt{-1}}$ vorkommen kann, und dass zweitens von r nur gerade Potenzen vorkommen, abgesehen von der Verbindung $\mu r r_0$, welche ausschliesslich in die Y eingeht. Das erstere zeigt, dass $F_n(m\mathfrak{r}_0)$ in die Entwickelung überhaupt nicht eingehen könne; das zweite lehrt, dass $\mathfrak{r}$ nur in einer der Verbindungen:

$$F_n(m\mathfrak{r})+\Phi_n(m\mathfrak{r}), \qquad F_n(m\mathfrak{r})-\Phi_n(m\mathfrak{r})$$

auftreten könne, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Und es wird also:

$$M_{2n} = C_{2n}\ \Phi_{2n}\ (m\mathfrak{r}_0)\{F_{2n}\ (m\mathfrak{r})-\Phi_{2n}\ (m\mathfrak{r})\}\cdot m^{4n+1},$$
$$M_{2n+1} = C_{2n+1}\Phi_{2n+1}(m\mathfrak{r}_0)\{F_{2n+1}(m\mathfrak{r})+\Phi_{2n+1}(m\mathfrak{r})\}\cdot m^{4n+3}.$$

In diesen Ausdrücken ist eine Potenz von m als Factor hinzugesetzt, weil der Ausdruck (58.) durch Division mit m in eine Function von mx, my, mz, mx_0, my_0, mz_0 übergeht, ohne m weiter zu enthalten; daher denn die C hier reine Zahlen bedeuten. Eben deswegen kann man in diesen Ausdrücken m gegen Null convergiren lassen, wobei, wie man weiss, der Ausdruck (58.) in $\frac{1}{R}$ und M_n in $\frac{1}{r_0^{2n+1}}$ übergeht. Die obigen Gleichungen also, welche man in die eine:

$$M_n = C_n.\Phi_n(m\mathfrak{r}_0).m^{2n+1}\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\}$$

zusammenfassen kann, geben dann, indem $\Phi_n(m\mathfrak{r}_0)$ offenbar nach (39.) in

$$(-\sqrt{-1})^n\cdot\frac{1.2.3\ldots 2n-1}{(m\mathfrak{r}_0)^{2n+1}}$$

übergeht, für C_n den Ausdruck:

$$C_n = \frac{(\sqrt{-1})^n}{1.3\ldots 2n-1.\lim\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\}_{m=0}}.$$

Es kommt also nur noch auf die Bestimmung des letzten Grenzwerthes an. Zu dieser führen die Gleichungen (43.). Denn aus denselben ergiebt sich sofort:

$$(58^a.)\qquad \begin{cases} F_{n+1}(s) = \dfrac{F_{n-1}(s)+(2n+1)\sqrt{-1}.F_n(s)}{s^2}, \\ \Phi_{n+1}(s) = \dfrac{\Phi_{n-1}(s)-(2n+1)\sqrt{-1}.\Phi_n(s)}{s^2}, \end{cases}$$

daher auch:

$$F_{n+1}(s)-(-1)^{n+1}\Phi_{n+1}(s) =$$
$$\frac{2n+1}{s^2}\sqrt{-1}\{F_n(s)-(-1)^n\Phi_n(s)\}+\frac{1}{s^2}\{F_{n-1}(s)-(-1)^{n-1}\Phi_{n-1}(s)\}.$$

Lässt man nun s gegen Null convergiren, so kann man an Stelle dieser Gleichung die einfachere treten lassen:

$$(2n+1)\sqrt{-1}\{F_n(s)-(-1)^n\Phi_n(s)\}+\{F_{n-1}(s)-(-1)^{n-1}\Phi_{n-1}(s)\} = 0,$$

und durch wiederholte Anwendung derselben findet sich:

$$F_n(s)-(-1)^n\Phi_n(s) = \frac{(\sqrt{-1})^n}{1.3.5\ldots 2n+1}(F_0-\Phi_0) = \frac{2(\sqrt{-1})^{n+1}}{1.3.5\ldots 2n+1}.$$

Es ergiebt sich also endlich:

$$C_n = \frac{2n+1}{2\sqrt{-1}},$$

und die gesuchte Entwickelung wird:

$$(59.)\qquad \frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+1}{2\sqrt{-1}}\cdot m^{2n+1}\cdot\Phi_n(m\mathfrak{r}_0)\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\}\cdot Y_n.$$

Will man die Functionen f, φ einführen, so wird dies:

$$(60.)\qquad \begin{cases}\dfrac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1).m^{2n+1}.\{f_n(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_n(m\mathfrak{r}_0)\sqrt{-1}\}e^{-m\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}.Y_n \\ \qquad\cdot\left\{f_n(m\mathfrak{r})\dfrac{e^{m\mathfrak{r}\sqrt{-1}}-(-1)^n e^{-m\mathfrak{r}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}+\varphi_n(m\mathfrak{r})\dfrac{e^{m\mathfrak{r}\sqrt{-1}}+(-1)^n e^{-m\mathfrak{r}\sqrt{-1}}}{2}\right\}.\end{cases}$$

und wenn man das Reelle von dem Imaginären trennt:

$$(61.)\qquad \begin{cases}\dfrac{\cos mR}{R} = \quad m\ Y_0[f_0(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_0(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)][f_0(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})+\varphi_0(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})] \\ \quad -3m^3Y_1[f_1(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)+\varphi_1(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)][f_1(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})-\varphi_1(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})] \\ \quad +5m^5Y_2[f_2(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_2(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)][f_2(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})+\varphi_2(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})] \\ \quad -7m^7Y_3[f_3(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)+\varphi_3(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)][f_3(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})-\varphi_3(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})] \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\sin mR}{R} = \quad m\ Y_0[f_0(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)+\varphi_0(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)][f_0(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})+\varphi_0(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})] \\ \quad +3m^3Y_1[f_1(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_1(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)][f_1(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})-\varphi_1(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})] \\ \quad +5m^5Y_2[f_2(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)+\varphi_2(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)][f_2(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})+\varphi_2(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})] \\ \quad +7m^7Y_3[f_3(m\mathfrak{r}_0)\cos(m\mathfrak{r}_0)-\varphi_3(m\mathfrak{r}_0)\sin(m\mathfrak{r}_0)][f_3(m\mathfrak{r})\cos(m\mathfrak{r})-\varphi_3(m\mathfrak{r})\sin(m\mathfrak{r})] \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

In der ersten dieser Entwickelungen ist nothwendig $\mathfrak{r}_0 > \mathfrak{r}$ vorausgesetzt. Auch bei der zweiten war dies ursprünglich der Fall; da inzwischen die Entwickelung für $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_0$ symmetrisch ausgefallen ist, wird die Voraussetzung gleichgültig. Ein derartiges Verhalten wird übrigens von vorn herein klar, wenn man bemerkt, dass $\frac{\sin mR}{R}$ sich unmittelbar nach positiven Potenzen von R^2 entwickeln lässt.

§. 10.

Entwickelung der Verschiebungen für die einfallende Bewegung.

Um aus (59.) die Entwickelungen für die Componenten der einfallenden Bewegung abzuleiten, muss man zunächst die Differentialquotienten des Ausdrucks (59.) nach den Coordinaten in Reihen entwickeln, welche nach den Kugelfunctionen fortschreiten; was mit Hülfe des Satzes 4. geschieht. Ich bemerke zuvörderst, dass die Bildung der Ausdrücke T_n, S_n sich sehr einfach gestaltet, wenn man die Gleichungen (41.) benutzt, so wie die entsprechenden für die Φ, welche aus jenen durch Aenderung des Zeichens von $\sqrt{-1}$ hervorgehen. Denn man erhält so:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}^{2n+2}}\frac{\partial.\mathfrak{r}^{2n+3}\{F_{n+1}(m\mathfrak{r})-(-1)^{n+1}\Phi_{n+1}(m\mathfrak{r})\}}{\partial\mathfrak{r}} = \sqrt{-1}\cdot\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{r}}\frac{\partial.\{F_{n-1}(m\mathfrak{r})-(-1)^{n+1}\Phi_{n-1}(m\mathfrak{r})\}}{\partial\mathfrak{r}} = \sqrt{-1}\,.m^2\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\}.$$

Setzt man nun:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = M_0^x+M_1^x+M_2^x+\cdots,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = M_0^y+M_1^y+M_2^y+\cdots,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-mR\sqrt{-1}}}{R} = M_0^z+M_1^z+M_2^z+\cdots,$$

so findet sich aus den Formeln des angeführten Satzes:

$$(62.)\quad\begin{cases} M_n^x = \frac{1}{2}m^{2n+1}\cdot\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\} \\ \qquad\cdot\left[m^2\Phi_{n+1}(m\mathfrak{r}_0)\dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial x}-\Phi_{n-1}(m\mathfrak{r}_0).r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right], \\ M_n^y = \frac{1}{2}m^{2n+1}\cdot\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\} \\ \qquad\cdot\left[m^2\Phi_{n+1}(m\mathfrak{r}_0)\dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial y}-\Phi_{n-1}(m\mathfrak{r}_0).r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right], \\ M_n^z = \frac{1}{2}m^{2n+1}\cdot\{F_n(m\mathfrak{r})-(-1)^n\Phi_n(m\mathfrak{r})\} \\ \qquad\cdot\left[m^2\Phi_{n+1}(m\mathfrak{r}_0)\dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial z}-\Phi_{n-1}(m\mathfrak{r}_0).r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right]. \end{cases}$$

Aus diesen Functionen setzen sich nach (51.), (52.) die Verschiebungen der einfallenden Bewegung aufs Einfachste zusammen; es wird:

für einfallende Longitudinalbewegungen $m = \frac{k}{a}$ und:

$$(63.)\quad \begin{cases} U = Ke^{kt\sqrt{-1}}\{M_0^x + M_1^x + M_2^x + \cdots\}, \\ V = Ke^{kt\sqrt{-1}}\{M_0^y + M_1^y + M_2^y + \cdots\}, \\ W = Ke^{kt\sqrt{-1}}\{M_0^z + M_1^z + M_2^z + \cdots\}, \end{cases} \quad \left(m = \frac{k}{a}\right)$$

für einfallende Transversalbewegungen $m = \frac{k}{b}$ und:

$$(64.)\quad \begin{cases} U = e^{kt\sqrt{-1}}\{C(M_0^y + M_1^y + M_2^y + \cdots) - B(M_0^z + M_1^z + M_2^z + \cdots)\}, \\ V = e^{kt\sqrt{-1}}\{A(M_0^z + M_1^z + M_2^z + \cdots) - C(M_0^x + M_1^x + M_2^x + \cdots)\}, \\ W = e^{kt\sqrt{-1}}\{B(M_0^x + M_1^x + M_2^x + \cdots) - A(M_0^y + M_1^y + M_2^y + \cdots)\}, \end{cases} \quad \left(m = \frac{k}{b}\right)$$

wodurch die in Rede stehenden Entwickelungen gegeben sind.

§. 11.

Reflectirte Bewegung für einfallende Longitudinalbewegungen

Die reflectirten Bewegungen erhält man in den Gleichungen (47.), (48.) ausgedrückt durch die Functionen P_n, Q_n, T_n. Um diese letzteren zu bilden, hat man in den Ausdrücken der U, V, W zunächst $\mathfrak{r} = \varepsilon$ zu setzen, und den Factor $e^{kt\sqrt{-1}}$ auszulassen, sodann aber mit dem Reste diejenigen Operationen vorzunehmen, welche in den Formeln (21.) die Functionen p_n, q_n, t_n gegeben haben. Setzen wir der Kürze wegen

$$(65.)\quad \begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+3} \cdot \left\{F_n\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right\} \Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{x}_0}{a}\right), \\ \beta_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1} \cdot \left\{F_n\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right\} \Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{x}_0}{a}\right), \end{cases}$$

so hat man in (21.) also für u_n, v_n, w_n die Ausdrücke einzusetzen:

$$K\left(\alpha_n \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x} + \beta_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right),$$

$$K\left(\alpha_n \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y} + \beta_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right),$$

$$K\left(\alpha_n \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z} + \beta_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right),$$

um diejenigen reflectirten Bewegungen zu erhalten, welche aus den einfallenden Longitudinalbewegungen hervorgehen. Bemerken wir nun, dass

$$\Delta^2 Y_{n+1} = 0, \qquad \Delta^2\left(\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right) = 0,$$

dass ferner Y_{n+1} und $\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}$ homogene Functionen bezüglich von den Ordnungen $n+1$ und $-n$ sind; bemerken wir endlich, dass der Ausdruck

$$x\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+z\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

immer verschwindet, wenn

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}+f(r,\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}+f(r,\psi)\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}+f(r,\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo φ, ψ beliebige Functionen bezeichnen, — so ergiebt sich sofort:

$$(65^{a}.)\qquad \begin{cases} Q_{n-1} = K.\beta_n.Y_{n-1}, \\ P_{n+1} = K.\alpha_n.Y_{n+1}, \\ T_n = 0. \end{cases}$$

Hiernach verschwindet von den Ausdrücken B_n, D_n, F_n, welche durch (48.) bestimmt sind, der letzte vollständig, während die beiden anderen mit Y_n proportional werden. Setzt man sodann

$$(65^{b}.)\qquad B_n=(2n+1)\sqrt{-1}\,K\,Y_n\cdot\frac{\mathrm{B}_n}{\mathrm{N}_n},\qquad D_n=\sqrt{-1}\,K\,Y_n\cdot\frac{\Delta_n}{\mathrm{N}_n},$$

wobei die B, Δ, N constante Coefficienten sind, so erhalten die u_n, v_n, w_n die Form:

$$(66.)\qquad \begin{cases} u_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x}+\sigma_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ v_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y}+\sigma_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ w_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z}+\sigma_n r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \end{cases}$$

die ϱ_n, σ_n sind Functionen von r allein, nämlich:

$$(67.)\qquad \begin{cases} \varrho_n = \dfrac{\Phi_n\left(\frac{rk}{a}\right)\cdot \mathrm{B}_{n+1}+\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)\cdot\frac{\Delta_{n+1}}{n+1}}{\mathrm{N}_{n+1}}, \\ \sigma_n = \dfrac{-\frac{k^2}{a^2}\cdot\Phi_n\left(\frac{rk}{a}\right)\cdot \mathrm{B}_{n-1}+\frac{k^2}{b^2}\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)\cdot\frac{\Delta_{n-1}}{n}}{\mathrm{N}_{n-1}}, \end{cases}$$

und die Constanten B, Δ, N haben die Bedeutungen:

$$(68.)\quad \begin{cases} B_n = \frac{1}{2}\Phi_n\left(\frac{kr_0}{a}\right)\cdot\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1}\left[\frac{b^2}{n}\left(F_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)-(-1)^{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. +\frac{a^2}{n+1}\left(F_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)-(-1)^{n-1}\Phi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right)\Phi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right], \\ \Delta_n = \frac{1}{2}\Phi_n\left(\frac{kr_0}{a}\right)\cdot\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1}\cdot b^2\left\{F_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\Phi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)-F_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right\}, \\ N_n = \frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)+\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right). \end{cases}$$

Der zweite dieser Ausdrücke lässt sich inzwischen leicht noch in einer viel einfacheren Gestalt darstellen. Aus den Gleichungen (58^a.) ergiebt sich nämlich sofort:

$$F_{n-1}(s)\Phi_{n+1}(s)-\Phi_{n-1}(s)F_{n+1}(s) = -\frac{2n+1\,.\sqrt{-1}}{s^2}\left(\Phi_n(s)F_{n-1}(s)+\Phi_{n-1}(s)F_n(s)\right).$$

Aber aus denselben Gleichungen folgt auch:

$$F_{n+1}(s)\Phi_n(s)+\Phi_{n+1}(s)F_n(s) = \frac{1}{s^2}\left\{F_n(s)\Phi_{n-1}(s)+\Phi_n(s)F_{n-1}(s)\right\}$$

oder durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung auf sich selbst:

$$(68^a.)\quad F_{n+1}(s)\Phi_n(s)+\Phi_{n+1}(s)F_n(s) = \frac{1}{s^{2n}}\left\{F_1(s)\Phi_0(s)+\Phi_1(s)F_0(s)\right\} = \frac{2}{s^{2n+1}}.$$

und also auch:

$$F_{n-1}(s)\Phi_{n+1}(s)-\Phi_{n-1}(s)F_{n+1}(s) = -\frac{2\,.\,2n+1\,.\sqrt{-1}}{s^{2n+1}}.$$

Man erhält daher, indem man diesen Werth in Δ_n einführt:

$$(69.)\quad \Delta_n = -(2n+1)\,.\,\frac{b^2}{\varepsilon^{2n+1}}\cdot\left(\frac{a}{k}\right)^3\cdot\Phi_n\left(\frac{kr_0}{a}\right)\cdot\sqrt{-1}.$$

Die Gleichungen (66.) zeigen, dass die reflectirten Bewegungen, welche nach irgend einem Punkte x, y, z gelangen, in derjenigen Ebene enthalten sind, welche durch diesen Punkt selbst, durch den Erregungspunkt und durch den Kugelmittelpunkt gelegt wird; was von vorn herein wegen der Symmetrie zu erwarten war, welche in Bezug auf die Verbindungslinie der beiden letztgenannten Punkte bei einfallenden Longitudinalbewegungen stattfindet. Um aus der Gleichung (66.) dies Verhalten abzuleiten, bemerke man nur, dass x, y, z in den Y nur in den beiden Verbindungen

$$(69^a.)\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\qquad \tau = xx_0+yy_0+zz_0$$

enthalten sind. Setzt man also

$$\Pi_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \tau} + \sigma_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\},$$

$$\Sigma_n = -Ke^{kt\sqrt{-1}}\left\{\varrho_n \frac{\partial Y_{n+1}}{r\partial r} + \sigma_n r^{2n+1} \frac{\partial}{r\partial r} \frac{\partial Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\},$$

so nehmen u_n, v_n, w_n die Gestalt an:

$$u_n = x_0 \Pi_n + x \Sigma_n,$$
$$v_n = y_0 \Pi_n + y \Sigma_n,$$
$$w_n = z_0 \Pi_n + z \Sigma_n,$$

und setzt man $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \cdots$, $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \cdots$, so ist ebenso:

$$u = x_0 \Pi + x \Sigma,$$
$$v = y_0 \Pi + y \Sigma,$$
$$w = z_0 \Pi + z \Sigma,$$

woraus die in Rede stehende Eigenschaft sich ohne Weiteres ergiebt.

Andererseits sondern sich die durch (66.) dargestellten Bewegungen sofort in zwei Theile, deren einer die Coefficienten B enthält, während der andere die A enthält. Die im ersten Theil enthaltenen Schwingungen haben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a*), führen Verdichtungen und Verdünnungen des Mediums mit sich, und lassen sich durch longitudinale Bewegungen ausdrücken. Für die anderen, welche mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit b begabt sind, verschwindet der Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$; es finden weder Verdichtungen noch Verdünnungen statt, und die Schwingungen dieses Theils sind in transversale Bewegungen auflösbar. Die letzte Art der Bewegung kann ebensowenig wie die erste Art jemals vollständig fehlen; und man erkennt daraus, *dass die Reflexion longitudinaler Wellen an einer Kugelfläche niemals geschehen kann, ohne dass, neben den reflectirten Longitudinalwellen,*

---

*) Da nämlich die $\Phi_n\left(\frac{kr}{a}\right)$ den Exponentialfactor $e^{-\frac{kr}{a}\sqrt{-1}}$ enthält, so haben die betreffenden Glieder den Factor $e^{k\left(t-\frac{r}{a}\right)\sqrt{-1}} = \cos\left(kt - \frac{rk}{a}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(kt - \frac{rk}{a}\right)$, welcher einer Welle mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a entspricht. Ebenso haben die anderen Glieder den Factor $e^{k\left(t-\frac{r}{b}\right)\sqrt{-1}}$.

auch reflectirte Transversalwellen sich bilden, welche sich mit der den Transversalwellen eigenthümlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausbreiten.

§. 12.

Reflexion einfallender Transversalbewegungen.

Um die reflectirten Bewegungen zu bestimmen, welche entstehen, wenn die einfallenden Bewegungen durch (64.) dargestellt sind, bemerke man zunächst, dass die n^{ten} Glieder der Ausdrücke (64.) die Gestalt haben:

$$U_n = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{\alpha_n'\left(C\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y} - B\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z}\right) + \beta_n'\left(C\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} - B\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\cdot r^{2n+1}\right\},$$

$$V_n = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{\alpha_n'\left(A\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z} - C\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x}\right) + \beta_n'\left(A\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} - C\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\cdot r^{2n+1}\right\},$$

$$W_n = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{\alpha_n'\left(B\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x} - A\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y}\right) + \beta_n'\left(B\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} - A\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\cdot r^{2n+1}\right\},$$

wo die Coefficienten α, β, wenn man zugleich $r = \varepsilon$ setzt, die Bedeutungen annehmen:

$$(70.)\quad \begin{cases} \alpha_n' = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+3}\cdot\left\{F_n\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right) - (-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right\}\Phi_{n+1}\left(\frac{kx_0}{b}\right), \\ \beta_n' = -\frac{1}{2}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\cdot\left\{F_n\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right) - (-1)^n\Phi_n\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right\}\Phi_{n-1}\left(\frac{kx_0}{b}\right); \end{cases}$$

dieselben unterscheiden sich von α_n, β_n in (65.) nur dadurch, dass b an die Stelle von a gesetzt ist. Um nun hieraus die Ausdrücke für P_n, Q_n, T_n zu bilden, hat man nur in den Werthen von U_n, V_n, W_n den Factor $e^{kt\sqrt{-1}}$ auszulassen und den Rest an Stelle von u_n, v_n, w_n in die Gleichungen (21.) einzuführen. Mit Rücksicht auf die bekannten Eigenschaften der Y ergiebt sich dann:

$$(71.)\quad \begin{cases} Q_{n-1} = -\frac{\beta_n'}{n}\cdot\Omega_{n-1}, \\ P_{n+1} = \frac{\alpha_n'}{n+1}\cdot\Omega_{n+1}, \\ T_n = \frac{\alpha_n'}{n+1}\Psi_n - \frac{\beta_n'}{n}X_n, \end{cases}$$

und Ω_n, Ψ_n, X_n bedeuten dabei die folgenden aus den Y_n abgeleiteten Functionen:

$$(72.)\quad \begin{cases} \Omega_n = \begin{vmatrix} A & x & \frac{\partial Y_n}{\partial x} \\ B & y & \frac{\partial Y_n}{\partial y} \\ C & z & \frac{\partial Y_n}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & x & x_0 \\ B & y & y_0 \\ C & z & z_0 \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial Y_n}{\partial \tau}, \qquad \text{(vgl. (69}^a\text{.))} \\ \Psi_n = A\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x} + B\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y} + C\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z} \\ \quad = (Ax+By+Cz)\frac{\partial Y_{n+1}}{r\partial r} + (Ax_0+By_0+Cz_0)\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \tau}, \\ X_n = r^{2n+1}\Big(A\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + B\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + C\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big) \\ \quad = (Ax+By+Cz)r^{2n}\frac{\partial}{\partial r}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + (Ax_0+By_0+Cz_0)r^2\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial \tau}. \end{cases}$$

Führt man nun die Ausdrücke (71.) in die Gleichungen (47.), (48.) ein, welche die reflectirten Bewegungen angeben, so wird

$$(72^a.)\quad B_n = (2n+1)\sqrt{-1}\cdot\Omega_n\cdot\frac{B_n'}{N_n'},\quad D_n = \sqrt{-1}\cdot\Omega_n\cdot\frac{A_n'}{N_n},\quad F_n = -\frac{\frac{\alpha_n'}{n+1}\Psi_n - \frac{\beta_n'}{n}X_n}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)};$$

und es findet sich für u_n, v_n, w_n die Form:

$$(73.)\quad \begin{cases} u_n = -e^{kt\sqrt{-1}}\Big\{\varrho_n'\frac{\partial\Omega_{n+1}}{\partial x} + \sigma_n' r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Omega_{n-1}}{r^{2n-1}} \\ \qquad + \frac{\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\Big[\frac{\alpha_n'}{n+1}\Big(z\frac{\partial\Psi_n}{\partial y} - y\frac{\partial\Psi_n}{\partial z}\Big) - \frac{\beta_n'}{n}\Big(z\frac{\partial X_n}{\partial y} - y\frac{\partial X_n}{\partial z}\Big)\Big]\Big\}, \\ v_n = -e^{kt\sqrt{-1}}\Big\{\varrho_n'\frac{\partial\Omega_{n+1}}{\partial y} + \sigma_n' r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Omega_{n-1}}{r^{2n-1}} \\ \qquad + \frac{\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\Big[\frac{\alpha_n'}{n+1}\Big(x\frac{\partial\Psi_n}{\partial z} - z\frac{\partial\Psi_n}{\partial x}\Big) - \frac{\beta_n'}{n}\Big(x\frac{\partial X_n}{\partial z} - z\frac{\partial X_n}{\partial x}\Big)\Big]\Big\}, \\ w_n = -e^{kt\sqrt{-1}}\Big\{\varrho_n'\frac{\partial\Omega_{n+1}}{\partial z} + \sigma_n' r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Omega_{n-1}}{r^{2n-1}} \\ \qquad + \frac{\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\Big[\frac{\alpha_n'}{n+1}\Big(y\frac{\partial\Psi_n}{\partial x} - x\frac{\partial\Psi_n}{\partial y}\Big) - \frac{\beta_n'}{n}\Big(y\frac{\partial X_n}{\partial x} - x\frac{\partial X_n}{\partial y}\Big)\Big]\Big\}. \end{cases}$$

Hier sind α_n', β_n' die durch (70.) definirten Constanten; ϱ_n', σ_n' sind Functionen von r, welche den ϱ_n, σ_n (67.) ganz analog sind; denn es ist:

$$(74.)\quad \begin{cases} \varrho_n' = \dfrac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\cdot \mathrm{B}_{n+1}' + \Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\cdot \frac{\Delta_{n+1}'}{n+1}}{\mathrm{N}_{n+1}}, \\ \sigma_n' = \dfrac{-\frac{k^2}{a^2}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\cdot \mathrm{B}_{n-1}' + \frac{k^2}{b^2}\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\cdot \frac{\Delta_{n-1}'}{n}}{\mathrm{N}_{n-1}}. \end{cases}$$

Die Grössen B_n', Δ_n', N_n endlich sind constant, und zwar behält der Nenner N_n genau die Bedeutung, welche in den Gleichungen (68.) ihm beigelegt wurde, B_n', Δ_n' aber erhalten die mit B_n, Δ_n in gewisser Weise analogen Ausdrücke:

$$(75.)\quad \begin{cases} \mathrm{B}_n' = \frac{1}{2}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\cdot\dfrac{\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\cdot a^2}{n.n+1}\cdot\left[\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)F_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right) - \Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)F_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\right] \\ \qquad = -\dfrac{2n+1}{n.n+1}\cdot\dfrac{a^2b^3}{k^3\varepsilon^{2n+4}}\cdot\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\sqrt{-1}, \\ \Delta_n' = \frac{1}{2}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\cdot\dfrac{k^{2n+1}}{b^{2n+1}}\left\{\dfrac{b^2}{n}\left(F_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right) - (-1)^{n-1}\Phi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right)\Phi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{a^2}{n+1}\left(F_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right) - (-1)^{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\varepsilon}{b}\right)\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{k\varepsilon}{a}\right)\right\}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (73.)—(75.) enthalten vollständig die Lösung des Problems, die Bestimmung der reflectirten Bewegungen bei einfallenden Transversalwellen. Vergleicht man die Ausdrücke (73.) mit (66.), so erkennt man in den beiden ersten Theilen der rechten Seite eine formelle Aehnlichkeit. In der That bestehen auch hier diese Theile einerseits aus Gliedern, welche Schwingungen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a darstellen, und in Longitudinalwellen auflösbar sind — es sind die mit den Coefficienten B' behafteten Glieder —, während andere, die mit den Δ' multiplicirten, Bewegungen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit b geben, und in Transversalwellen auflösbar sind. Bewegungen, bei denen die Dichtigkeit nirgend geändert wird. Von der Art dieser letzteren sind auch die Bewegungen, welche durch die dritten Theile der rechten Seiten in (73.) dargestellt werden, denn auch sie enthalten den Factor $e^{k\left(t-\frac{r}{b}\right)\sqrt{-1}}$, und haben also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit b. Diese Schwingungen sind noch insbesondere dadurch characterisirt, dass der aus ihnen entspringende Theil des Ausdrucks $ux+vy+wz$ offenbar verschwindet, d. h.

dass dieselben an jeder Stelle senkrecht sind gegen den nach dem Kugelmittelpunkt gezogenen Radius.

Man sieht, dass auch hier im Allgemeinen immer neben den reflectirten Transversalwellen reflectirte Longitudinalwellen auftreten. Aber es giebt einen einzigen Fall, wo solche Wellen nicht hinzutreten; dieser Fall, welcher von besonderem Interesse ist, soll im Folgenden näher betrachtet werden.

§. 13.

Untersuchung des besonderen Falles, wo die einfallenden Transversalwellen keine reflectirten Longitudinalwellen hervorrufen.

Am Ende des §. 8 ist dann erinnert worden, dass die einfachen Transversalwellen, wie sie durch die Gleichungen (52.) dargestellt sind, die Bewegungen keineswegs nach allen Seiten gleichmässig verbreiten, sondern dass sogar eine bestimmte Richtung existirt, in welcher überhaupt gar keine Bewegung entsteht. Diese Richtung ist dadurch bestimmt, dass die Cosinus, welche sie gegen die Coordinatenaxen bildet, den Constanten A, B, C proportional sind. Es sei nun erlaubt, diese Richtung der Kürze wegen als *Axe der Bewegung* zu bezeichnen, eine Benennung, welche durch folgende geometrische Betrachtung gerechtfertigt wird. Denken wir uns nämlich eine Kugelfläche mit dem constanten Radius R um das Centrum der Bewegungen beschrieben, und betrachten die Bewegungen der auf dieser Kugelfläche befindlichen Punkte. Fällen wir von einem Punkte x, y, z dieser Fläche ein Loth ϱ auf die Axe und, nachdem der Punkt die kleinen Verschiebungen u, v, w erfahren hat, ein zweites; dasselbe liegt mit ϱ in einer Ebene, da nach (52.) wegen der Gleichung

$$uA+vB+wC = 0$$

die Verschiebungen gegen die Axe senkrecht geschehen; und sei φ der unendlich kleine Winkel beider Lothe gegen einander. Die absolute Grösse der Verschiebung ist also, da φ sehr klein ist, $\varrho.\varphi$, während

$$\varrho^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-\frac{(A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0))^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

Endlich sind die Cosinus, welche die Verschiebungsrichtung mit den Axen bildet:

$$\frac{C(y-y_0)-B(z-z_0)}{\varrho.\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\frac{A(z-z_0)-C(x-x_0)}{\varrho.\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\frac{B(x-x_0)-A(y-y_0)}{\varrho.\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und indem man also die Projectionen der Linie $\varrho.\varphi$ auf die Axen bildet, erhält man:

$$U = \frac{C(y-y_0)-B(z-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\varphi,$$

$$V = \frac{A(z-z_0)-C(x-x_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\varphi,$$

$$W = \frac{B(x-x_0)-A(y-y_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\varphi.$$

Vergleicht man dies endlich mit den Gleichungen (52.), so ergiebt sich:

$$\varphi = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\,\frac{e^{-\frac{kR}{b}i-1}}{R}\cdot e^{kti-1}.$$

Die Grösse φ ist also für alle Punkte der Kugelfläche dieselbe, und *man darf sich daher die in Rede stehende Bewegung so vorstellen, als ob alle einer solchen Kugelfläche angehörigen Punkte eine feste Schale bildeten, welche um die oben als Axe bezeichnete Linie oscillirt.* Der ganze Raum erscheint dann in solche Schalen getheilt; die Schwingungsdauer ist für alle dieselbe, und die wellenartige Bewegung besteht darin, dass die äusseren Schalen immer später die Bewegungen der inneren Schalen, mit gleicher Schwingungsdauer aber abnehmender Amplitude, wiederholen.

Bemerkt man nun, dass in den Formeln für die reflectirte Bewegung die Functionen Ω sämmtlich mit dem Factor

$$\begin{vmatrix} A & x & x_0 \\ B & y & y_0 \\ C & z & z_0 \end{vmatrix}$$

behaftet sind, welcher verschwindet, wenn

$$A : B : C = x_0 : y_0 : z_0,$$

so ergiebt sich sofort, *dass alle aus den Ω entspringenden Terme der reflectirten Bewegung verschwinden, sobald die Axe durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel geht. In diesem besonderen Falle giebt es also unter den reflectirten Bewegungen keine longitudinalen. Und die Schwingungsrichtungen der reflectirten und einfallenden Bewegungen werden für jeden Punkt identisch*, da beide stets gegen die durch den betreffenden Punkt und durch die Axe gelegte Ebene senkrecht sind.

In der That, setzen wir

$$(76.)\qquad A = K\cdot\frac{x_0}{r_0},\qquad B = K\cdot\frac{y_0}{r_0},\qquad C = K\cdot\frac{z_0}{r_0},$$

so ergiebt sich aus (72.):

$$(77.)\qquad \begin{cases} \Psi_n = K\cdot\left\{\dfrac{\tau}{rr_0}\dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial r} + r_0\dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial \tau}\right\}, \\ X_n = K\cdot\left\{\dfrac{\tau . r^{2n}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + r_0 r^2\dfrac{\partial Y_{n-1}}{\partial \tau}\right\}; \end{cases}$$

und ferner, da Ψ, X nur noch von r, τ abhängen, die Differentiation nach r aber für die Ausdrücke (73.) offenbar nur verschwindende Terme giebt:

$$(78.)\qquad \begin{cases} u_n = -e^{kt\sqrt{-1}}.(zy_0 - yz_0)\cdot\dfrac{\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\left\{\dfrac{\alpha_n'}{n+1}\dfrac{\partial\Psi_n}{\partial\tau} - \dfrac{\beta_n'}{n}\dfrac{\partial X_n}{\partial\tau}\right\}, \\ v_n = -e^{kt\sqrt{-1}}.(xz_0 - zx_0)\cdot\dfrac{\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\left\{\dfrac{\alpha_n'}{n+1}\dfrac{\partial\Psi_n}{\partial\tau} - \dfrac{\beta_n'}{n}\dfrac{\partial X_n}{\partial\tau}\right\}, \\ w_n = -e^{kt\sqrt{-1}}.(yx_0 - xy_0)\cdot\dfrac{\Phi_n\left(\frac{rk}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\left\{\dfrac{\alpha_n'}{n+1}\dfrac{\partial\Psi_n}{\partial\tau} - \dfrac{\beta_n'}{n}\dfrac{\partial X_n}{\partial\tau}\right\}; \end{cases}$$

Gleichungen, welche die Gleichungen

$$u_n x + v_n y + w_n z = 0,$$
$$u_n x_0 + v_n y_0 + w_n z_0 = 0$$

nach sich ziehen, und somit die oben erwähnte Eigenschaft darlegen.

Die Gleichungen (78.) lassen sich noch einfacher darstellen, indem die Functionen Ψ_{n+1}, X_{n-1} in der durch (77.) gegebenen Form sofort auf die Y zurückführen. Es ist zu diesem Ende nur nöthig, die partiellen Differentialgleichungen aufzustellen, welchen die Y genügen. Die erste derselben erhält man sofort, indem man bemerkt, dass Y_n eine homogene Function n^{ter} Ordnung von τ und r ist; man hat daher nach den allgemeinen Sätzen über homogene Functionen:

$$(79.)\qquad nY_n = r\frac{\partial Y_n}{\partial r} + \tau\frac{\partial Y_n}{\partial\tau}.$$

Ferner ist aber $\dfrac{Y_n}{r^n r_0^n} = P^{(n)}(\mu)$, wenn $\mu = \dfrac{\tau}{rr_0}$; und da die Function $P^{(n)}(\mu)$ der Gleichung

$$0 = n.n+1.P^{(n)}(\mu) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial P^{(n)}(\mu)}{\partial\mu}\right]$$

genügt, so folgt für Y_n die Bedingungsgleichung:

$$(80.) \qquad n.n+1.Y_n+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(r^2r_0^2-\tau^2)\frac{\partial Y_n}{\partial\tau}\right]=0.$$

Mit Hülfe der Gleichung (79.) giebt man derselben leicht mannigfaltige Formen, unter denen ich nur folgende anführe:

$$(81.) \quad \begin{cases} (n+1)r\dfrac{\partial^2 Y_n}{\partial r^2}+2n\tau\dfrac{\partial^2 Y_n}{\partial\tau\,\partial r}+(n-1)rr_0^2\dfrac{\partial^2 Y_n}{\partial\tau^2}=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\tau}\left\{\dfrac{\tau}{rr_0}\dfrac{\partial Y_n}{\partial r}+r_0\dfrac{\partial Y_n}{\partial\tau}\right\}+\dfrac{n}{rr_0}\dfrac{\partial Y_n}{\partial r}=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\tau}\left\{\dfrac{\tau r^{2n+2}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_n}{r^{2n+1}}+r_0r^2\dfrac{\partial Y_n}{\partial\tau}\right\}-\dfrac{(n+1)r^{2n+2}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_n}{r^{2n+1}}=0. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Formen gehen mit Rücksicht auf (77.) sofort die Gleichungen hervor:

$$\frac{\partial\Psi_n}{\partial\tau}=-K\cdot\frac{n+1}{rr_0}\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial\tau}=K\cdot\frac{nr^{2n}}{r_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}.$$

Wenn man jetzt diese Ausdrücke, so wie die von α_n', β_n' einführt, so ergeben sich endlich für u_n, v_n, w_n die folgenden Werthe:

$$(81^a.) \quad \begin{cases} u_n=Ke^{kt\sqrt{-1}}(zy_0-yz_0).H_n, \\ v_n=Ke^{kt\sqrt{-1}}(xz_0-zx_0).H_n, \\ w_n=Ke^{kt\sqrt{-1}}(yx_0-xy_0).H_n, \end{cases}$$

wo

$$(82.) \quad \begin{cases} H_n=\frac{1}{2}\left(\dfrac{k}{b}\right)^{2n+1}\cdot\dfrac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}\cdot\left\{F_n\left(\dfrac{\varepsilon k}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\dfrac{\varepsilon k}{b}\right)\right\} \\ \qquad\cdot\left\{\dfrac{k^2}{b^2}\Phi_{n+1}\left(\dfrac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right).\dfrac{\partial Y_{n+1}}{rr_0\,\partial r}-\Phi_{n-1}\left(\dfrac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\dfrac{r^{2n}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}. \end{cases}$$

Ganz ähnlich wird für die einfallende Bewegung nach (62.), (64.)

$$(83.) \quad \begin{cases} U_n=-Ke^{kt\sqrt{-1}}(zy_0-yz_0).J_n, \\ V_n=-Ke^{kt\sqrt{-1}}(xz_0-zx_0).J_n, \\ W_n=-Ke^{kt\sqrt{-1}}(yx_0-xy_0).J_n, \end{cases}$$

wo

$$(84.) \quad \begin{cases} J_n=\frac{1}{2}\left(\dfrac{k}{b}\right)^{2n+1}\cdot\left\{F_n\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\} \\ \qquad\cdot\left\{\dfrac{k^2}{b^2}\Phi_{n+1}\left(\dfrac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right).\dfrac{\partial Y_{n+1}}{rr_0\,\partial r}-\Phi_{n-1}\left(\dfrac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\dfrac{r^{2n}}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}. \end{cases}$$

sobald $\mathfrak{r} < \mathfrak{r}_0$; und man sieht ohne Weiteres, wodurch die Rechnung verificirt wird, dass für $\mathfrak{r} = \varepsilon$ auch $J_n = H_n$ und also

$$u_n + U_n = 0, \qquad v_n + V_n = 0, \qquad w_n + W_n = 0.$$

Die Formeln (83.) gelten nicht mehr, wenn $\mathfrak{r} > \mathfrak{r}_0$. In diesem Falle hat man *in der Entwickelung (59.) $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{r}_0$ zu vertauschen; und indem man dann mit Hülfe des erhaltenen Ausdrucks* und des vierten Theorems die Entwickelungen der Ausdrücke (52.) bildet, und zugleich für A, B, C die speciellen Werthe (76.) einführt, erhält man:

$$(85.) \qquad \begin{cases} U_n = Ke^{kt\sqrt{-1}}(zy_0 - yz_0).J_n', \\ V_n = Ke^{kt\sqrt{-1}}(xz_0 - zx_0).J_n', \\ W_n = Ke^{kt\sqrt{-1}}(yx_0 - xy_0).J_n', \end{cases}$$

wobei

$$(86.) \quad \begin{cases} J_n' = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1} \Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right) \Big\{ \frac{k^2}{b^2}\left(F_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right) - (-1)^{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\right)\frac{\partial Y_{n+1}}{rr_0\,\partial r} \\ \qquad\qquad - \left(F_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right) - (-1)^{n-1}\Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\right)\frac{r^{2n}}{r_0}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\Big\}: \end{cases}$$

Die nothwendige Uebereinstimmung der Ausdrücke (83), (85.) für $r = r_0$ wird mit Hülfe der Gleichung (68^a.) leicht auf bekannte Relationen zwischen den $P^{(n)}(\mu)$ zurückgeführt.

§. 14.

Einführung von Erregungspunkten, welche, auf einer Kugelfläche gelagert, die reflectirten Bewegungen hervorrufen.

Die allgemeinen Lösungen, welche in den vorhergehenden Paragraphen enthalten sind, kann man noch unter einem anderen Gesichtspunkte darstellen, indem man statt der reflectirenden Kugel sich beliebige Oberflächen im Innern derselben gelegt denkt, und diese mit Erregungspunkten dergestalt belegt, dass die gewählten Erregungspunkte für sich genau dieselben Bewegungen hervorrufen würden, wie die reflectirende Kugel. In solcher Weise ersetzt man, wenn statt der Kugel eine spiegelnde Ebene gegeben ist, die Wirkung derselben durch Annahme eines einzigen Erregungspunktes, des Spiegelbildes. Ein solcher einzelner Punkt genügt nun im vorliegenden Falle nicht mehr: man bedarf deren unendlich viele, und weiss nur, dass alle diese Punkte, in welchen einzelne Theile der zu substituirenden Bewegungen unendlich werden können, sämmtlich im Innern der Kugel, d. h. ausserhalb des bewegten Mediums, anzunehmen sind. Durch eine solche Darstellung erlangt man den nicht

unwesentlichen Vortheil, ein von vier Veränderlichen abhängiges Problem auf ein anderes zurückzuführen, welches nur zwei Variable enthält, die beiden Coordinaten, durch welche die specielle Lage eines Erregungspunktes auf der Oberfläche bestimmt ist. Wie man die Oberfläche, welche von solchen *Punkten gebildet werden soll, annehmen will, ist von vorn herein beliebig; doch ist es durch den Charakter der obigen Entwickelungen,* wenn man nicht in unabsehbare Rechnungen gestürzt werden will, bedingt, sie als eine Kugelfläche anzunehmen, welche der gegebenen concentrisch ist. Der Radius dieser Kugel ist dann im Allgemeinen noch willkürlich, doch so, dass eine unendlich grosse Anzahl discreter Werthe ausgeschlossen ist; diejenigen nämlich, für welche einer der Ausdrücke

$$F_n\left(\frac{kr}{a}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{kr}{a}\right), \quad F_n\left(\frac{kr}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)$$

verschwindet. Auf einen Umstand ähnlicher Art hat schon *Helmholtz* (dieses Journal Bd. 57, p. 24) aufmerksam gemacht.

In den oben entwickelten Problemen bestanden die reflectirten Bewegungen zum Theil aus longitudinalen, zum Theil aus transversalen Schwingungen; oder, was dasselbe sagt, zum Theil aus Schwingungen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a, zum Theil aus anderen mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit b. Ebenso werden also von den zu substituirenden Erregungspunkten beide Arten von Schwingungen ausgehen müssen; und man wird also von vorn herein die Aufgabe theilen können, indem man zuerst Erregungspunkte sucht, welche, Longitudinalschwingungen aussendend, im Stande sind, den ersten Theil der reflectirten Bewegungen hervorzurufen; sodann andere, welche füglich auf einer anderen Kugelfläche angenommen werden können, und welche, transversal schwingend, den anderen Theil der reflectirten Bewegungen darstellen.

Der erste Theil der Aufgabe ist immer sehr leicht zu lösen. Der von den longitudinalen Bewegungen herrührende Theil der Geschwindigkeiten hat ein Potential; sei dasselbe

$$M = M_1+M_2+M_3+\cdots$$

Ein solches Potential kommt auch den zu substituirenden Erregungspunkten zu, und zwar ist dasselbe eine Summe von Gliedern wie

$$\frac{K.e^{kV-1\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}.$$

Man hat also nur die Entwickelung der aus solchen Gliedern gebildeten Summe oder des entsprechenden Integrals dem gegebenen Geschwindigkeitspotentiale gleich zu setzen, um die Vertheilung der Erregungspunkte zu finden.

Der zweite Theil der Aufgabe fordert einige vorbereitende Betrachtungen. Die Transversalbewegungen, welche von den zu substituirenden Erregungspunkten ausgehen, haben immer die Form

$$(86^a.)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial M^w}{\partial y} - \dfrac{\partial M^v}{\partial z}, \\ v = \dfrac{\partial M^u}{\partial z} - \dfrac{\partial M^w}{\partial x}, \\ w = \dfrac{\partial M^v}{\partial x} - \dfrac{\partial M^u}{\partial y}, \end{cases}$$

wo M^u, M^v, M^w (vgl. (52.)) Summen der Form

$$\frac{K.e^{ky\sqrt{-1}\left(i-\frac{R}{b}\right)}}{R}$$

sind. Aber in dieser Form erscheinen die entsprechenden Theile der reflectirten Bewegungen noch keineswegs, obgleich sie immer, und zwar auf unendlich viele Arten, derselben fähig sind. Ich werde also zuerst zeigen, wie man eine, irgendwie gegebene, Transversalbewegung auf die angegebene Form bringt. Diese Aufgabe ist natürlich nicht vollständig bestimmt; ist sie aber auf die allgemeinste Art gelöst, so giebt sie sofort die allgemeinste Vertheilung der gesuchten Erregungspunkte, indem man die gefundenen Functionen M^u, M^v, M^w denjenigen gleichsetzt, welche durch die Einführung der Erregungspunkte sich ergeben.

Die reflectirten Bewegungen, deren transversaler Theil hier allein betrachtet werden soll, sind oben in der Form (19.) ausgedrückt, mit Hülfe der Functionen q_n, p_n, t_n; und es zeigt sich sofort aus (22.)—(24.), dass für die transversalen Theile diese Functionen die Werthe haben:

$$(87.)\qquad \begin{cases} q_n = \dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{\partial M_n'}{\mathfrak{r}\,\partial\mathfrak{r}}, \\ p_n = \dfrac{1}{n\,\mathfrak{r}^{2n}}\,\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}}(\mathfrak{r}^{2n+1}M_n'), \\ t_n = \dfrac{1}{n+1.2n+3}\left(\dfrac{\partial T_{n+1}^u}{\partial x}+\dfrac{\partial T_{n+1}^v}{\partial y}+\dfrac{\partial T_{n+1}^w}{\partial z}\right) \\ \qquad\qquad -\dfrac{r^{2n+1}}{n.2n-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\,\dfrac{S_{n-1}^u}{r^{2n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial y}\,\dfrac{S_{n-1}^v}{r^{2n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\,\dfrac{S_{n-1}^w}{r^{2n-1}}\right), \end{cases}$$

wo

$$(88.)\qquad M_n' = \frac{1}{2n+1}\left\{x\left(\frac{\partial M_n^w}{\partial y}-\frac{\partial M_n^v}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial M_n^u}{\partial z}-\frac{\partial M_n^w}{\partial x}\right)+z\left(\frac{\partial M_n^v}{\partial x}-\frac{\partial M_n^u}{\partial y}\right)\right\},$$

wo endlich, für jeden der oberen Indices u, v, w:

$$(89.)\qquad T_n = \frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}}\frac{\partial.\mathfrak{r}^{2n+1}M_n}{\partial\mathfrak{r}}, \qquad S_n = -\frac{1}{\mathfrak{r}}\frac{\partial M_n}{\partial\mathfrak{r}}.$$

Die vorgesetzte Transformation besteht nun wesentlich darin, die allgemeinsten Werthe der Functionen M_n^u, M_n^v, M_n^w anzugeben, welche aus diesen Gleichungen hervorgehen, sobald q_n, p_n, t_n als bekannt angesehen werden. Hat man jene Werthe gefunden, so ist sofort

$$\begin{aligned} M^u &= M_0^u + M_1^u + M_2^u + \cdots, \\ M^v &= M_0^v + M_1^v + M_2^v + \cdots, \\ M^w &= M_0^w + M_1^w + M_2^w + \cdots, \end{aligned}$$

und die gesuchten Functionen sind damit, nach Kugelfunctionen entwickelt, gegeben.

Aus den beiden ersten Gleichungen (87.) erhält man zuvörderst, indem man den Differentialquotienten von M' eliminirt:

$$(90.)\qquad M_n' = \frac{np_n - \mathfrak{r}^2.n+1.q_n}{2n+1}.$$

Da auf diese Weise M_n' bestimmt ist, so bleibt die letzte Gleichung (87.) mit (88.) zur Bestimmung von M_n^u, M_n^v, M_n^w übrig. Ich denke mir nun aber diese drei Functionen in die Form (19.) gebracht, welche drei Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung immer annehmen können, und setze:

$$(91.)\qquad \begin{cases} M_n^u = \dfrac{\partial H_{n+1}}{\partial x} + r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{J_{n-1}}{r^{2n-1}} + z\dfrac{\partial G_n}{\partial y} - y\dfrac{\partial G_n}{\partial z}, \\ M_n^v = \dfrac{\partial H_{n+1}}{\partial y} + r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{J_{n-1}}{r^{2n-1}} + x\dfrac{\partial G_n}{\partial z} - z\dfrac{\partial G_n}{\partial x}, \\ M_n^w = \dfrac{\partial H_{n+1}}{\partial z} + r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{J_{n-1}}{r^{2n-1}} + y\dfrac{\partial G_n}{\partial x} - x\dfrac{\partial G_n}{\partial y}, \end{cases}$$

wo J_{n-1}, G_n, H_{n+1} Kugelfunctionen respective der $(n-1)^{\text{ten}}$, n^{ten}, $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung bedeuten. Führt man diese Werthe in die erwähnten Gleichungen ein, so gehen diese in die höchst einfache Gestalt über:

$$(92.)\qquad \begin{cases} M_n' = \dfrac{n.n+1}{2n+1}\cdot G_n, \\ t_n = -\dfrac{1}{\mathfrak{r}}\dfrac{\partial H_n}{\partial \mathfrak{r}} - \dfrac{1}{\mathfrak{r}^{2n+2}}\dfrac{\partial(\mathfrak{r}^{2n+3}J_n)}{\partial \mathfrak{r}}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ist G_n sofort vollständig bestimmt; und zwar wird nach (90.):

$$(93.)\qquad G_n = \frac{p_n}{n+1} - \mathfrak{r}^2\cdot\frac{q_n}{n};$$

von den beiden Functionen J_n, H_n aber bleibt eine unbestimmt, während die andere sich linear durch diese und durch t_n, mit Hülfe einer nach $\mathfrak{r}$ auszuführenden Integration, ausdrückt.

Durch die Formeln (92.), (93.) ist das Hülfsproblem gelöst. Indess vereinfacht diese Lösung sich noch sehr wesentlich, wenn man die besondere Form berücksichtigt, in welcher die reflectirten Bewegungen auftreten. Vergleicht man nämlich die Formeln (45.), (46.), in denen die betreffende Gestalt der Functionen p_n, q_n, t_n bereits hervortritt, wenn man nur die A, C, E verschwinden lässt, so zeigt sich, dass die den Transversalbewegungen entsprechenden Theile dieser Functionen die Form haben:

$$(94.)\qquad \begin{cases} p_n = \Phi_{n-1}\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)e^{kt\sqrt{-1}}\cdot D_n\cdot\dfrac{\sqrt{-1}}{n}, \\ q_n = \Phi_{n+1}\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)e^{kt\sqrt{-1}}\cdot D_n\cdot\dfrac{k^2\sqrt{-1}}{(n+1)b^2}, \\ t_n = \Phi_n\left(\dfrac{\mathfrak{r}k}{b}\right)e^{kt\sqrt{-1}}\cdot F_n, \end{cases}$$

wo D_n, F_n Kugelfunctionen mit constanten, d. h. von $\mathfrak{r}$ unabhängigen Coefficienten sind. Eine ähnliche Form haben die Functionen M_n^u, M_n^v, M^w, welche durch Einführung der Erregungspunkte entstehen; denn dieselben setzen sich zusammen aus den $n^{\text{tén}}$ Gliedern einer Summe von Entwickelungen der Ausdrücke

$$\frac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}\cdot e^{kt\sqrt{-1}}}{R},$$

und eine solche Entwickelung wird, wenn der Index i sich immer auf den, im Innern der Kugel liegenden, Erregungspunkt bezieht, da $r_i < r$, nach (59.):

$$(94^a.)\quad \frac{e^{-\frac{kR\sqrt{-1}}{b}}.e^{kr\sqrt{-1}}}{R} = e^{kr\sqrt{-1}}\sum_0^\infty \frac{2n+1}{2\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)\left\{F_n\left(\frac{kr_i}{b}\right)-(-1)^n\Phi_n\left(\frac{kr_i}{b}\right)\right\}Y_n^{(i)}.$$

Also auch M_n^u, M_n^v, M_n^w bestehen offenbar aus einem Factor $e^{kr\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)$, und einem anderen, von r unabhängigen, welcher eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist. Nach den Gleichungen (91.) gilt dies sofort auch von G_n, H_{n+1}, J_{n-1}, nur dass die Kugelfunction immer von der Ordnung des Index wird, und man kann also setzen:

$$(95.)\quad \begin{cases} G_n = e^{kr\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)\cdot g_n, \\ H_n = e^{kr\sqrt{-1}}.\Phi_{n-1}\left(\frac{kr}{b}\right)\cdot h_n, \\ J_n = e^{kr\sqrt{-1}}.\Phi_{n+1}\left(\frac{kr}{b}\right)\cdot i_n. \end{cases}$$

Führt man nun die Ausdrücke (94.), (95.) in (92.), (93.) ein, so findet man:

$$(96.)\quad \begin{cases} \Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)\cdot g_n = \frac{\sqrt{-1}.D_n}{n.n+1}\left\{\Phi_{n-1}\left(\frac{kr}{b}\right)-\frac{r^2k^2}{b^2}\cdot\Phi_{n+1}\left(\frac{kr}{b}\right)\right\}, \\ \Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)\cdot F_n = -h_n\cdot\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi_{n-1}\left(\frac{kr}{b}\right)}{\partial r}-i_n\cdot\frac{1}{r^{2n+2}}\,\frac{\partial.r^{2n+3}\Phi_{n+1}\left(\frac{kr}{b}\right)}{\partial r}. \end{cases}$$

Jetzt bemerke man die Fundamentalgleichungen, welche sich für die Φ aus (41.) durch Verwandlung von $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$ ergeben:

$$\Phi_{n+1}(s) = \frac{\sqrt{-1}}{s}\,\frac{d\Phi_n(s)}{ds},$$

$$\Phi_{n-1}(s) = \frac{\sqrt{-1}}{s^{2n}}\,\frac{d}{ds}\left(s^{2n+1}\Phi_n(s)\right);$$

so wie die hieraus oder aus (43.) folgende Gleichung (58^a.):

$$\Phi_{n+1}(s) = \frac{\Phi_{n-1}(s)-(2n+1)\sqrt{-1}\,\Phi_n(s)}{s^2}.$$

Durch diese Beziehungen gehen die Gleichungen (96.) in die einfachen Gleichungen über:

$$g_n = -\frac{2n+1}{n.n+1}D_n,$$

$$i_n+\frac{k^2}{b^2}h_n = -F_n\sqrt{-1}.$$

Und dies eingeführt, hat man nachstehende Ausdrücke für M_n^u, M_n^v, M_n^w:

$$(97.)\quad \begin{cases} M_n^u = -e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)\left\{r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F_{n-1}}{r^{2n-1}}\cdot\sqrt{-1}+\frac{2n+1}{n.n+1}\left(z\frac{\partial D_n}{\partial y}-y\frac{\partial D_n}{\partial z}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left.-\frac{\partial h_{n+1}}{\partial x}+r^{2n+1}.\frac{k^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ M_n^v = -e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)\left\{r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F_{n-1}}{r^{2n-1}}\cdot\sqrt{-1}+\frac{2n+1}{n.n+1}\left(x\frac{\partial D_n}{\partial z}-z\frac{\partial D_n}{\partial x}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left.-\frac{\partial h_{n+1}}{\partial y}+r^{2n+1}.\frac{k^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}, \\ M_n^w = -e^{kt\sqrt{-1}}.\Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right)\left\{r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{n-1}}{r^{2n-1}}\cdot\sqrt{-1}+\frac{2n+1}{n.n+1}\left(y\frac{\partial D_n}{\partial x}-x\frac{\partial D_n}{\partial y}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left.-\frac{\partial h_{n+1}}{\partial z}+r^{2n+1}.\frac{k^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}. \end{cases}$$

wo die h_n willkürliche Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten bedeuten. —

Um die entsprechenden Rechnungen für die Longitudinalbewegungen ebensoweit zu führen, braucht man nur die Gleichungen (23.) zu beachten. Für den longitudinalen Theil der Bewegungen folgt aus denselben:

$$q_n = -\frac{1}{2n+1}\frac{\partial M_n}{\mathfrak{r}\,\partial\mathfrak{r}},$$

$$p_n = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{\mathfrak{r}^{2n}}\frac{\partial.\mathfrak{r}^{2n+1}M_n}{\partial\mathfrak{r}};$$

und aus beiden Gleichungen zusammen:

$$M_n = p_n + q_n\mathfrak{r}^2.$$

Wendet man sich nun zu den Gleichungen (46.), indem man die A, C, E verschwinden lässt, und nur die den Longitudinalbewegungen entsprechenden Glieder beibehält, so bleibt:

$$q_n = -\frac{k^2\sqrt{-1}}{(2n+1)a^2}\cdot B_n\Phi_{n+1}\left(\frac{kr}{a}\right)e^{kt\sqrt{-1}},$$

$$p_n = \frac{\sqrt{-1}}{2n+1}\cdot B_n\Phi_{n-1}\left(\frac{kr}{a}\right)e^{kt\sqrt{-1}};$$

und man hat also:

$$M_n = \frac{\sqrt{-1}}{2n+1}\cdot B_n e^{kt\sqrt{-1}}\left\{\Phi_{n-1}\left(\frac{kr}{a}\right)-\frac{k^2\mathfrak{r}^2}{a^2}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right)\right\}.$$

Aber die eingeklammerte Grösse ist nach (58^a.) nichts Anderes als

$$(2n+1)\sqrt{-1}.\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right);$$

und dies eingeführt giebt endlich:

$$(98.)\qquad M_n = -B_n.\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}}{a}\right)e^{kt\sqrt{-1}}.$$

§. 15.

Bestimmung der Vertheilung von Erregungspunkten auf der substituirten Kugelfläche.

Nachdem im vorigen §. die reflectirten Bewegungen in geeigneter Form dargestellt sind, bleibt nur übrig die Bewegungen der Form nach zu bestimmen, welche von den Erregungspunkten selbst herrühren sollen.

Bezeichnen wir durch do das Element der mit dem Radius r_i beschriebenen Kugelfläche, auf welcher die Erregungspunkte sich befinden. Man kann dann annehmen, dass die Intensität der von do ausgehenden Bewegungen einerseits mit do selbst proportional sei, andererseits aber eine Function der Lage von do auf der Kugelfläche werde. Mit anderen Worten, die von do ausgehenden Longitudinalbewegungen mögen durch die Ausdrücke dargestellt werden:

$$du = \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}\cdot K^{(i)}do,$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}\cdot K^{(i)}do,$$

$$dw = \frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}\cdot K^{(i)}do,$$

die Transversalbewegungen aber durch:

$$du = \frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot C^{(i)}do - \frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot B^{(i)}do,$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot A^{(i)}do - \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot C^{(i)}do,$$

$$dw = \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot B^{(i)}do - \frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{k\sqrt{-1}\left(t-\frac{R}{b}\right)}}{R}\cdot A^{(i)}do;$$

wo $R = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$ die Entfernung des Elements do von dem äusseren Punkte x, y, z bedeutet, und wo A, B, C, K Functionen von x_i, y_i, z_i sind.

Um die Wirkung sämmtlicher Erregungspunkte zu finden, hat man jetzt nur über die Kugelfläche zu integriren, deren Element do ist; und dann wird offenbar das Potential der Longitudinalbewegungen:

$$(99.) \qquad M = e^{kt\sqrt{-1}}\int\frac{e^{-\frac{kR}{a}\sqrt{-1}}}{R}K^{(i)}do,$$

während für die Transversalbewegungen, deren Ausdrücke die Form (86ᵃ.) annehmen, M^u, M^v, M^w die Bedeutungen erhalten:

$$(100.)\quad \begin{cases} M^u = e^{kt\sqrt{-1}} \int \frac{e^{-\frac{kR}{b}\sqrt{-1}}}{R} \cdot A^{(i)}\, do, \\ M^v = e^{kt\sqrt{-1}} \int \frac{e^{-\frac{kR}{b}\sqrt{-1}}}{R} \cdot B^{(i)}\, do, \\ M^w = e^{kt\sqrt{-1}} \int \frac{e^{-\frac{kR}{b}\sqrt{-1}}}{R} \cdot C^{(i)}\, do. \end{cases}$$

Die vier fundamentalen Functionen K, A, B, C, welche hier auftreten, und welche nun zu bestimmen sind, darf man wohl als *Dichtigkeiten der betreffenden Schichten von Erregungspunkten* bezeichnen. Die erste dieser Functionen, K, giebt das *Mass für die Intensität der Longitudinalbewegungen*, welche von dem Elemente *do* ausgehen. Um die anderen Functionen einfach zu deuten, erinnere man sich der Bemerkungen über die Natur der einfachen Schwingungen aus §. 13. Hiernach haben die von jedem Element *do* ausgehenden Transversalschwingungen eine bestimmte Axe, deren Lage zunächst willkürlich ist. Aber um die von den verschiedenen Elementen ausgehenden Schwingungen unter einander vergleichen zu können, ist es passend, die dem Element *do* entsprechenden Schwingungen in drei simultane Oscillationen zu zerlegen, deren Axen einzeln den Coordinatenaxen parallel sind. Dies heisst mit anderen Worten, man betrachtet die respective mit A, B, C multiplicirten Theile für sich; und so sieht man, *dass A, B, C einzeln das Mass abgeben für diejenigen Theile der von do herrührenden Oscillationen, deren Axen respective der X, Y, Z Axe parallel sind.*

Stellen wir uns nun vor, diese Dichtigkeiten seien (immer in dem hier festgehaltenen Sinne) nach Kugelfunctionen entwickelt, so dass:

$$\begin{aligned} K^{(i)} &= K_0^{(i)} + K_1^{(i)} + K_2^{(i)} + \cdots, \\ A^{(i)} &= A_0^{(i)} + A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots, \\ B^{(i)} &= B_0^{(i)} + B_1^{(i)} + B_2^{(i)} + \cdots, \\ C^{(i)} &= C_0^{(i)} + C_1^{(i)} + C_2^{(i)} + \cdots; \end{aligned}$$

wo denn $K_n^{(i)}$ etc. homogene Functionen n^{ter} Ordnung von $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$, den Coordinaten des Kugelelements *do*, sind. Untersuchen wir genauer, was etwa aus dem Ausdrucke (99.) wird, wenn wir diese Entwickelungen darin einführen.

Indem man noch (94ª.) zu Hülfe ruft, wird:

$$M = e^{kt\sqrt{-1}} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1} \Phi_n\left(\frac{kr}{a}\right) \left\{F_n\left(\frac{kr_i}{a}\right) - (-1)^n \cdot \Phi_n\left(\frac{kr_i}{a}\right)\right\} \cdot \int Y_n^{(i)} \cdot K_m^{(i)} do.$$

Aber nach einer bekannten Eigenschaft der Kugelfunctionen, welche durch die hier angewandte leichte Modification keinesweges zerstört wird, verschwindet das Integral immer, sobald m von n verschieden ist, und reducirt sich für $m = n$ auf denjenigen Werth, den die Function $K_n^{(i)}$ für den Punkt x, y, z annimmt, multiplicirt mit $\frac{4\pi r_i^{2n+2}}{2n+1}$. Bezeichnet man also jenen Werth mit $\overline{K_n}$, so bleibt:

$$M = e^{kt\sqrt{-1}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{-1}} \cdot \left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1} \Phi_n\left(\frac{kr}{a}\right) \cdot \left\{F_n\left(\frac{kr_i}{a}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\frac{kr_i}{a}\right)\right\} \cdot \overline{K_n} r_i^{2n+2}.$$

Ganz ebenso wird auch:

$$M^u = e^{kt\sqrt{-1}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{-1}} \cdot \left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1} \Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right) \cdot \left\{F_n\left(\frac{kr_i}{b}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\frac{kr_i}{b}\right)\right\} \cdot \overline{A_n} r_i^{2n+2},$$

$$M^v = e^{kt\sqrt{-1}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{-1}} \cdot \left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1} \Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right) \cdot \left\{F_n\left(\frac{kr_i}{b}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\frac{kr_i}{b}\right)\right\} \cdot \overline{B_n} r_i^{2n+2},$$

$$M^w = e^{kt\sqrt{-1}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{-1}} \cdot \left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1} \Phi_n\left(\frac{kr}{b}\right) \cdot \left\{F_n\left(\frac{kr_i}{b}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\frac{kr_i}{b}\right)\right\} \cdot \overline{C_n} r_i^{2n+2}.$$

Die n^{ten} Glieder dieser Entwickelungen sind die Functionen M_n, M_n^u, M_n^v, M_n^w. Vergleicht man dieselben mit den Ausdrücken (97.), (98.), so erhält man die gesuchten Bestimmungen, nämlich:

$$(101.) \qquad \overline{K_n} = -\frac{B_n\sqrt{-1}}{2\pi\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1} r_i^{2n+2}\left\{F_n\left(\frac{kr_i}{a}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\frac{kr_i}{a}\right)\right\}},$$

$$(102.) \quad \begin{cases} \overline{A_n} = \dfrac{r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F_{n-1}}{r^{2n-1}} - \dfrac{2n+1}{n.n+1}\left(z\dfrac{\partial D_n}{\partial y} - y\dfrac{\partial D_n}{\partial z}\right)\sqrt{-1} + \left(\dfrac{\partial h_{n+1}}{\partial x} - r^{2n+1}\dfrac{k^2}{b^2}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\sqrt{-1}}{2\pi\left(\dfrac{k}{b}\right)^{2n+1} r_i^{2n+2}\left\{F_n\left(\dfrac{kr_i}{b}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\dfrac{kr_i}{b}\right)\right\}}, \\ \overline{B_n} = \dfrac{r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F_{n-1}}{r^{2n-1}} - \dfrac{2n+1}{n.n+1}\left(x\dfrac{\partial D_n}{\partial z} - z\dfrac{\partial D_n}{\partial x}\right)\sqrt{-1} + \left(\dfrac{\partial h_{n+1}}{\partial y} - r^{2n+1}\dfrac{k^2}{b^2}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\sqrt{-1}}{2\pi\left(\dfrac{k}{b}\right)^{2n+1} r_i^{2n+2}\left\{F_n\left(\dfrac{kr_i}{b}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\dfrac{kr_i}{b}\right)\right\}}, \\ \overline{C_n} = \dfrac{r^{2n+1}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{F_{n-1}}{r^{2n-1}} - \dfrac{2n+1}{n.n+1}\left(y\dfrac{\partial D_n}{\partial x} - x\dfrac{\partial D_n}{\partial y}\right)\sqrt{-1} + \left(\dfrac{\partial h_{n+1}}{\partial z} - r^{2n+1}\dfrac{k^2}{b^2}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{h_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\sqrt{-1}}{2\pi\left(\dfrac{k}{b}\right)^{2n+1} r_i^{2n+2}\left\{F_n\left(\dfrac{kr_i}{b}\right) - (-1)^n \Phi_n\left(\dfrac{kr_i}{b}\right)\right\}}. \end{cases}$$

Man bemerkt, dass die Formel (101.) nur dann einen unendlich grossen, also unstatthaften Werth für $\overline{K_n}$ ergiebt, wenn $\frac{kr_i}{a}$ eine Wurzel der Gleichung

$$F_n(s) - (-1)^n \Phi_n(s) = 0$$

ist: die Formeln (102.) hingegen geben unendlich grosse Werthe, wenn $\frac{kr_i}{b}$ eine Wurzel derselben Gleichung ist. Man muss also von vorn herein Werthe von r_i ausschliessen, welche für irgend ein n eine dieser Bedingungen erfüllen, wie bereits oben angegeben ist.

In diese Ausdrücke hätte man endlich die Werthe der B, D, F, wie sie die oben aufgestellte Theorie ergiebt, einzuführen. Für einfallende Longitudinalschwingungen wird $F_n = 0$, und B_n, D_n sind in den Formeln (65^b.) gegeben: für einfallende Transversalschwingungen sind B_n, D_n, F_n aus den Gleichungen (72^a.) zu entnehmen. Die Aufstellung der definitiven Formeln glaube ich um so eher übergehen zu dürfen, als keine nennenswerthe Vereinfachung der Ausdrücke dabei eintritt. Aber es darf wohl darauf hingewiesen werden, dass die erhaltenen Werthe der K, A, B, C von der Schwingungsdauer abhängen, und also die Vertheilung der Erregungspunkte für Schwingungen von verschiedener Dauer ganz verschieden wird.

§. 16.

Untersuchung des Falles, wo bei mässig grosser Wellenlänge der Radius der reflectirenden Kugel sehr klein ist.

Wenn man den für die Optik wichtigen Fall untersucht, in welchem der Radius der reflectirenden Kugel sehr gross gegen die Wellenlänge ist, d. h. wo $\frac{k\varepsilon}{a}$, $\frac{k\varepsilon}{b}$ sehr grosse Zahlen bedeuten, so findet sich bald, dass diese besondere Annahme dennoch keine wesentliche Vereinfachung in den allgemeinen Ausdrücken mit sich führt. Aber der entgegengesetzte Fall, wo der Radius sehr klein und die Wellenlänge mässig gross, wo also $\frac{k\varepsilon}{a}$, $\frac{k\varepsilon}{b}$ sehr kleine Zahlen sind, lässt sich mit grosser Einfachheit behandeln.

In diesem Fall kann man offenbar in den einfallenden Bewegungen für Punkte, welche in der Nähe der reflectirenden Kugel liegen, die Grössen

$$\frac{e^{-\frac{kR}{a}i}-1}{R}, \quad \frac{e^{-\frac{kR}{b}i}-1}{R}$$

bis auf Grössen höherer Ordnung ersetzen, durch

$$\frac{e^{-k\frac{\mathfrak{r}_0}{a}\sqrt{-1}}-1}{\mathfrak{r}_0}, \qquad \frac{e^{-k\frac{\mathfrak{r}_0}{b}\sqrt{-1}}-1}{\mathfrak{r}_0},$$

oder, mit anderen Worten, es genügt, in der Entwickelung der einfallenden Bewegungen das erste Glied zu berücksichtigen. So werden nach (51.), (52.), indem man longitudinale und transversale Schwingungen in eine Formel zusammenfasst, in der Nähe der reflectirenden Kugel die einfallenden Bewegungen dargestellt durch:

$$(102^a.)\quad \begin{cases} u = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-K\frac{x_0}{\mathfrak{r}_0}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_0}\frac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{a}}}{\mathfrak{r}_0}+\frac{Bz_0-Cy_0}{\mathfrak{r}_0}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_0}\frac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{b}}}{\mathfrak{r}_0}\right\}, \\ v = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-K\frac{y_0}{\mathfrak{r}_0}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_0}\frac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{a}}}{\mathfrak{r}_0}+\frac{Cx_0-Az_0}{\mathfrak{r}_0}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_0}\frac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{b}}}{\mathfrak{r}_0}\right\}, \\ w = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-K\frac{z_0}{\mathfrak{r}_0}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_0}\frac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{a}}}{\mathfrak{r}_0}+\frac{Ay_0-Bx_0}{\mathfrak{r}_0}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}_0}\frac{e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0\sqrt{-1}}{b}}}{\mathfrak{r}_0}\right\}. \end{cases}$$

Um zu sehen, welche Glieder in den reflectirten Bewegungen beizubehalten sind, ist es gut, dieselben zunächst in einer etwas veränderten Form darzustellen. Nach (19.) hatten die allgemeinen Glieder jener Entwickelung die Form:

$$u_n = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+z\frac{\partial t_n}{\partial y}-y\frac{\partial t_n}{\partial z},$$
$$v_n = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial y}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+x\frac{\partial t_n}{\partial z}-z\frac{\partial t_n}{\partial x},$$
$$w_n = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{q_{n-1}}{r^{2n-1}}+y\frac{\partial t_n}{\partial x}-x\frac{\partial t_n}{\partial y}.$$

Nach (45.), (46.), (48.) hat man in diesen Gleichungen zu setzen:

$$p_n = (-P_n u_n+Q_n v_n)e^{kt\sqrt{-1}},$$
$$q_n = (\ P_n \varrho_n-Q_n\sigma_n)e^{kt\sqrt{-1}},$$
$$t_n = -T_n\tau_n e^{kt\sqrt{-1}},$$

wo u_n, v_n, ϱ_n, σ_n, τ_n allein Functionen von $\mathfrak{r}$ sind, nämlich:

$$u_n = \frac{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)},$$

$$\sigma_n = \frac{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)+\frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)},$$

$$\nu_n = \frac{\frac{a^2b^2}{k^2n}\left\{\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right) - \Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}}{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right) + \frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)},$$

$$\varrho_n = \frac{\frac{k^2}{n+1}\left\{\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n+1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right) - \Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n+1}\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\right\}}{\frac{a^2}{n+1}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right) + \frac{b^2}{n}\Phi_{n+1}\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_{n-1}\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)},$$

$$\tau_n = \frac{\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)}.$$

Die Functionen Q_n, P_n, T_n sind, so weit sie von einfallenden Longitudinalbewegungen herrühren, durch (65^a.), soweit sie aus Transversalbewegungen entspringen, durch (71.) gegeben. Bemerken wir, dass bereits in §. 9. die Grenze für $F_n(s) - (-1)^n \Phi_n(s)$ bei abnehmendem s gleich

$$\frac{2(\sqrt{-1})^{n+1}}{1.3.5\ldots 2n+1}$$

gefunden wurde, so nehmen hiernach für ein sehr kleines ε die aus (65^a.), (71.) zusammengesetzten Werthe der Q, P, T folgende Ausdrücke an:

$$(103.)\quad \begin{cases} P_n = \frac{(\sqrt{-1})^n}{1.3\ldots 2n-1}\left\{K\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\right)Y_n + \frac{1}{n}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\Omega_n\right\}, \\ Q_n = \frac{(\sqrt{-1})^{n+2}}{1.3\ldots 2n+3}\left\{-K\left(\frac{k}{a}\right)^{2n+3}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\right)Y_n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+3}\Phi_n\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\Omega_n\right\}, \\ T_n = \frac{(\sqrt{-1})^{n+1}}{1.3\ldots 2n+1}\left\{\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+3}\Phi_{n+1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\Psi_n + \frac{1}{n}\left(\frac{k}{b}\right)^{2n+1}\Phi_{n-1}\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)X_n\right\}; \end{cases}$$

und die Functionen Ω_n, Ψ_n, X_n sind definirt durch die Gleichungen:

$$\Omega_n = \begin{vmatrix} A & x & \frac{\partial Y_n}{\partial x} \\ B & y & \frac{\partial Y_n}{\partial y} \\ C & z & \frac{\partial Y_n}{\partial z} \end{vmatrix},$$

$$\Psi_n = A\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x} + B\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y} + C\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial z},$$

$$X_n = r^{2n+1}\left\{A\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + B\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}} + C\frac{\partial}{\partial z}\frac{Y_{n-1}}{r^{2n-1}}\right\}.$$

Aus diesen Formeln sieht man, dass für hinlänglich grosse Werthe der x, y, z die P_n, Q_n, T_n endliche Werthe annehmen, dass sie dagegen in der Nähe der reflectirenden Kugel, also für sehr kleine x, y, z, von der n^{ten} Ordnung sind.

Um die Ordnung der Coefficienten zu untersuchen, bemerke man zunächst, dass Φ_n für ein sehr kleines Argument von der $-(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Hiernach werden für hinlänglich grosse Werthe von r die Ordnungen folgende:

für μ_n : $2n-1$
- σ_n : $2n+3$
- ν_n : $2n+3$
- ϱ_n : $2n-1$
- τ_n : $2n+1$.

Es ist also die Ordnung von p_n zum Theil $2n-1$, zum Theil $2n+3$, ebenso bei q_n, und die Ordnung von t_n ist $2n+1$. Da aber p_0 nicht existirt, und ebenso in q_0 der Coefficient ν_n, welcher die -1te Ordnung geben würde, verschwindet; da endlich t_0 aus der Rechnung geht, so bleiben nur diejenigen Terme von q_1 und p_1 als von der niedrigsten Ordnung übrig, welche von der ersten Ordnung sind. Und man darf also setzen:

$$(104.)\quad \begin{cases} u = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-\mu_1 \dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \varrho_1 r^5 \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{P_1}{r^3}\right\}, \\ v = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-\mu_1 \dfrac{\partial P_1}{\partial y} + \varrho_1 r^5 \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{P_1}{r^3}\right\}, \\ w = e^{kt\sqrt{-1}}\left\{-\mu_1 \dfrac{\partial P_1}{\partial z} + \varrho_1 r^5 \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{P_1}{r^3}\right\}. \end{cases}$$

Ich werde zeigen, dass dieselben Terme übrig bleiben, wenn man den Punkt x, y, z in der Nähe der reflectirenden Fläche annimmt. Zu diesem Ende ist es nöthig, zuvor den Werth zu untersuchen, welchen der Zähler von ν_n und ϱ_n für sehr kleine Werthe der Argumente ε, r annimmt. Wenn man mit Hülfe der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\Phi_n}{ds^2} + \frac{2n+2}{s}\frac{\partial\Phi_n}{ds} + \Phi_n = 0$$

die Function Φ_n in eine Reihe entwickelt, welche nach Potenzen von s fortschreitet, so findet sich die Form:

$$(105.)\quad \begin{cases} \Phi_n(s) = a_n\left\{\dfrac{1}{s^{2n+1}} - \dfrac{1}{2.2n-1}\cdot\dfrac{1}{s^{2n-1}} + \dfrac{1}{2.4.2n-1.2n-3}\cdot\dfrac{1}{s^{2n-3}} - + \cdots\right\} \\ \qquad + b_n\left\{1 - \dfrac{s^2}{2.2n+3} + \dfrac{s^4}{2.4.2n+3.2n+5} - + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Hieraus findet sich für sehr kleine Werthe von r, ε:

$$(106.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)-\Phi_n\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_n\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)\\ &= a_n^2\left\{\left[\left(\frac{b}{\varepsilon k}\right)^{2n+1}-\frac{1}{2.2n-1}\left(\frac{b}{\varepsilon k}\right)^{2n-1}\right]\left[\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n+1}-\frac{1}{2.2n-1}\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n-1}\right]\right.\\ &\qquad\left.-\left[\left(\frac{a}{\varepsilon k}\right)^{2n+1}-\frac{1}{2.2n-1}\left(\frac{a}{\varepsilon k}\right)^{2n-1}\right]\left[\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n+1}-\frac{1}{2.2n-1}\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n-1}\right]\right\}\\ &= -\frac{a_n^2}{2.2n-1}\left(\frac{b}{\varepsilon k}\right)^{2n-1}\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^{2n-1}\frac{a^2-b^2}{k^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \end{aligned}\right.$$

Eine Ausnahme macht nur der Fall $n=0$, wo

$$\Phi_0\left(\frac{\varepsilon k}{b}\right)\Phi_0\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right)-\Phi_0\left(\frac{\varepsilon k}{a}\right)\Phi_0\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)=\left(\frac{a_0 b}{\varepsilon k}+b_0\right)\left(\frac{a_0 a}{\mathfrak{r}k}+b_0\right)-\left(\frac{a_0 a}{\varepsilon k}+b_0\right)\left(\frac{a_0 b}{\mathfrak{r}k}+b_0\right)$$
$$=\frac{a_0 b_0}{k}(a-b)\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}-\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Der betrachtete Ausdruck ist also im Allgemeinen von der Ordnung $-4n$, für $n=0$ aber von der -1ten Ordnung. Sonach werden μ_n, σ_n, τ_n für sehr kleine Werthe von $\mathfrak{r}$ von der Ordnung 0, ϱ_n aber von der Ordnung -2, ν_n von der Ordnung $+6$ bis auf ν_1, welches von der fünften Ordnung ist. Nimmt man hinzu, dass in diesem Falle P_n, Q_n, T_n von der n^{ten} Ordnung sind, so besteht p_n aus Gliedern von den Ordnungen n und $n+6$, q_n aus Gliedern von den Ordnungen $n-2$ und n, t_n ist von der n^{ten} Ordnung. Bemerkt man noch, dass in u, v, w die Ordnung sämmtlicher p durch die Differentiation um 1 erhöht, die der q aber um 1 erniedrigt wird, so bleiben als Terme niedrigster Ordnung diejenigen Theile von q_1, p_1, welche von der respective 1ten und -1ten Ordnung sind, und in u, v, w Terme 0ter Ordnung ergeben; t_0 geht aus der Rechnung, derjenige Theil von q_0, welcher die Glieder niedrigster Ordnung enthalten würde, fällt aus, und alle übrigen Glieder führen auf höhere Ordnungen. Es bleiben also nur die in (104.) beibehaltenen Glieder.

So kann man also zunächst in den Ausdrücken (103.) $\mathfrak{r}$ als endlich betrachten, und später dasselbe, in den ausgerechneten Formeln, sehr klein werden lassen, ohne dass dabei berechtigte Glieder vernachlässigt würden.

§. 17.

Darstellung der Formeln und Gesetze für Punkte, welche von der reflectirenden Kugel weit entfernt sind.

Die vorstehenden Betrachtungen zeigen, *dass bei mässiger Wellenlänge der Einfluss einer sehr kleinen reflectirenden Kugel nur in der unmittelbaren*

Nähe derselben von endlicher Grösse, in weiterer Entfernung aber von der Ordnung des Kugelradius ist. Ich werde jetzt die Formeln für diesen Einfluss vollständiger entwickeln.

Nach (103.) ist:

$$(107.)\quad \left\{\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{-1}\left\{\left(\frac{k}{a}\right)^3 \Phi_1\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\right)\cdot KY_1 + \left(\frac{k}{b}\right)^3 \Phi_1\left(\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\right)\cdot \Omega_1\right\} \\ &= \sqrt{-1}\left\{ e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0}{a}\sqrt{-1}}\left(\frac{k}{a}\right)^3\left(\left(\frac{a}{k\mathfrak{r}_0}\right)^2 - \sqrt{-1}\left(\frac{a}{k\mathfrak{r}_0}\right)^3\right) K.(xx_0+yy_0+zz_0)\right. \\ &\qquad \left. + e^{-\frac{k\mathfrak{r}_0}{b}\sqrt{-1}}\left(\frac{k}{b}\right)^3\left(\left(\frac{b}{k\mathfrak{r}_0}\right)^2 - \sqrt{-1}\left(\frac{b}{k\mathfrak{r}_0}\right)^3\right)\cdot \begin{vmatrix} A & x & x_0 \\ B & y & y_0 \\ C & z & z_0 \end{vmatrix}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Da ferner $\Phi_n(s)$ sich für ein unendlich kleines s auf

$$\frac{(-\sqrt{-1})^n . 1.3 \ldots 2n-1}{s^{2n+1}},$$

$\Phi_0(s)$ aber auf $\frac{1}{s}$ reducirt, so findet sich

$$(108.)\quad \mu_1 = \frac{k\varepsilon}{ab}\,\frac{b^3\Phi_0\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right) + 2a^3\Phi_0\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{b^2+2a^2} = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{r}}\,\frac{b^2 e^{-\frac{\mathfrak{r}k}{a}\sqrt{-1}} + 2a^2 e^{-\frac{\mathfrak{r}k}{b}\sqrt{-1}}}{b^2+2a^2},$$

und für sehr kleine Werthe von $\mathfrak{r}$:

$$(108^a.)\quad \mu_1 = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{r}}.$$

Sodann hat man:

$$(109.)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{k^3\varepsilon}{a^3b^3}\,\frac{b^5\Phi_2\left(\frac{\mathfrak{r}k}{a}\right) - a^5\Phi_2\left(\frac{\mathfrak{r}k}{b}\right)}{b^2+2a^2} \\ &= \frac{k^3\varepsilon}{a^3b^3}\cdot\left\{\frac{b^5}{b^2+2a^2}\,e^{-\frac{\mathfrak{r}k}{a}\sqrt{-1}}\left(\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^3 - 3\sqrt{-1}\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^4 - 3\left(\frac{a}{\mathfrak{r}k}\right)^5\right)\right. \\ &\qquad \left. - \frac{a^5}{b^2+2a^2}\,e^{-\frac{\mathfrak{r}k}{b}\sqrt{-1}}\left(\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^3 - 3\sqrt{-1}\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^4 - 3\left(\frac{b}{\mathfrak{r}k}\right)^5\right)\right\}; \end{aligned}\right.$$

und für sehr kleine Werthe von $\mathfrak{r}$, indem man bemerkt, dass in (106.) nothwendig $a_2 = -3$ zu setzen ist:

$$(109^a.)\quad \varrho_1 = \frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Führt man die Werthe (107.), (108.), (109.) in die Gleichungen (104.) ein, so ergeben sich für Punkte, welche in grösserer Entfernung von der reflectirenden Kugel liegen, die Ausdrücke:

$$u = e^{k\left(t-\frac{r}{a}-\frac{r_0}{a}\right)\sqrt{-1}}\{\alpha K b^2 x_0+\alpha' K(r^2x_0-3x(xx_0+yy_0+zz_0))\}$$
$$+e^{k\left(t-\frac{r}{b}-\frac{r_0}{a}\right)\sqrt{-1}}\{2\alpha K a^2 x_0-\alpha'' K(r^2x_0-3x(xx_0+yy_0+zz_0))\}$$
$$+e^{k\left(t-\frac{r}{a}-\frac{r_0}{b}\right)\sqrt{-1}}\{\beta b^2(Cy_0-Bz_0)+\beta'(r^2(Cy_0-Bz_0)-3x\Delta)\}$$
$$+e^{k\left(t-\frac{r}{b}-\frac{r_0}{b}\right)\sqrt{-1}}\{2\beta a^2(Cy_0-Bz_0)-\beta''(r^2(Cy_0-Bz_0)-3x\Delta)\},$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & x & x_0 \\ B & y & y_0 \\ C & z & z_0 \end{vmatrix},$$

und wo die Grössen α, β folgende Bedeutungen haben:

$$\alpha = -\frac{\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{arr_0^2}\left(1-\frac{a\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\alpha' = \frac{b^2\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{ar_0^2r^3}\left(1-\frac{3a\sqrt{-1}}{kr}-\frac{3a^2}{r^2k^2}\right)\left(1-\frac{a\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\alpha'' = \frac{a\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{r_0^2r^3}\left(1-\frac{3b\sqrt{-1}}{kr}-\frac{3b^2}{r^2k^2}\right)\left(1-\frac{a\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\beta = -\frac{\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{brr_0^2}\left(1-\frac{b\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\beta' = \frac{b\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{r_0^2r^3}\left(1-\frac{3a\sqrt{-1}}{rk}-\frac{3a^2}{r^2k^2}\right)\left(1-\frac{b\sqrt{-1}}{kr_0}\right),$$
$$\beta'' = \frac{a^2\sqrt{-1}}{b^2+2a^2}\,\frac{k\varepsilon}{br_0^2r^3}\left(1-\frac{3b\sqrt{-1}}{rk}-\frac{3b^2}{r^2k^2}\right)\left(1-\frac{a\sqrt{-1}}{kr_0}\right).$$

Die Ausdrücke für v, w erhält man leicht aus u durch Vertauschung der Buchstaben.

Der obige Werth von u erscheint sofort in vier Theile gesondert, die mit verschiedenen Exponentialgrössen multiplicirt sind. Der erste Theil enthält Longitudinalbewegungen, welche aus eben solchen, der zweite Transversalbewegungen, welche aus longitudinalen entstanden sind; der dritte Theil giebt longitudinale Schwingungen, und der vierte transversale, welche beide in transversalen Bewegungen ihren Ursprung haben. In der entsprechenden Weise deutet die Phase $\frac{r}{a}+\frac{r_0}{a}$ des ersten Theils auf einen Strahl, welcher die Strecke r_0 zur reflectirenden Kugel, und die Strecke r von da zum betrachteten Punkte mit der Geschwindigkeit a der Longitudinalwellen zurückgelegt hat, während beim zweiten Theil die zweite, beim dritten die erste

Strecke, beim letzten endlich beide mit der Geschwindigkeit b der Transversalwellen zurückgelegt erscheinen. Strenge genommen tritt überall eine Phasenveränderung, d. h. eine für die vier Theile verschiedene Verzögerung durch die Reflexion, deswegen ein, weil die den Exponentialgrössen anhaftenden Coefficienten complex sind; aber man bemerkt, dass die reellen Theile der Coefficienten für sehr grosse Werthe von r, r_0 von höherer Ordnung werden. Ist also der Erregungspunkt, so wie der betrachtete, weit entfernt, so werden die Coefficienten der verschiedenen Theile der reflectirten Bewegung, so wie auch die Coefficienten der einfallenden Bewegung rein imaginär; während daher in solchem Fall der reelle Theil der einfallenden Bewegung, welcher die wirkliche Schwingung darstellt, den trigonometrischen Factor $\sin k\left(t-\frac{R}{a}\right)$ erhält, besteht die reflectirte Bewegung aus vier Theilen, deren trigonometrische Factoren

$$\sin k\left(t-\frac{r}{a}-\frac{r_0}{a}\right),\ \sin k\left(t-\frac{r}{b}-\frac{r_0}{a}\right),\ \sin k\left(t-\frac{r}{a}-\frac{r_0}{b}\right),\ \sin k\left(t-\frac{r}{b}-\frac{r_0}{b}\right)$$

sind, und welche also die oben angegebenen Phasen zeigen.

Die Coefficienten, mit welchen diese vier trigonometrischen Ausdrücke dann in u, v, w multiplicirt sind, werden von der Form

$$\begin{aligned}
&\text{in } u\text{:}\quad mx,\quad nx_0+n'x,\quad px,\quad q(Cy_0-Bz_0)+q'x,\\
&\text{in } v\text{:}\quad my,\quad ny_0+n'y,\quad py,\quad q(Az_0-Cx_0)+q'y,\\
&\text{in } w\text{:}\quad mz,\quad nz_0+n'z,\quad pz,\quad q(Bx_0-Ay_0)+q'z;
\end{aligned}$$

und zwar hat man:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{3(xx_0+yy_0+zz_0)K.k\varepsilon b^2}{r^3r_0^2a(b^2+2a^2)}, \qquad n=\frac{Kk\varepsilon}{arr_0^2},\\
n' &= -\frac{3(xx_0+yy_0+zz_0)K.k\varepsilon a}{r^3r_0^2(b^2+2a^2)},\\
p &= \frac{3\Delta k\varepsilon b}{r^3r_0^2(b^2+2a^2)}, \qquad q=\frac{k\varepsilon}{brr_0^2},\\
q' &= -\frac{3\Delta k\varepsilon a^2}{br^3r_0^2(b^2+2a^2)}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln erkennt man Folgendes:

1. Die Amplituden der einzelnen Theile sind proportional dem Radius der reflectirenden Kugel, so wie umgekehrt proportional ihrem Abstande vom Erregungspunkt. Sie sind ferner, in einer bestimmten Richtung vom Mittelpunkt der reflectirenden Kugel aus, umgekehrt proportional dem Abstande von demselben.

2. Die Longitudinalschwingungen finden immer in der Richtung der Linie statt, welche den betrachteten Punkt mit dem Mittelpunkte der reflectirenden Kugel verbindet.

3. In den Longitudinalschwingungen, welche aus einfallenden Longitudinalwellen entstehen, ist auf einer der reflectirenden concentrischen Kugel die Amplitude proportional dem Cosinus des Winkels, welchen der nach dem Erregungspunkt gezogene Radius mit dem nach dem betrachteten Punkte gezogenen bildet. Sie ist also am grössten auf der Verbindungslinie des Mittelpunkts mit dem Erregungspunkt, und Null auf der Ebene, welche, senkrecht gegen diese Linie, durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel gelegt wird.

4. Die aus den Longitudinalschwingungen hervorgehenden Transversalbewegungen bestehen aus zwei Componenten. Die eine ist nach dem Erregungspunkt gerichtet, und auf allen Punkteu der in 3. betrachteten Kugel von gleicher Amplitude; die andere ist nach dem Mittelpunkt der reflectirenden Kugel gerichtet, und verhält sich in Bezug auf ihre Amplitude genau wie die entsprechende Longitudinalbewegung 3.

5. Die aus Transversalwellen entspringenden Longitudinalwellen, deren Richtung in 2. angegeben ist, haben ihre Amplitude proportional mit dem Inhalt einer dreiseitigen Pyramide Π, deren Seitenkanten 1 sind, während ihre Richtungen durch die Verbindungslinien der reflectirenden Kugel mit dem betrachteten Punkte und dem Erregungspunkt, und durch die Axe der einfallenden Schwingungen (§. 13) gegeben sind. Diese Bewegungen sind also Null in der Ebene, welche durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel, durch den Erregungspunkt und die Axe geht, und am grössten in der Normale dieser Ebene, welche durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel geführt wird.

6. Die aus Transversalwellen entstehenden Transversalwellen endlich bestehen aus einer Componente, welche sich genau wie der vorige Theil der Bewegungen verhält, und aus einer zweiten, welche senkrecht ist gegen die Axe und gegen die Verbindungslinie des Erregungspunkts mit dem Mittelpunkt der reflectirenden Kugel. Die Amplitude ist auf allen Punkten einer um diesen letzten Punkt beschriebenen Kugel die gleiche.

Es verdient endlich bemerkt zu werden, dass wenn die einfallenden Bewegungen transversal sind und ihre Axe durch den Mittelpunkt geht, in der hier angewandten Annäherung überhaupt keine reflectirten Bewegungen existiren. Denn ist $K=0$ und $x_0:y_0:z_0=A:B:C$, so verschwinden die obigen Ausdrücke. Dies war zu erwarten; denn es fällt die reflectirende Kugel

dann ganz in jenen Raum, innerhalb dessen auch die einfallenden Bewegungen ausserordentlich schwach sind.

§. 18.

Untersuchung derjenigen Punkte, welche der reflectirenden Kugel sehr nahe liegen.

Für Punkte in der Nähe der reflectirenden Kugel ergiebt sich mit Benutzung von (108^a.), (109^a.), indem man wieder den Erregungspunkt sehr weit entfernt annimmt:

$$u = e^{\left(t-\frac{r_0}{a}\right)k\sqrt{-1}} \cdot \frac{k\sqrt{-1}}{ar_0^2} K \left\{ -\frac{\varepsilon}{r} x_0 + \frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)} \left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\left(x_0 - \frac{3x(xx_0+yy_0+zz_0)}{r^2}\right)\right\}$$

$$+ e^{\left(t-\frac{r_0}{b}\right)k\sqrt{-1}} \cdot \frac{k\sqrt{-1}}{br_0^2} \left\{ -\frac{\varepsilon}{r}(Cy_0 - Bz_0) + \frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)} \left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\left((Cy_0-Bz_0) - \frac{3xA}{r^2}\right)\right\},$$

$$v = \cdots, \qquad w = \cdots.$$

In diesen Formeln erscheint nicht jene Zerlegung in vier verschiedene Bewegungen, welche die vorhergehenden Formeln characterisirte; vielmehr sondern sich die u, v, w nur in je zwei Theile, deren reelle Theile die trigonometrischen Factoren $\sin k\left(t-\frac{r_0}{a}\right)$, $\sin k\left(t-\frac{r_0}{b}\right)$ erhalten. Vergleicht man daher die Formeln (102^a.) für die einfallenden Bewegungen, so erscheinen die beiden Theile der reflectirten Bewegungen den beiden Theilen der einfallenden Bewegungen ganz analog. Aber während in den letzteren Schwingungsrichtung und Amplitude in der Nähe der reflectirenden Kugel nahezu überall gleich ist, wird bei den reflectirten Bewegungen beides für verschiedene Punkte wesentlich verschieden. Was die Schwingungsrichtungen und die Vergleichung der Amplituden für Punkte einer der reflectirenden concentrischen Kugel betrifft, so verhält sich der erste Theil der reflectirten Bewegungen genau so wie der zweite im Früheren, und der zweite hier, wie im Vorigen der vierte, so dass die betreffenden Gesetze dem Obigen entnommen werden können.

Aber anders wie dort variirt hier die *Intensität* der Bewegungen in der Richtung einer vom Centrum der reflectirenden Kugel aus gezogenen Linie, da u, v, w zum Theil mit $\frac{1}{r}$, zum Theil aber mit r^2 proportional sind. Ich werde, statt die Intensität der reflectirten Bewegungen zu untersuchen, reflectirte und einfallende Bewegungen zusammenfassen, und die Amplituden der Gesammtbewegung betrachten. Man erhält dann, indem man die Ausdrücke (102^a.) zu den oben stehenden addirt:

$$u = e^{\left(t-\frac{r_0}{a}\right)k\sqrt{-1}}\cdot\frac{k\sqrt{-1}}{ar_0^2}K\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)x_0+\frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\left(x_0-\frac{3x(xx_0+yy_0+zz_0)}{r^2}\right)\right\}$$
$$+e^{\left(t-\frac{r_0}{b}\right)k\sqrt{-1}}\cdot\frac{k\sqrt{-1}}{br_0^2}\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)(Cy_0-Bz_0)+\frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\left((Cy_0-Bz_0)-\frac{3x\Delta}{r^2}\right)\right\},$$

$v = \cdots,$ $\qquad w = \cdots.$

Diese Ausdrücke verschwinden, wie es sein muss, für $r = \varepsilon$; man darf also annehmen, dass jede der beiden Schwingungen, aus denen die u, v, w sich zusammensetzen, auf jeder von dem Mittelpunkt der reflectirenden Kugel aus gezogenen Geraden an einer gewissen Stelle ein Maximum der Amplitude erreicht, und man kann die Oberflächen aufsuchen, welche von diesen Maximumspunkten gebildet werden.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{a^2-b^2}{2(b^2+2a^2)} = \mu, \qquad xx_0+yy_0+zz_0 = rr_0\cos\vartheta,$$

so ist das Quadrat der Amplitude der durch die Reflexion modificirten Longitudinalbewegungen proportional mit:

$$\left[\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}x_0-3\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{xr_0\cos\vartheta}{r}\right]^2$$
$$+\left[\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}y_0-3\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{yr_0\cos\vartheta}{r}\right]^2$$
$$+\left[\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}z_0-3\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{zr_0\cos\vartheta}{r}\right]^2$$
$$= r_0^2\left[\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}^2-6\mu\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\cos^2\vartheta\right.$$
$$\left.+9\mu^2\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)^2\cos^2\vartheta\right].$$

Differentiiren wir diesen Ausdruck nach r und setzen das Resultat gleich Null, so ergiebt sich diejenige Oberfläche, deren Punkte auf den verschiedenen Radien Vectoren Maxima der Amplitude für die Longitudinalbewegungen besitzen, ausgedrückt in den Polarcoordinaten r, ϑ. Die Oberfläche ist also eine Rotationsfläche, und ihre Drehungsaxe ist die Verbindungslinie des Erregungspunktes mit dem Mittelpunkte der reflectirenden Kugel. Die Gleichung der Fläche ist:

$$0 = \left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right)-6\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\cos^2\vartheta$$
$$+12\mu\frac{r}{\varepsilon}\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\cos^2\vartheta-36\mu^2\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{r}{\varepsilon}\cos^2\vartheta$$

oder, mit Hinweglassung des Factors $1-\frac{\varepsilon}{r}$:

$$(110.)\quad 6\cos^2\vartheta = -\frac{\left\{\frac{\varepsilon}{r}-\mu\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)\right\}\left\{\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right\}}{\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)+2\mu\frac{r}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{r}-\mu\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)+6\mu^2\frac{r}{\varepsilon}\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)}.$$

In der Aequatorebene hat man $\cos\vartheta = 0$, also

$$\left(\frac{\varepsilon}{r}-\mu\left(1+\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}-2\mu\frac{r}{\varepsilon}\right) = 0.$$

Von diesen Factoren giebt der erste für $\frac{r}{\varepsilon}$ zwei Werthe, deren einer negativ ist, während der zweite kleiner als 1 wird; so bleibt also nur der letzte Factor, welcher

$$r = \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2\mu}}$$

giebt. Da man Grund hat, immer $a>b$ anzunehmen, so wird 2μ ein positiver echter Bruch, und also der obige Werth von r wirklich brauchbar zur Bestimmung des Kreises, an welchem in der gegen r_0 senkrechten Ebene die Longitudinalschwingungen ihr Maximum der Amplitude haben.

Für $\cos\vartheta = 1$, also auf der Rotationsaxe, hat man hingegen, da für diesen Werth der ursprünglich differentiirte Ausdruck ein vollständiges Quadrat wird:

$$0 = \left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)-2\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\left\{\frac{\varepsilon^2}{r^2}+4\mu\frac{r}{\varepsilon}\right\}.$$

Keiner dieser Factoren liefert einen brauchbaren Werth. Bemerkt man aber, dass man aus (110.) für $r=\infty$ den Werth

$$6\cos^2\vartheta = \frac{2\mu}{1-2\mu} = \frac{a^2-b^2}{a^2+2b^2}$$

erhält, so erkennt man, dass die betrachtete Fläche, von ihrer Aequatorebene ausgehend, sich gegen den aus dieser Gleichung gezogenen Werth von ϑ ins Unendliche ausdehnt, während jenseits dieses Winkels kein ausserhalb der Kugel $r=\varepsilon$ gelegener Zweig existirt. Man darf daraus schliessen, dass in der unmittelbaren Nähe der reflectirenden Kugel Maxima der Longitudinalbewegungen nur für solche Richtungen auftreten, welche von der gegen r_0 senkrechten Ebene sich nicht sehr weit entfernen.

Auf ganz ähnliche Verhältnisse wird man geführt, wenn man die Maxima der Amplituden für die Transversalschwingungen aufsucht. Setzt man

$$F^2 = (A^2+B^2+C^2)(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-(Ax_0+By_0+Cz_0)^2,$$

so wird das Quadrat der Amplitude hier proportional mit:

$$\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right]F^2-6\mu\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)+\mu\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right\}\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\frac{\Delta^2}{r^2}+9\mu^2\left(1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)^2\frac{\Delta^2}{r^2}.$$

Aber F und Δ haben sehr einfache geometrische Bedeutungen. Zieht man durch den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel die Axe der Schwingungen und trägt auf derselben die Strecke $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ an, so bestimmt diese Linie mit r_0 zusammen ein Dreieck, dessen Fläche $\frac{F}{2}$ ist. Beide Linien zusammen mit r bestimmen eine dreiseitige Pyramide, deren Inhalt $\frac{\Delta}{6}$ ist. Zieht man nun die Gerade, welche auf r_0 und der Schwingungsaxe senkrecht steht, und bezeichnet durch u den Winkel, welchen sie mit r bildet, so kann man den Inhalt der Pyramide doppelt ausdrücken, und hat also:

$$\frac{\Delta}{6}=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{F}{2}\cdot r\cos u, \quad \text{oder} \quad \Delta=Fr\cos u.$$

Setzt man dies in den obigen Ausdruck ein, so erhält man, abgesehen von dem Factor $\frac{F^2}{r_0^2}$, genau den Ausdruck, welcher oben das Amplitudenquadrat der Longitudinalbewegungen darstellte, nur dass u an die Stelle von ϑ getreten ist. Hieraus folgt, *dass die Fläche der Maxima für die Transversalbewegungen von der entsprechenden für die Longitudinalbewegungen nur der Lage nach verschieden ist;* indem die Drehungsaxe der letzteren mit der Linie r_0 zusammenfällt, die der ersteren aber gegen diese Linie so wie gegen die Schwingungsaxe senkrecht gerichtet ist.

Es kann noch bemerkt werden, dass die Formeln für u, v, w ihre Ausdrücke durchaus nicht ändern, wenn man x, y, z gleichzeitig in $-x$, $-y$, $-z$ übergehen lässt. Es ergiebt sich also aus diesen Formeln keine Spur eines *Schattens*.

Carlsruhe, den 30. October 1861.

Ueber atmosphärische Strahlenbrechung.

(Von Herrn *Kummer*.)

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)

Die atmosphärische Strahlenbrechung ist bisher fast ausschliesslich nur unter Zugrundelegung der Grössenverhältnisse, welche für unsere Erde zufällig Statt haben, für den praktischen Gebrauch der Astronomie und Geodäsie bearbeitet worden. Man hat darum eine Reihe sehr interessanter Erscheinungen, welche diese Theorie darbietet, wenn sie von einem allgemeineren, mehr mathematischen Gesichtspunkte aus betrachtet wird, wie es scheint, bisher ganz unbeachtet gelassen. Eine kurze Entwickelung dieser Erscheinungen, welche ich hier geben will, wird vielleicht auch darum von Interesse sein, weil dieselben, wenn sie gleich auf unserer Erde nicht eintreten, doch auf den grösseren Himmelskörpern, wie z. B. dem Jupiter, wirklich Statt haben müssen, selbst wenn die Stärke der Atmosphäre eines solchen Himmelskörpers bedeutend geringer sein sollte, als die der Erdatmosphäre.

1. Die krummlinige Bahn eines Lichtstrahls in einem nicht homogenen, durchsichtigen, einfach brechenden Mittel, dessen absoluter Brechungsexponent n eine continuirliche Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z des Ortes ist, wird durch folgende Differentialgleichungen bestimmt:

$$d\left(n\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}ds,$$

$$d\left(n\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial y}ds,$$

$$d\left(n\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z}ds,$$

in welchen ds das Differential des Bogens, und

$$\frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{\partial n}{\partial z}$$

die partiellen Differentialquotienten von n bezeichnen. Von diesen drei Gleichungen ist eine, wie leicht zu zeigen, eine Folge der beiden anderen, so dass zwei derselben zur Bestimmung der Bahn des Lichtstrahls vollkommen hinreichen.

Vergleicht man diese Gleichungen mit den bekannten Differentialgleichungen, durch welche die Gleichgewichtslage eines unter der Wirkung gegebener Kräfte stehenden, biegsamen Fadens bestimmt wird, so bemerkt man, dass sie mit diesen vollkommen identisch sind, wenn der Brechungsexponent n dieselbe Function von x, y, z ist als die Spannung T in jedem Punkte des Fadens. Den Grund dieser Identität erkennt man fast unmittelbar, wenn man zur Herleitung der einen und der anderen Gleichungen das Princip der kleinsten Wirkung anwendet. Der Brechungsexponent n ist bekanntlich umgekehrt proportional der Geschwindigkeit des Lichtes in dem betreffenden Punkte, man hat also

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{n}, \qquad dt = n\,ds,$$

und da die Bewegung des Lichtes von einem Punkte zu einem anderen in der kürzesten Zeit erfolgt, so muss

$$\int n\,ds$$

ein Minimum sein. Andererseits erfordert das Gleichgewicht des biegsamen Fadens, dass die Summe aller Spannungen der einzelnen Bogenelemente zwischen je zwei gegebenen Punkten ein Minimum sei. Es muss also

$$\int T\,ds$$

ein Minimum sein. Nach den Regeln der Variationsrechnung findet man aus diesen Bedingungen die obigen Differentialgleichungen, welche für beide Probleme dieselben sein müssen, wenn T dieselbe Function von x, y, z ist als n.

2. Die allgemeinen Differentialgleichungen sollen nun auf den Fall angewendet werden, wo der Brechungsexponent n irgend eine Function der Entfernung von einem festen Mittelpunkte ist, wo also in dem durchsichtigen Mittel für alle Punkte einer Kugeloberfläche von beliebigem Radius der Brechungsexponent denselben Werth hat, welcher Fall annähernd für die Atmosphären der Himmelskörper im regelmässigen Zustande Statt hat. Jede Curve, welche ein Lichtstrahl in einem solchen Mittel beschreibt, liegt offenbar ganz in einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene; wird diese daher als die Coordinatenebene der x, y gewählt, so hat man $z = 0$ und n ist eine Function von

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die dritte Differentialgleichung ist in diesem Falle identisch erfüllt, die beiden anderen aber, von denen eine schon zur vollständigen Lösung der Aufgabe

hinreicht, geben, wenn man die eine mit y, die andere mit x multiplicirt und subtrahirt:

$$y\,d\left(n\frac{dx}{ds}\right)-x\,d\left(n\frac{dy}{ds}\right)=0.$$

Entwickelt man diese Gleichung und setzt

$$x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}=p,$$

so erhält man

$$n\,dp+p\,dn=0,$$

also

$$np=C,$$

als erstes Integral. Führt man nun Polarcoordinaten ein, indem man setzt

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,$$

so erhält man

$$\frac{nr^2\,d\varphi}{\sqrt{dr^2+r^2\,d\varphi^2}}=C,$$

also

$$d\varphi=\frac{C\,dr}{r\sqrt{r^2n^2-C^2}}.$$

Nimmt man nun an, dass das durchsichtige Mittel nach Art einer Atmosphäre eine undurchsichtige Kugel mit dem Radius R umgiebt, so hat man nur diejenigen Werthe des r in Betracht zu ziehen, welche grösser als R sind. Setzt man daher $r=R+v$ und $R\varphi=u$, so können u und v als Coordinaten der Curve angesehen werden, und zwar ist u, die Abscisse, ein Bogen des grössten Kreises der Kugel, und v, die Ordinate, ist die Höhe des betreffenden Punktes der Curve über der Kugeloberfläche, in dem Endpunkte der Abscisse errichtet. Man hat alsdann

$$u+B=\int_0\frac{RC\,dv}{(R+v)\sqrt{(R+v)^2n^2-C^2}}.$$

Zur Bestimmung der beiden Integrationsconstanten soll jetzt angenommen werden, dass der Lichtstrahl von dem Punkte der Kugel ausgeht, dessen Coordinaten $u=0$ und $v=0$ sind, und dass seine anfängliche Richtung mit der Horizontalebene dieses Punktes den Neigungswinkel i macht. Man hat alsdann

$$B=0,\qquad C=n_0\cos i,$$

wo n_0 den Werth des n für $v=0$ bezeichnet. Die Gleichung der Curve des Lichtstrahls wird daher

$$u=\int_0\frac{R^2n_0\cos i\,dv}{(R+v)\sqrt{(R+v)^2n^2-R^2n_0^2\cos^2 i}}.$$

3. Es sind nun zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich erstens der Fall, wo die Grösse unter dem Wurzelzeichen, welche kurz durch

$$V = (R+v)^2 n^2 - R^2 n_0^2 \cos^2 i$$

bezeichnet werden soll, für keinen positiven Werth des v gleich Null wird, sondern stets positiv bleibt, und zweitens der Fall, wo diese Grösse für einen oder einige positive Werthe des v gleich Null wird. Der Brechungsexponent n, als Function der Höhe v, soll vorläufig noch beliebig gelassen und nur den Bestimmungen unterworfen werden, dass er eine eindeutige Function von v sei, welche für $v = \infty$ sich einer endlichen Grenze nähere, die nicht kleiner als Eins sein kann, ferner dass n selbst, so wie auch sein erster und zweiter Differentialquotient für keinen positiven Werth des v unendlich gross werde.

Wenn V von $v = 0$ bis $v = \infty$ nicht gleich Null wird, so wird mit wachsendem v auch u fortwährend grösser, für $v = \infty$ aber behält u, wie leicht zu zeigen, einen endlichen Werth. Bezeichnet man diesen mit c, so ist

$$c = \int_0^\infty \frac{R^2 n_0 \cos i \, dv}{(R+v)\sqrt{V}}.$$

Es folgt hieraus, dass die Curve des Lichtstrahls stets eine gradlinige Asymptote hat und dass der Winkel, welchen diese Asymptote mit der Vertikalen im Punkte $u = 0$, $v = 0$ macht, als Bogen für den Radius Eins ausgedrückt, gleich

$$\frac{c}{R} = \int_0^\infty \frac{R n_0 \cos i \, dv}{(R+v)\sqrt{V}}$$

ist; also der Refractionswinkel, welcher mit Θ bezeichnet werden mag, für Objecte, deren Entfernung im Verhältniss zum Radius R sehr gross ist, als Unterschied der Richtung der Asymptote und der Richtung der Tangente im Anfangspunkte, ist:

$$\Theta = \frac{c}{R} - \frac{\pi}{2} + i;$$

derselbe kann leicht auch in folgende Form gesetzt werden:

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{R \cos i}{R+v}\left(\frac{n_0}{\sqrt{V}} - \frac{1}{\sqrt{(R+v)^2 - R^2\cos^2 i}}\right) dv.$$

4. Ich betrachte nun den anderen Fall, wo V gleich Null wird, für einen oder auch für mehrere positive Werthe des v. Es sei $v = b$ der kleinste dieser Werthe und der zu demselben gehörende Werth der Abscisse sei $u = a$, so ist

$$a = \int_0^b \frac{R^2 n_0 \cos i \, dv}{(R+v)\sqrt{V}}.$$

Es kommt nun darauf an, ob dieses bestimmte Integral, oder a, einen endlichen oder einen unendlich grossen Werth hat. Nach dem *Taylor*schen Satze ist:

$$V(v) = V(b) - (b-v)V'(b) + \frac{(b-v)^2}{2}V''(\varepsilon),$$

wo ε eine in den Grenzen 0 und b liegende Grösse ist. Da nun oben von der Function n vorausgesetzt worden ist, dass sie selbst und ihre beiden ersten Differentialquotienten nicht unendlich werden, so gilt dasselbe offenbar auch von der Function V und ihren beiden ersten Differentialquotienten V' und V'' für alle positiven endlichen Werthe des v. Wenn nun $V'(b)$ nicht gleich Null ist, sondern, indem V abnehmend aus dem Positiven in's Negative übergeht, einen negativen Werth hat, so hat, da $V(b)$ gleich Null ist, V die Form:

$$V = (b-v)W,$$

wo W für $v = b$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat. Hieraus schliesst man nach bekannten Regeln, dass in diesem Falle, wo V' für $v = b$ nicht gleich Null wird, das Integral a einen endlichen Werth hat. Wenn dagegen zugleich mit V auch V' für $v = b$ gleich Null wird, so hat V die Form:

$$V = (b-v)^2 W_1,$$

wo W_1 für $v = b$ nicht unendlich wird, woraus folgt, dass das Integral a in diesem Falle einen unendlich grossen Werth hat.

Es sei nun erstens V' nicht gleich Null für $v = b$, so gehört zu dem Werthe der Ordinate $v = b$ ein endlicher Werth der Abscisse $u = a$. Nachdem v von Null anfangend den Werth b erreicht hat, kann es nicht grösser werden, weil sonst $\sqrt{V}$ imaginär würde; die Curve des Lichtstrahls kann aber im Punkte $u = a$, $v = b$ nicht plötzlich abbrechen, weil der Lichtstrahl in dem continuirlichen durchsichtigen Mittel bleibt, es muss also von da an v wieder kleiner werden, also dv negativ, und zugleich muss die Wurzel $\sqrt{V}$ das negative Vorzeichen annehmen, welches ohne Unterbrechung der Continuität geschehen kann, weil diese Quadratwurzel für $v = b$ durch den Werth Null hindurchgeht. Die Curve des Lichtstrahls hat also im Punkte $u = a$, $v = b$ das Maximum ihrer Höhe, sie nähert sich von da aus der Kugel wieder, und zwar so, dass der absteigende Theil der Curve dem ansteigenden vollkommen symmetrisch ist, sie kehrt darum wieder auf die Oberfläche der Kugel zurück, und die Entfernung des Ausgangspunktes von dem Punkte, wo sie die Kugel

wieder trifft, als Bogen des grössten Kreises der Kugel gemessen, ist gleich $2a$.

Es tritt hier dasselbe ein, wie bei der bekannten Erscheinung der Luftspiegelung, nämlich wenn ein Lichtstrahl unter einem unendlich kleinen Winkel tangential an eine Luftschicht kommt, welche verhältnissmässig zu dünn ist, als dass er sie durchbrechen könnte, so erleidet er an ihr eine Art totaler Reflexion und kehrt von da aus wieder in die dichteren Luftschichten zurück.

Wenn zweitens ausser V auch V' gleich Null wird für $v = b$, so wird a unendlich gross, also die Ordinate v nähert sich, wenn die Abscisse u in's Unendliche wächst, der Grenze $v = b$. Die Curve des Lichtstrahls geht also unendlich viele Male um die Kugel herum, indem sie sich asymptotisch einem Kreise nähert, dessen Radius gleich $R + b$, oder dessen Höhe über der Kugel gleich b ist.

5. Es sollen jetzt die verschiedenen Werthe des Neigungswinkels i in Betracht gezogen werden. Wenn die Grösse $(R+v)^2 n^2$ ihren absolut kleinsten Werth, welcher zugleich kleiner als $R^2 n_0^2$ ist, für $v = \beta$ erhält, und man bestimmt den spitzen Winkel $i = I$ durch die Gleichung $V = 0$ für $v = \beta$, nämlich

$$\cos I = \frac{(R+\beta) n(\beta)}{R n_0},$$

so kann V nur dann gleich Null werden, wenn der Neigungswinkel i in den Grenzen 0 und I liegt, und zu jedem in diesen Grenzen liegenden Werthe des i giebt es auch wirklich einen oder mehrere positive Werthe des v, für welche $V = 0$ wird, deren kleinster $v = b$ sei. Hieraus folgt:

Alle Lichtstrahlen, welche unter einem Winkel $i > I$ von der Kugel abgehen, entfernen sich von derselben in's Unendliche und haben gradlinige Asymptoten; aber diejenigen, welche unter einem Winkel kleiner als I von der Kugel abgehen, erreichen nur ein bestimmtes Maximum der Höhe $v = b$, welches kleiner ist als β, und kehren alsdann im Allgemeinen wieder auf die Oberfläche der Kugel zurück, in dem besonderen Falle aber, wo für $v = b$ nicht nur $V = 0$, sondern auch $V' = 0$ wird, nähert sich der Lichtstrahl asymptotisch einem Kreise dessen Höhe über der Kugel gleich b ist.

Dieser letztere Fall der Kreisasymptote des Lichtstrahls findet allemal für $i = I$ Statt, weil für diesen Werth des Neigungswinkels $v = \beta$ ist und V sein Minimum hat, dessen Werth gleich Null ist, also zugleich $V = 0$ und $V' = 0$ für $v = \beta$ ist. Derselbe Fall kann auch noch für andere, in den

Grenzen 0 und I liegende Werthe des i eintreten, nämlich wenn noch für gewisse andere kleinere Werthe des v, z. B. für $v = \beta'$, die Grösse V' gleich Null wird. Der Lichtstrahl hat alsdann auch für den durch die Gleichung

$$\cos i = \frac{(R+\beta')\, n(\beta')}{Rn_0}$$

bestimmten Werth des Neigungswinkels i eine Kreisasymptote in der Höhe β'.

6. Um die gefundenen Resultate auf die Erscheinungen der atmosphärischen Strahlenbrechung für die verschiedenen Himmelskörper anzuwenden, nehme ich diese als kugelförmig an und betrachte die Temperatur der Atmosphäre in den verschiedenen Höhen als constant, welche Annahmen für den gegenwärtigen Zweck, wo es nicht auf möglichst genaue numerische Resultate, sondern vielmehr nur auf die Qualität der Erscheinungen ankommt, vollständig genügen. Die Dichtigkeit der Atmosphäre, als Function der Höhe v über der Oberfläche des Himmelskörpers, dessen Radius R ist, nach dem Gesetze der Schwere und dem *Mariotte*schen Gesetze bestimmt, hat bekanntlich den Ausdruck

$$e^{-\frac{Rv}{\lambda(R+v)}},$$

wenn die Dichtigkeit an der Oberfläche gleich Eins gesetzt wird, wo λ gleich der Höhe einer Luftsäule von der constanten Dichtigkeit Eins ist, welche denselben Druck auf die Oberfläche des Himmelskörpers ausüben würde, als die Atmosphäre desselben wirklich ausübt. Demnach ist nach einem bekannten physikalischen Gesetze

$$n^2 = 1 + ke^{-\frac{Rv}{\lambda(R+v)}},$$

wo k die absolute brechende Kraft der Luft an der Oberfläche des Himmelskörpers ist, oder $\sqrt{1+k}$ der absolute Brechungsexponent derselben. Setzt man nun der Kürze halber

$$\frac{Rv}{\lambda(R+v)} = w,$$

so hat man für die Curve des Lichtstrahls die Gleichung

$$u = \int_0 \frac{R^2\sqrt{1+k}\cos i\, dv}{(R+v)\sqrt{V}},$$

wo

$$V = (R+v)^2(1+ke^{-w}) - R^2(1+k)\cos^2 i,$$

woraus man für den ersten und zweiten Differentialquotienten des V folgende

Werthe erhält:

$$V' = 2(R+v)(1+ke^{-\omega}) - \frac{R^2k}{\lambda}e^{-\omega},$$

$$V'' = 2+ke^{-\omega}\left(1-\frac{R^2}{\lambda(R+v)}\right)^2+ke^{-\omega}.$$

Weil der zweite Differentialquotient V'', wie dieser Ausdruck desselben zeigt, stets positiv ist, so ist der erste V' eine mit v zugleich wachsende Function, also V' kann nur für einen einzigen Werth des v gleich Null werden, indem es aus dem Negativen in's Positive übergeht, und wenn dieser Werth des v, welcher $V'=0$ giebt, positiv sein soll, so muss V' für $v=0$ noch negativ sein, und umgekehrt, wenn V' negativ ist für $v=0$, so hat die Gleichung $V'=0$ eine positive Wurzel, welche mit β bezeichnet werden soll. Die Bedingung V' negativ für $v=0$ giebt

$$2R(1+k)-\frac{R^2k}{\lambda}<0,$$

oder

$$R>\frac{2\lambda(1+k)}{k}.$$

Für diejenigen Himmelskörper, bei denen diese Bedingung nicht erfüllt ist, sondern

$$R<\frac{2\lambda(1+k)}{k},$$

ist V' positiv für alle positiven Werthe des v, also V stets zunehmend und folglich niemals gleich Null, für keinen Werth des Neigungswinkels i. Bei diesen Himmelskörpern gehen daher alle Strahlen, welche von einem Punkte der Oberfläche ausgehen, ins Unendliche fort, und von einem Punkte der Oberfläche aus ist, streng genommen, kein anderer Punkt der Oberfläche zu sehen. Es ist dies der Fall, welcher auf unserer Erde Statt hat, für diese ist nämlich unter der Voraussetzung einer constanten Temperatur von 0 Grad:

$$k=0{,}000589,\quad \lambda=7974^m,\quad R=6366198^m,$$

also

$$\frac{2\lambda(1+k)}{k}=27092000^m,$$

welcher Werth grösser ist als der Erdradius R.

7. Es sollen nun die Refractionserscheinungen derjenigen Himmelskörper näher untersucht werden, für welche

$$R>\frac{2\lambda(1+k)}{k}$$

ist. Für diese giebt es einen einzigen positiven Werth $v = \beta$, für welchen $V' = 0$ wird, welcher aus den Gleichungen

$$e^w + \frac{k}{2} w - \frac{Rk}{2\lambda} + k = 0, \quad v = \frac{R\lambda w}{R - \lambda w}$$

leicht berechnet werden kann. Bestimmt man nun den spitzen Winkel I, als denjenigen Werth des i, welcher der Gleichung $V = 0$ für $v = \beta$ genügt, also

$$\cos I = \frac{(R+\beta)\sqrt{1 + ke^{-\frac{R\beta}{\lambda(R+\beta)}}}}{R\sqrt{1+k}},$$

so hat für alle zwischen 0 und I liegenden Werthe des Neigungswinkels i die Gleichung

$$V = 0$$

zwei reale positive Wurzeln, deren kleinere $v = b$ das Maximum der Höhe ist, zu welcher der Lichtstrahl sich über den Himmelskörper erhebt, und es ist

$$\cos i = \frac{(R+b)\sqrt{1 + ke^{-\frac{Rb}{\lambda(R+b)}}}}{R\sqrt{1+k}}.$$

Die Bogenentfernung $2a$ vom Ausgangspunkte, in welcher der Lichtstrahl den Himmelskörper wieder trifft, ist:

$$2a = \int_0^b \frac{2R^2\sqrt{1+k}\cos i\, dv}{(R+v)\sqrt{V}}.$$

Während i continuirlich von 0 bis I wächst, wächst b von 0 bis β, und $2a$ wächst von Null bis in's Unendliche. Bezeichnet man die Werthe des i, welche beziehungsweise den Werthen des $2a$ gleich $R\pi$, $2R\pi$, $3R\pi$, ... angehören, mit i_1, i_2, i_3 ..., so bilden diese Neigungswinkel eine wachsende Reihe, deren unendlich entferntes Glied gleich I wird. Denkt man sich nun in einem beliebigen Punkte auf der Oberfläche eines solchen Himmelskörpers einen Beobachter, so muss dieser von diesem einen Punkte aus die ganze Oberfläche des Himmelskörpers überschauen können. Dieselbe muss ihm wie eine concave Schale erscheinen, deren Rand, der scheinbare Horizont, sich um den Winkel I über den wahren Horizont erhebt. In dieser Schale muss von dem Winkel Null bis zu i_1 die ganze Oberfläche des Himmelskörpers sichtbar sein und zwar grade bis zu den Antipoden, die näheren Objecte auf derselben müssen ziemlich in ihren natürlichen Verhältnissen erscheinen, die entfernteren aber, welche den Antipoden näher liegen, immer mehr ver-

flacht und zugleich in die Breite gezogen; der dem Beobachter diametral gegenüber liegende Punkt muss zu einem vollständigen Kreise unter dem Neigungswinkel i_1 ausgedehnt erscheinen, mit welchem dieses erste Bild der ganzen Oberfläche abschliesst. In dem ringförmigen Intervalle zwischen den Winkeln i_1 und i_2 muss ein zweites vollständiges Bild der ganzen Oberfläche sichtbar sein, in dessen durch den Winkel i_2 bestimmten Rande der Beobachter sich selbst sehen muss und zwar von hinten und zu einem ganzen Kreise verzerrt. Ein drittes Bild der ganzen Oberfläche liegt zwischen den Winkeln i_2 und i_3, ein viertes zwischen i_3 und i_4 und so fort in's Unendliche, und diese unendliche Reihe der bald ausserordentlich schmal werdenden Bilder schliesst mit dem scheinbaren Horizonte für den Winkel I ab.

Betrachtet man jetzt die Werthe des i, welche grösser sind als I, für welche also V nicht mehr gleich Null werden kann, so ist

$$\frac{c}{R} = \int_0^\infty \frac{R\sqrt{1+k}\cos i\, dv}{(R+v)\sqrt{V}}$$

der Winkel, welchen die Asymptote des in's Unendliche gehenden Lichtstrahls mit der Vertikallinie im Punkte $u=0$, $v=0$ bildet. Während hier i von dem Werthe $\frac{\pi}{2}$ bis zu dem Werthe I continuirlich abnimmt, wächst der Winkel $\frac{c}{R}$ continuirlich von Null bis in's Unendliche. Bezeichnet man nun die Werthe des i, welche $\frac{c}{R} = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ geben, beziehungsweise mit $i', i'', i''' \ldots$, so bilden diese eine abnehmende Reihe von Grössen, welche den Werth I zum Grenzwerth haben. Ein Beobachter auf einem beliebigen Punkte der Oberfläche des Himmelskörpers, welcher als Anfangspunkt der Coordinaten $u=0$, $v=0$ gewählt werden kann, übersieht hier vom Zenith bis zur scheinbaren Zenithdistanz $\frac{\pi}{2}-i'$ den ganzen Sternenhimmel bis zum Nadir. Zwischen den Winkeln i' und i'', also zwischen den Zenithdistanzen $\frac{\pi}{2}-i'$ und $\frac{\pi}{2}-i''$, muss ein zweites vollständiges, aber sehr schmales Bild des ganzen Sternenhimmels erscheinen, zwischen den Winkeln i'' und i''' ein drittes noch viel schmaleres, und so fort in's Unendliche. Diese unendliche Reihe von Bildern, welche ausserordentlich rasch immer schmaler werden, schliesst mit dem Winkel I im scheinbaren Horizonte ab.

Wenn man nicht bloss diejenigen Lichtstrahlen in Betracht zieht, welche von einem Punkte auf der Oberfläche des Himmelskörpers ausgehen oder,

was dasselbe ist, in einen solchen eintreffen, sondern den Beobachter in irgend einen beliebig entfernten Punkt von diesem Himmelskörper versetzt, z. B. auf irgend einen anderen Himmelskörper, so treten dieselben merkwürdigen Umstände ein. Namentlich wird auch von einem solchen Standpunkte aus die ganze Oberfläche des Himmelskörpers, die vordere und auch die hintere Hälfte, sichtbar sein, in einem ersten scheibenförmigen Hauptbilde und in einer unendlichen Reihe diese Scheibe umgebender ringförmiger Bilder. Ferner wird auch der ganze Sternenhimmel in der Atmosphäre eines solchen Himmelskörpers in unendlich vielen Bildern sichtbar sein.

8. Um nun zu untersuchen, für welche Himmelskörper die Bedingung

$$R > \frac{2\lambda(1+k)}{k}$$

erfüllt sein möge, von der diese merkwürdigen Refractionserscheinungen abhängen, hat man, wenn man die absolute brechende Kraft der dieselben umgebenden Luft der auf der Erde gleich nimmt, nur noch *eine* besondere Annahme über die Stärke der Atmosphäre zu machen. Die Stärke der Erdatmosphäre kann man dadurch messen, dass dieselbe, wenn sie die constante Dichtigkeit gleich Eins hätte, die Erde in einer Höhe von 7974 Meter umgeben würde; die Stärke der Atmosphäre eines anderen Himmelskörpers soll nun in ähnlicher Weise durch die Höhe h gemessen werden, welche die ihn umgebende Luft haben würde, wenn sie überall dieselbe Dichtigkeit gleich Eins hätte, d. h. die Dichtigkeit, welche die Luft an der Oberfläche der Erde hat.

Bezeichnet man mit R_1, k_1, λ_1 die Werthe dieser drei Grössen, welche für unsere Erde Statt haben, unter Voraussetzung einer constanten Wärme von Null Grad, so dass

$$R_1 = 6366198^m, \quad \lambda_1 = 7974^m, \quad k_1 = 0{,}000589,$$

und nimmt ausserdem die Masse der Erde gleich m_1, die Schwerkraft an der Oberfläche derselben gleich g_1, während R, λ, k, m, g die entsprechenden Grössen für einen anderen Himmelskörper bedeuten, so hat man

$$\frac{g}{g_1} = \frac{mR_1^2}{m_1 R^2}.$$

Der Druck der h Meter hohen Luftsäule von der Dichtigkeit Eins verhält sich nun zu dem Drucke der λ_1 Meter hohen Luftsäule auf der Erde, wie hg zu $\lambda_1 g_1$, also die Dichtigkeit der untersten Luftschicht auf dem anderen Himmelskörper, welche mit δ bezeichnet werden soll, verhält sich zur Dichtigkeit Eins

ebenfalls wie hg zu $\lambda_1 g_1$, man hat daher

$$\delta = \frac{hg}{\lambda_1 g_1}.$$

Weil ferner für die Luft von der Dichtigkeit Eins $n^2-1=k_1$ ist, so ist für die Luft von der Dichtigkeit δ, $n^2-1=k_1\delta$, also $k=k_1\delta$ oder

$$k = \frac{hgk_1}{\lambda_1 g_1}.$$

Die Luftsäule, welche bei der Dichtigkeit Eins die Höhe h hat, ist bei der Dichtigkeit δ von der Höhe $\frac{h}{\delta}$, es ist daher

$$\lambda = \frac{h}{\delta} = \frac{\lambda_1 g_1}{g}.$$

Die Bedingung

$$R > \frac{2\lambda(1+k)}{k}$$

giebt also

$$\frac{Rhgk_1}{\lambda_1 g_1} > \frac{2\lambda_1 g_1}{g}\left(1+\frac{hgk_1}{\lambda_1 g_1}\right),$$

oder

$$h > \frac{2\lambda_1^2 g_1^2}{Rg^2k_1 - 2\lambda_1 g_1 gk_1},$$

also wenn die durch h zu messende Stärke der Atmosphäre dieser Bedingung genügt, so treten die oben entwickelten merkwürdigen Erscheinungen der Strahlenbrechung ein.

9. Ich nehme als specielles Beispiel den Jupiter, dessen Radius ohngefähr 10,86 mal so gross ist als der Erdradius, und dessen Masse etwa 338 mal so gross ist, als die der Erde. Man hat daher für den Jupiter

$$\frac{R}{R_1} = 10{,}86, \quad \frac{m}{m_1} = 338, \quad R = 69135000,$$

folglich

$$\frac{g}{g_1} = 2{,}866, \quad \lambda = 2782, \quad k = \frac{h.0{,}001688}{7974}$$

die obige Grössenbedingung für die Stärke der Atmosphäre, welche der Jupiter haben muss, wenn diese Art der Erscheinungen auf ihm Statt haben soll, findet man demnach

$$h > 389,$$

und weil 389 etwas weniger als der zwanzigste Theil von 7974 ist, so folgt, dass es schon hinreichend sein würde, wenn die Jupitersatmosphäre auch nur den zwanzigsten Theil so stark wäre, als die Atmosphäre der Erde ist.

Macht man aber über die Stärke der Jupitersatmosphäre die Annahme, welche die billigste zu sein scheint, nämlich dass die Luftmasse des Jupiter zu der auf der Erde sich verhalte, wie die Gesammtmasse des Jupiter zu der der Erde, so hat man

$$4R^2\pi h : 4R_1^2\pi\lambda_1 = 338 : 1,$$

woraus man $h = 22852$ erhält; es wird demnach

$$k = 0{,}00484,\ \lambda = 2782.$$

Aus der Gleichung $V' = 0$ findet man alsdann den Werth des $\beta = 11394^m$ und hieraus den Werth des $I = 3^0\,48'$. Bei dieser Annahme erscheint also die Oberfläche des Jupiter als eine concave Schale, deren Rand, als scheinbarer Horizont sich um $3^0\,48'$ über den wahren Horizont erhebt.

Ich bemerke noch, dass der in dem Vorhergehenden gebrauchte Ausdruck „sichtbar“ nur im geometrischen Sinne zu nehmen ist, nämlich dass in der That unter den gemachten Voraussetzungen die Lichtstrahlen in den angegebenen Richtungen in's Auge gelangen würden. Zieht man nämlich die Schwächung oder das gänzliche Verlöschen in Betracht, welches die Lichtstrahlen in einer nicht absolut durchsichtigen Atmosphäre, wie z. B. in der unserer Erde erleiden, so wird im physiologischen und physikalischen Sinne von den angegebenen Erscheinungen nur wenig wirklich sichtbar bleiben. Von dem hauptsächlichen, ersten Bilde der Jupitersoberfläche wird alsdann nur ein gewisser Theil, der sich nach dem höheren oder geringeren Grade der Durchsichtigkeit richtet, wirklich zu unterscheiden sein, von dem zweiten, dritten und den folgenden Bildern aber sicherlich Nichts. Ebenso wird auch von dem ganzen Sternenhimmel nicht einmal das erste Bild vollständig klar zu unterscheiden sein, und selbst von der Sonne, welche vermöge der Strahlenbrechung auf dem Jupiter niemals auf- oder untergeht, weil ihr Bild niemals unter den scheinbaren Horizont herabsinken kann, wird, wenn sie zu tief unter den wirklichen Horizont zu stehen kommt, auch das erste Bild, welches alsdann zu einer sehr schmalen Ellipse abgeplattet erscheinen müsste, dem Auge kaum noch erkennbar sein. In der Nähe des scheinbaren Horizonts wird anstatt der unendlich vielen Bilder des ganzen Himmels und der ganzen Jupitersoberfläche nur ein blauer Streifen erscheinen.

Berlin, im Juli 1860.

Der *Abel*sche Satz.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle.)

In dem Aufsatze über die *Lamé*schen Functionen verschiedener Ordnungen, der sich im 60sten Bande dieses Journals findet, zeigt eine Integration durch Theile unter I, §. 4, Gleichung (ε) auf S. 266, dass das Integral

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}$$

der Gleichung

$$(1.) \qquad \sqrt{\psi(x)}\,\frac{d(J\cdot\sqrt{\psi(x)})}{dx} = \frac{\sqrt{\psi(\alpha)}}{x-\alpha} - \frac{\sqrt{\psi(\beta)}}{x-\beta} + G(x)$$

genügt. Hier bedeutet $\psi(x)$ eine willkürliche ganze Function, von der $G(x)$ durch die Gleichung

$$G(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \Big[\tfrac{1}{2}\,\frac{\psi'(x)-\psi'(z)}{x-z} - \frac{d}{dz}\cdot\Big(\frac{\psi(x)-\psi(z)}{x-z}\Big)\Big]\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

abhängt, so dass auch $G(x)$ eine ganze Function von x wird, deren Grad aber um zwei Einheiten geringer ist als der Grad von $\psi(x)$. Ferner bezeichnen α und β Constanten, und der Integrationsweg z in J kann zwischen den Grenzen α und β willkürlich genommen werden, darf aber nicht durch den Punkt x selbst führen. Die Quadratwurzel $\sqrt{\psi(z)}$ muss sich in den Integrationsgrenzen α bis β continuirlich ändern, und $\sqrt{\psi(\alpha)}$ und $\sqrt{\psi(\beta)}$ auf der rechten Seite von (1.) stellen den Anfangs- und Endwerth dieser Quadratwurzel vor.

In der erwähnten Abhandlung wurde S. 267 bemerkt, dass vermittelst dieser Formel sich der *Abel*sche Satz beweisen lässt, zunächst der speciellere, wie ihn *Jacobi* *) ausgesprochen hat; der Beweis soll an dieser Stelle mitgetheilt werden.

Es sei $\psi(z)$ eine gegebene ganze Function vom Grade $2n+1$, die durch z getheilt für $z=0$ gleich 1 werden mag; die Wurzeln der Gleichung $\psi(z)=0$ heissen r_0, r_1, etc. r_{2n}, und werden als sämmtlich verschieden vorausgesetzt. Ferner sei $\varpi(z)$ eine ganze, durch z theilbare Function $n+1^{\text{ten}}$ Grades, in welcher der Coefficient von z^{n+1} die Einheit ist, und a eine Constante. Um diese Bestimmungen besser vor Augen zu haben, kann man

*) *Crelle*, Journal f. Mathematik Bd. XXX, S. 121: Ueber die Additionstheoreme der *Abel*schen Integrale zweiter und dritter Gattung.

sich der Gleichungen bedienen:

$$\psi(z) = z(b_1 z^{2n} + b_2 z^{2n-1} + \text{etc.} + b_{2n} z + 1) = (z - r_0)(z - r_1) \dots (z - r_{2n}),$$
$$w(z) = z(z^n + c_1 z^{n-1} + \text{etc.} + c_{n-1} z + c_n).$$

Ausserdem setze man

$$(2.) \quad (w(z))^2 - a^2 \psi(z) = z f(z) = z(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_{2n+1}).$$

Es mag nun die Function w, durch continuirliche Veränderung ihrer Constanten c, sich in eine Function $W(z)$ verwandeln, welche dieselben Eigenschaften besitzt, die oben w beigelegt wurden; zu gleicher Zeit soll a in A übergehen. Endlich setze man noch

$$(3.) \quad (W(z))^2 - A^2 \psi(z) = z F(z) = z(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_{2n+1}),$$

und denke sich unter β_1, β_2, etc. diejenigen Wurzeln von $F(z) = 0$, in welche respective α_1, α_2, etc. continuirlich übergegangen sind.

Man bilde nun $2n+1$ Integrale J, die J_1, J_2, etc. heissen, indem man successive α und β zugleich Indices respective 1, 2, etc. anhängt. Der Integrationsweg z in J_1 ist zunächst der Weg, auf welchem α_1 in β_1 übergeht, *und diesen hält man als Integrationsweg z beim Beweise fest*, kann ihn aber, wenn erst das Resultat festgestellt ist, auf verschiedene Art abändern. Man muss (s. o.) annehmen, dass x nicht im Wege z liegt, weil sonst das Integral J_1 seine Bedeutung verliert. Bei Festsetzung des Zeichens von $\sqrt{\psi(z)}$ nehmen wir an, um Weitläufigkeiten im Ausdrucke zu vermeiden, dass von den Wegen, auf denen a in A und α_1 in β_1 übergeht, der erstere nicht durch Null, der zweite durch kein r führt. Indem man in üblicher Weise die Wege, wenn sie diese Punkte treffen sollten, unendlich wenig abändert, kann man das Verlangte erreichen. Der Quadratwurzel $\sqrt{\psi(z)}$ giebt man nun als Anfangswerth denjenigen, welcher der Gleichung $w(\alpha_1) = a\sqrt{\psi(\alpha_1)}$ entspricht; im weiteren Verlaufe wird dann $\sqrt{\psi(z)}$ überall bestimmt sein, trifft also, da ausserdem w, α, a continuirlich in W, β, A übergehen, mit einem solchen Werthe in β_1 ein, der $W(\beta_1) = A\sqrt{\psi(\beta_1)}$ entspricht. Aehnliches gilt auch für J_2, J_3, etc.

Bildet man für jedes J eine Gleichung wie (1.), addirt diese Gleichungen und setzt die Summe der $2n+1$ Integrale J gleich S, so erhält man

$$S = J_1 + J_2 + \text{etc.} + J_{2n+1},$$

$$(4.) \quad \sqrt{\psi(x)} \frac{d(S.\sqrt{\psi(x)})}{dx} = \sum_\alpha \frac{\sqrt{\psi(\alpha)}}{x - \alpha} - \sum_\beta \frac{\sqrt{\psi(\beta)}}{x - \beta} + H(x),$$

wo H eine Summe von Functionen wie G, also wiederum eine ganze Function von x höchstens vom $2n-1^{\text{ten}}$ Grade vorstellt, und die Summenzeichen selbstverständlich eine Summation über alle $2n+1$ Werthe respective α oder β andeuten.

Bezeichnet $\Theta(x)$ irgend eine ganze Function höchstens $2n^{\text{ten}}$ Grades, so ist nach der *Lagrange*schen Formel

$$\sum_{\alpha} \frac{\Theta(\alpha)}{(x-\alpha)f'(\alpha)} = \frac{\Theta(x)}{f(x)};$$

war $\Theta(x)$ von höherem Grade, so giebt die linke Seite nur den Rest, welcher bei Division von $\Theta(x)$ durch $f(x)$ übrig bleibt. Wir bezeichnen ihn durch $R[\Theta(x)]:f(x)$.

Da nun $a\sqrt{\psi(\alpha)}$ gleich $w(\alpha)$ war, so hat man

$$\sum_{\alpha} \frac{\sqrt{\psi(\alpha)}}{x-\alpha} = \frac{1}{a} R[w(x)f'(x)]:f(x).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich durch (2.) noch weiter transformiren; fügt man die Argumente x vorläufig den Functionen nicht hinzu, so ergiebt sich aus (2.)

$$xf' = 2ww' - a^2\psi' - f,$$

$$R[wf']:f = R\Big[\frac{2w^2w' - a^2w\psi'}{x}\Big]:f,$$

und setzt man für w^2 seinen Werth $xf + a^2\psi$

$$\frac{1}{a} R[wf']:f = aR\Big[\frac{2\psi w' - w\psi'}{x}\Big]:f.$$

Der Grad der ganzen Function, welche rechts durch f zu theilen ist, beträgt $3n$, derjenige des Divisors f aber $2n+1$; der Rest, welchen der Bruch giebt und den das Zeichen R andeutet, ist also gleich dem Bruche weniger einer ganzen Function γ vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade, und man hat

$$\sum_{\alpha} \frac{\sqrt{\psi(\alpha)}}{x-\alpha} = a\frac{2\psi w' - w\psi'}{x} - \gamma,$$

so wie einen ähnlichen Ausdruck, welcher γ_1 als ganze Function enthalten mag, für die Summe nach β in (4.). Zieht man noch H mit γ und γ_1 in eine einzige Function $K(x)$ zusammen, *so dass $K(x)$ wiederum eine ganze Function höchstens vom $2n-1^{\text{ten}}$ Grade wird*, so entsteht aus (4.)

$$(5.)\quad \frac{d(S.\sqrt{\psi(x)})}{dx} = a\cdot\frac{2\psi(x)w'(x) - w(x)\psi'(x)}{xf(x)\sqrt{\psi(x)}} - A\cdot\frac{2\psi(x)W'(x) - W(x)\psi'(x)}{xF(x)\sqrt{\psi(x)}} + \frac{K(x)}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

Das erste und zweite Glied der rechten Seite sind ebenso wie die linke Seite vollständige Differentialquotienten nach x; integrirt man nach x von $x = r_0$ an, und setzt

$$Z(x) = \int_{r_0} \frac{K(x)\,dx}{\sqrt{\psi(x)}},$$

so findet man

$$(6.)\quad S\sqrt{\psi(x)} = \log\frac{W(x)+A\sqrt{\psi(x)}}{W(x)-A\sqrt{\psi(x)}} - \log\frac{w(x)+a\sqrt{\psi(x)}}{w(x)-a\sqrt{\psi(x)}} + Z(x),$$

also den Abelschen Satz, wenn man zeigen kann, dass $Z(x)$ *verschwindet.*

Um dies zu beweisen, geht man davon aus, *dass, wie unten gezeigt werden wird,* $Z(x)$, *auf welchem Wege man auch nach* x *von* r_0 *an integrirt haben möge, für* $x = r_0, r_1,$ etc. r_{2n} *gleich Null wird.* Ist dies festgestellt, so gestaltet der Beweis sich auf folgende Art: Das Integral Z ist eine solche Function von x, welche in einem Punkte x nicht immer denselben Werth v besitzt, sondern bei Veränderung des Integrationsweges x auch den entgegengesetzten Werth $-v$ annimmt, und endlich die Werthe v und $-v$, vermehrt um positive oder negative Vielfache von den Grössen $Z(r_0)$, $Z(r_1)$, etc. $Z(r_{2n})$. Da die letzteren Ausdrücke nach der Voraussetzung sämmtlich Null sind, so ist $(Z(x))^2$ eine continuirliche einwerthige Function von x, die nur für $x = \infty$ unendlich wird, d. h. es ist eine ganze Function von x. Diese muss durch $\psi(x)$ theilbar sein, da $Z(x)$ für $x = r_0, r_1,$ etc. r_{2n} verschwindet; also hat $Z(x)$ die Form $Q\sqrt{\psi(x)}$, wo Q nur noch eine Quadratwurzel aus einer ganzen Function sein kann. Hieraus folgt

$$\frac{K(x)}{\sqrt{\psi(x)}} = \frac{K(x)\,Q}{Q\sqrt{\psi(x)}} = \frac{d(Q\sqrt{\psi(x)})}{dx},$$

$$2K(x)\,Q\,dx = d(Q\sqrt{\psi(x)})^2 = d(Q^2\psi(x));$$

also ist Q eine ganze Function von x. Soll diese vom Grade m sein, so wird $d(Q\sqrt{\psi(x)})$ jedenfalls von der Form $\frac{L\,dx}{\sqrt{\psi(x)}}$, wo L ganz und vom Grade $2n+m$ ist. Es kann L also nicht, wie es geschehen soll, mit $K(x)$ übereinstimmen, da dieses nur den Grad $2n-1$ erreicht, d. h. es ist $L = 0$, $K = 0$, folglich $Z(x) = 0$.

Um schliesslich zu zeigen, dass $Z(x)$ *wirklich für* $x = r_0, r_1,$ *etc.* r_{2n} *verschwindet, wie so eben vorausgesetzt war,* heben wir folgende Punkte hervor:

a) Ein bestimmtes Integral kann bekanntlich noch eine Bedeutung behalten, wenn auch die zu integrirende Function, die $\vartheta(x)$ heissen mag, an einer Stelle ξ des Integrationsweges x discontinuirlich wird. Stellt ab den Integrationsweg x vor, also ξ einen Punkt dieses Weges, und sind $\xi-\varepsilon$ und $\xi+\eta$ zwei Punkte des Weges ab, die ξ sehr nahe liegen, der eine zur Linken von ξ, nach a zu, der andere zur Rechten, zwischen ξ und b, so ist nämlich das Integral von $\vartheta(x)dx$, von a bis b über ab integrirt, gleich der Grenze von der Summe der beiden Integrale von a bis $\xi-\varepsilon$ und von $\xi+\eta$

bis b, die Grenze für verschwindende ε und η genommen. Existiren solche Grenzen, so hat das Integral von a bis b über ab noch einen Werth. Solche Grenzen werden wir abgekürzt als Integrale von a bis $\xi-0$, oder von $\xi+0$ bis b bezeichnen.

b) Sind für alle Werthe, die x auf dem Wege ab annimmt, zwei Functionen $\vartheta(x)$ und $\varphi(x)$ continuirlich und gleich, so wird

$$\int_a^b \vartheta(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx;$$

findet an dem Endpunkte b die Gleichheit $\vartheta(x)=\varphi(x)$ nicht mehr statt, was geschehen kann wenn diese Functionen dort unstätig werden, so findet doch die obige Integralgleichung statt, vorausgesetzt dass die Integrale einen Werth behalten, da sie dann Integrale von a bis $b-0$ werden. Dasselbe gilt, wenn ϑ und φ am Anfangspunkte a ungleich werden, folglich auch, nach (a), wenn in einem mittleren Punkte ξ die Ungleichheit eintritt: immer noch werden die obigen Integrale übereinstimmen, wenn sie überhaupt einen Werth besitzen.

Auf (5.) angewandt zeigen diese Bemerkungen, dass die Integrale der beiden Seiten dieser Gleichung, auf einem beliebigen Wege ab nach x genommen, mag auch der Weg x durch die Curven z führen, wenn die Integrale überhaupt existiren, auch gleich sind, obgleich das Bestehen von (5.) ursprünglich voraussetzte, es liege x nicht in gewissen Curven, den Integrationswegen z.

c) Ist $\Theta(x)$ irgend ein einwerthiges Integral von $\vartheta(x)dx$, welches auf dem Wege ab stetig bleibt, und höchstens in dem Punkte ξ dieses Weges (für andere Wege ab können gleichfalls Punkte wie ξ existiren) keinen bestimmten Werth besitzt, so wird das Integral von $\vartheta(x)dx$, über diesen Werth ab genommen, gleich $\Theta(b)-\Theta(a)-(\Theta(\xi+0)-\Theta(\xi-0))$.

Stellt $\vartheta(x)$ die linke Seite von (5.) vor, so besitzen wir in $S.\sqrt{\psi(x)}$ ein solches Integral $\Theta(x)$, wenn zunächst solche Wege x ausgeschlossen werden, die einzeln oder von denen mehrere zusammengenommen einen oder mehrere Punkte r umkreisen; das Zeichen von $\sqrt{\psi(x)}$ ist dann ein vollständig bestimmtes, sobald es, wie wir immer annehmen, für $x=r_0$, d. h. für ein x, welches r_0 unendlich nahe liegt, gegeben war. Zerlegt man nämlich S wieder in seine Bestandtheile J, so sieht man, dass $S.\sqrt{\psi(x)}$ sich mit x continuirlich ändert, so lange x nicht einen Weg z durchschneidet, wie nahe auch x dem Wege z liegt. Beim Durchschneiden eines Weges z ändert sich aber $S.\sqrt{\psi(x)}$ plötzlich um $\pm 2\pi i$, welcher Werth in obiger Formel dem Ausdrucke $\Theta(\xi+0)-\Theta(\xi-0)$ entsprechen würde. In der That ergiebt die für solche

Untersuchungen übliche Behandlung des Integrales

$$\int \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}},$$

dass es, über einen kleinen Kreis mit dem Mittelpunkte x integrirt, $\pm\frac{2\pi i}{\sqrt{\psi(x)}}$ wird. Diesen Weg z, den kleinen Kreis, kann man aber, ohne den Werth des Integrales zu ändern, so auseinander ziehen, dass er ein schmaler länglicher Streifen wird, der den Punkt x noch immer umschliesst, und dass man, die Begrenzung des Streifens durchlaufend, den Punkt x einmal unendlich nahe zur Rechten, das andere Mal zur Linken hat. Das Integral zwischen zwei beliebigen Punkten der Contour dieses Streifens genommen, das eine Mal, indem der Integrationsweg zur Rechten des Punktes x ihm unendlich nahe vorbeigeht, das andere Mal, indem der Weg, dem ersten unendlich nahe, zur Linken des Punktes x ihm unendlich nahe vorbeigeht, giebt also Werthe, die sich um $\pm\frac{2\pi i}{\sqrt{\psi(x)}}$ unterscheiden.

Es wird also der Werth des Integrales der linken Seite von (5.) auf dem Wege ab, dessen Anfangspunkt a der Punkt r_0, dessen Endpunkt b der Punkt x ist, wenn ein Punkt ξ auf ab nicht existirt, wenn also ab einen Integrationsweg z nicht schneidet, $S\sqrt{\psi(x)}$, wenn ab ihn einmal schneidet, $S\sqrt{\psi(x)}\pm 2\pi i$. Allgemein, wenn ab die Integrationswege z mehrfach schneidet, so wird das Integral der linken Seite von (5.) gleich $S\sqrt{\psi(x)}$ vermehrt um ganze Vielfache von $\pm 2\pi i$, deren Anzahl sich auch sofort nach dem Obigen angeben lässt, sobald man den Weg x kennt. Darf der Weg x die Punkte r umkreisen, so wird, je nach der Anzahl der Umkreisungen, $\sqrt{\psi(x)}$ das eine oder andere Zeichen zu geben sein.

b) Der Ausdruck auf der Rechten in (5.) zerfällt in zwei Theile. Der eine, K enthaltende, giebt das endliche Integral $Z(x)$, dieses auf dem Wege ab von $a=r_0$ bis $b=x$ genommen.

c) Setzt man

$$P = \frac{W(x)+A\sqrt{\psi(x)}}{w(x)-a\sqrt{\psi(x)}}\cdot\frac{w(x)-a\sqrt{\psi(x)}}{W(x)+A\sqrt{\psi(x)}},$$

so ist der andere Theil der rechten Seite von (5.) gleich

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}.$$

Heisst das Integral nach x, auf einem willkürlichen Wege von $x=r_0$ an genommen, $\log P$, so ist es, auf einem anderen Wege genommen, $\log P$ vermehrt um ganze Vielfache von $\pm 2\pi i$.

f) Da für $x = r_0$, r_1, etc. r_{2n} sowohl $S\sqrt{\psi(x)}$ verschwindet, als auch $\log P$ gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ oder Null wird, so ist $Z(r_0)$, $Z(r_1)$, etc. $Z(r_{2n})$ entweder Null, wie behauptet war, oder ein ganzes Vielfache von $\pm 2\pi i$, also dann wenigstens $\pm 2\pi i$. Dies ist aber unmöglich. Sind nämlich die Integrationswege z klein, so werden auch, wenn man

$$K(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_{2n-1} x^{2n-1}$$

setzt, die Constanten g sehr klein sein müssen. Da bei Integration auf einem beliebigen Wege x, immer

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{\psi(x)}}$$

endlich bleibt, so wird daher $Z(x)$ klein bleiben müssen, folglich nicht $2\pi i$ sein können.

Sind aber die Integrationswege z nicht hinlänglich klein, so kann man sie theilen, indem man zwischen die α und β ähnliche Grenzen in beliebiger Anzahl einschiebt. Für jedes so entstehende Z weist man wie oben nach, dass es verschwindet; es verschwindet also auch die Summe der Z, *und man findet den Abelschen Satz*

$$S.\sqrt{\psi(x)} = \log P.$$

Die Bedeutung des $\log P$ ist aus dem Vorhergehenden klar. Da nämlich K in (5.) verschwindet, so wird (nach c) durch Integration nach x auf irgend einem Wege x, welcher keinen Weg z durchschneidet, genau $S\sqrt{\psi(x)}$ erhalten, also immer derselbe Werth, und noch dazu mit demselben Zeichen, wenn man jedesmal den Weg x gleich oft Punkte r umkreisen lässt. Andererseits ist $\log P$ jedes Mal $= \int \frac{dP}{P}$, das Integral über denselben Weg x genommen, den man bei Integration der linken Seite wählte. Es ist also

$$\log P = \int \frac{dP}{P}$$

der Werth, welchen man findet, wenn man auf irgend einem Wege x integrirt, der keinen Weg z schneidet, und auf dem $\sqrt{\psi(x)}$ dasselbe Endzeichen erreicht, welches diese Grösse auf der linken Seite, in $S\sqrt{\psi(x)}$ hat; welchen von diesen unendlich vielen Wegen man auch wählt, immer findet man denselben Werth für den Logarithmus.

Halle, im Juni 1862.

Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekular-physikalischen Fernewirkungen und der Bewegung der Elektricität in Leitern.

(Von Herrn *G. Roch* *).)

Einleitung.

Eine Function w der complexen Variabeln $z = x + yi$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} = 0.$$

Aehnlich ist die Gleichung für das Potential von Massen, die alle ausserhalb des Raumes liegen, in welchem das Potential untersucht wird:

$$\triangle P = \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} + \frac{d^2P}{dz^2} = 0.$$

Ist in einem Punkte dieses Raumes P unendlich wie die reciproke Entfernung von demselben, so entspricht das Potential ausser äusseren Massen noch einer in diesem Punkte angehäuften Masseneinheit. Die Function w von $x+yi$ vermag durch solche Punkte, in denen sie, wie man sagt, von der ersten Ordnung unendlich wird, bestimmt zu werden. Bei der Function P aber bleibt man nicht hierbei stehen, sondern man nimmt an, dass innerhalb des betrachteten Raumes auch stetig vertheilte Massen vorhanden, dass sie nicht in einzelnen Punkten angehäuft sind. Dann ist $\triangle P$ von Null verschieden und der bekannte Satz, dass eine Function von der Art w innerhalb einer geschlossenen Curve bestimmt ist, wenn man weiss, welchen Werth sie in der Begrenzung hat und wie sie im Inneren unendlich wird, erweitert sich zum *Green*schen Satze, dass P durch seine Oberflächenwerthe und sein $\triangle$ im Inneren bestimmt ist. In Wirklichkeit ging man von diesem Satze aus, um den ersteren für die Functionen einer complexen Variabeln zu beweisen. Doch hat man vom *Green*schen Satze noch nicht die Anwendungen gemacht für die Theorie von Functionen des Ortes im Raume, wie von seiner specielleren Folgerung in der

---

*) Diese bereits als Inaugural Dissertation in Göttingen gedruckte Arbeit erscheint hier mit einigen Abänderungen von der Hand des Herrn Verfassers.

angegebenen Form. Es ist deshalb diese Entwickelung umgedreht worden, um die Aehnlichkeit der Sätze noch recht deutlich hervorzuheben.

Erwähnt kann noch werden, dass man $\triangle P$ wieder ebenso wie P bestimmen kann; und es enthält §. 10 das für unsere Entwickelungen Nöthige, wenn man die $\triangle$ wieder als Potentialfunctionen betrachtet.

I.

Ueber den allgemeinen Zusammenhang von Bewegungen.

§. 1.

Für Functionen einer Veränderlichen ist es gelungen, mehrere Systeme von einander unabhängiger Grössen anzugeben, die zu ihrer Bestimmung nothwendig und hinreichend sind; es ist hiermit die Angabe der Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemeint. In der Einleitung ist schon auseinandergesetzt, welche Aehnlichkeit diese Bestimmungsweise mit der Darstellung einer Function dreier Variabeln durch Potentialausdrücke hat, und es muss daher nahe liegen, von diesen Ausdrücken auszugehen, wenn man untersuchen will, welchen greifbaren Einfluss die Voraussetzung der Stetigkeit auf den Verlauf einer Function innerhalb eines geschlossenen Raumes ausübt. Dass ein solcher Einfluss wirklich existirt, kann man mit Sicherheit erwarten; für Functionen einer Variabeln ist er leicht plausibel zu machen. Man habe auf einer Strecke der Axe entsprechend eine stetig verlaufende Curve gezeichnet; erhebt man dann den einen Punkt der Curve um ein endliches Stück, so muss dasselbe mit allen Nachbarpunkten, bis zu einer endlichen Entfernung beiderseits geschehen, damit die Curve keine Unterbrechung erhält.

Vermag man dies für Functionen dreier Variabeln in Formeln darzustellen, so muss dies in vielen Fällen zu interessanten Folgerungen Anlass geben. Sollen z. B. Schall- oder Lichterscheinungen in einem Raume stetig vor sich gehen, so würden vermöge der Bewegung von Schall und Licht die einzelnen Punkte im Raume nach gewissen Zeiten sich ihre Bewegungen mittheilen, ausserdem aber müssten nach den Gesetzen der Stetigkeit gleichzeitige Einwirkungen der Zustände entfernter Punkte auf einander stattfinden, die von den partiellen Differentialgleichungen der Bewegung ganz unabhängig sind, und den Anschein von Fernewirkungen zwischen den Molekülen haben.

§. 2.

Die Analyse bietet uns mehrere Formeln, eine Function, für deren Verlauf weiter keine Regeln als einige Stetigkeitsbedingungen gegeben sind, so darzustellen, dass daraus der Einfluss verschiedener Punkte auf einander erhellt. Wir gehen für die jetzigen Entwickelungen von der Formel für die Potentialfunction aus:

$$-4\pi m = \left\{\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right\}\iiint \frac{m'\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},$$

wenn m' der Werth von m in x', y', z' ist.

Nach dem *Green*schen Satze ist eine Function V der drei Coordinaten in einem geschlossenen Raume eindeutig bestimmt, wenn man ihren Werth an der Oberfläche und den Werth von

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2} = \triangle V$$

im ganzen Inneren kennt, und ebenso ist natürlich, wenn V gegeben ist, ihr $\triangle$ vollständig bestimmt. Man kann diese Functionen daher als eindeutig von einander abhängig bezeichnen, so dass einem bestimmten Verlaufe von $\triangle V$ ein ganz bestimmter von V entspricht, wenn die Oberflächenbedingung hinzukommt und umgekehrt.

Wir benutzen diesen Satz in der durch

$$(1.)\qquad 4\pi V = -\iiint \frac{1}{r}\triangle V'\,dx'\,dy'\,dz' + \iint\left(V'\frac{d\frac{1}{r}}{dp}-\frac{1}{r}\frac{dV'}{dp}\right)d\sigma$$

ausgedrückten Form, wo r die Entfernung von x, y, z und x', y', z', wo p die Normale in einem Punkte der Grenzfläche des Raumes, über welchen die dreifachen Integrale ausgedehnt sind, $d\sigma$ das Oberflächenelement und V' den Werth von V in x', y', z' bedeutet. Schreibt man:

$$V'\frac{d\frac{1}{r}}{dp} = \frac{V'}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{+\varepsilon}}-\frac{1}{r_{-\varepsilon}}\right),$$

wo ε eine sehr kleine auf der Normale von ds beiderseits aufgetragene Strecke bedeutet, so sieht man, dass das Doppelintegral in (1.) eine Potentialfunction zweier oberflächigen Massenvertheilungen darstellt: einer einfachen, von der Dichte $-\frac{dV'}{dp}$ und einer Doppelschicht mit den Dichten: $+\frac{V'}{2\varepsilon}$ und $-\frac{V'}{2\varepsilon}$ in der Entfernung 2ε von einander. Zugleich folgt aus den früheren Bemerkungen, dass jede Function die den Stetigkeitsbedingungen des Potentials genügt, auch durch einen Ausdruck wie (1.) dargestellt werden kann. Die zu

V gehörige Massenvertheilung wäre $-\frac{1}{4\pi}\triangle V$. Den von oberflächigen Massenvertheilungen herrührenden Theil wollen wir kürzer als von Oberflächenintegralen herrührend bezeichnen.

Wir wollen jetzt diese Darstellungsweise behufs einer symmetrischen Darstellung eines Systems u, v, w von Functionen der drei Variabeln x, y, z noch etwas modificiren, wodurch gewisse in den Oberflächenintegralen steckende Theile mit herübergezogen werden in den von inneren Massen herrührenden.

§. 3.

Es ist schon mehrfach bekannt (vergl. *Stokes*, theory of diffraction, Cambridge transactions Vol. IX, *Helmholtz* im 55sten, *Clebsch* im 56sten Bande, pag. 1 dieses Journals), dass ein System u, v, w stets in zwei zerlegbar ist, von denen das erste $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ durch eine einzige Function ersetzt werden kann, deren partielle Differentialquotienten nach x, y, z die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sind. Das zweite System ist einer solchen Schreibweise nicht fähig und es handelt sich zunächst darum, eine andere einfache, für alle Fälle ausreichende Form für dasselbe zu finden. Diese Zerlegung wird auch bis auf Theile, die gewissermassen in beiden Formen darstellbar sind, eindeutig sein. Es sei:

$$(1.)\qquad u=\mathfrak{u}+\mathfrak{u},\quad v=\mathfrak{v}+\mathfrak{v},\quad w=\mathfrak{w}+\mathfrak{w}.$$

und

$$(2.)\qquad -4\pi\mathfrak{u}=\frac{dP}{dx},\quad -4\pi\mathfrak{v}=\frac{dP}{dy},\quad -4\pi\mathfrak{w}=\frac{dP}{dz}.$$

Dann folgt aus den letzten Gleichungen:

$$-4\pi\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dx}+\frac{d\mathfrak{v}}{dy}+\frac{d\mathfrak{w}}{dz}\right)=-4\pi\Theta=\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2P}{dy^2}+\frac{d^2P}{dz^2}.$$

Betrachtet man $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ als Componenten der Geschwindigkeit etwa eines in x, y, z befindlichen Atomes, so ist bekanntlich $-\Theta$ die im System bewegter Atome hervorgebrachte Verdichtung, und es gewinnt so die Differentialgleichung zur Bestimmung von P: $\triangle P=-4\pi\Theta$ eine anschauliche Bedeutung. P' und Θ' seien wieder die Werthe von P und Θ in x', y', z', so liefert diese Gleichung nach §. 2:

$$(3.)\qquad P=\iiint\frac{\Theta'}{r}\,dx'\,dy'\,dz',\quad r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Hierbei sind die Oberflächenintegrale nicht mit berücksichtigt, die in (1.) §. 2 vorkommen. Es wird sich dies später aus der Bemerkung rechtfertigen, dass dieser Theil von P Theile von u, v, w liefern würde, die sich auch in der Form schreiben liessen, wie $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, zu deren Betrachtung wir nun übergehen.

Betrachten wir die u, v, w als Geschwindigkeitscomponenten eines Atomensystems, so sind durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Theile der u, v, w gegeben, welche eine Verdichtung der aus den Atomen bestehenden Materie hervorbringen. Für die noch übrigen Theile ist daher die Verdichtung gleich Null, es ist:

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dy}+\frac{d\mathfrak{v}}{dy}+\frac{d\mathfrak{w}}{dz}=0.$$

Wir schreiben die u, v, w deshalb in der Form:

$$(4.)\quad -4\pi\mathfrak{u}=\frac{dF_2}{dz}-\frac{dF_3}{dy},\quad -4\pi\mathfrak{v}=\frac{dF_3}{dx}-\frac{dF_2}{dz},\quad -4\pi\mathfrak{w}=\frac{dF_1}{dy}-\frac{dF_2}{dx};$$

diese Gleichungen sind nicht unabhängig von einander, so dass zur Bestimmung der F noch eine Gleichung hinzugefügt werden darf. Wir wählen:

$$\frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_2}{dy}+\frac{dF_3}{dz}=0.$$

In Folge dieser Bedingung ist es möglich, aus (4.) für die F ähnliche Gleichungen, wie für P geschehen ist, zu entwickeln. In der That findet man, wenn

$$(5.)\quad m_1=-\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right),\quad m_2=-\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right),\quad m_3=-\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)$$

gesetzt wird:

$$\triangle F_1=-4\pi m_1,\quad \triangle F_2=-4\pi m_2,\quad \triangle F_3=-4\pi m_3,$$

wodurch sich für die F ähnliche Ausdrücke wie für P in (3.) ergeben. Die in diesen Potentialen vorkommenden Massen haben eine sehr wichtige Eigenthümlichkeit, die darin besteht, dass die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zu Ausdrücken wie m_1, m_2, m_3 in (5.) vereinigt, diese gleich Null machen, da offenbar $\frac{d\mathfrak{v}}{dz}=\frac{d\mathfrak{w}}{dy}$, etc.; ebenso umgekehrt, dass die u, v, w zu einem Ausdruck von der Form $\Theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$ vereinigt, dies gleich Null machen, so dass in diese Massen m und Θ überall u, v, w anstatt $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ oder u, v, w eingeführt werden dürfen, mithin, um die m und Θ zu berechnen, nicht erst die Zerfällung der u, v, w ausgeführt werden muss. Wir schreiben demnach:

$$(6.)\quad \Theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz},$$

$$(7.)\quad m_1=-\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right),\quad m_2=-\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right),\quad m_3=-\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right).$$

Hiernach wäre z. B. u:

$$(8.)\quad -4\pi u=\frac{d}{dx}\iiint\frac{\Theta'}{r}\,dx'dy'dz'+\frac{d}{dz}\iiint\frac{m_2'}{r}\,dx'dy'dz'-\frac{d}{dy}\iiint\frac{m_3'}{r}\,dx'dy'dz',$$

wobei auf die Oberflächenintegrale, welche den dreifachen noch angehängt werden müssten, keine Rücksicht genommen ist. Mit diesen müssen wir uns zunächst beschäftigen. Denken wir uns an P ein Oberflächenintegral p angehängt, so verändern sich $-4\pi u$, $-4\pi v$, $-4\pi w$ um $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$, welche Theile wir mit α, β, γ, bezeichnen. Da p ein Oberflächenpotential, so ist $\triangle p = 0$, d. h. $\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dy}=0$, mithin könnten α, β, γ auch in der Form (4.) geschrieben werden. Ebenso würden wir umgekehrt finden, wenn zu den F Oberflächenpotentiale hinzugefügt würden, dass dann die u, v, w um Theile sich änderten, die auch in der Form (2.) d. §. geschrieben werden könnten. Durch die bis jetzt ausgeführte Zerlegung erhalten wir also die Theile der u, v, w, welche nur in der einen der beiden Schreibweisen (2.) oder (4.) geschrieben werden können. Es bleiben dann noch Theile α, β, γ übrig, für die

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

$$\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx} = 0, \text{ etc.}$$

ist; dadurch wird $u = \mathfrak{u}+\mathfrak{u}+\alpha$, $v = \mathfrak{v}+\mathfrak{v}+\beta$, $w = \mathfrak{w}+\mathfrak{w}+\gamma$, und nach den eben entwickelten Bemerkungen kann man auch diese vollständigen Werthe u, v, w in (6.) und (7.) zur Berechnung der Θ und m einsetzen. Man kann sich auch zuletzt noch direct durch Benutzung der für u, v, w entwickelten Ausdrücke überzeugen, dass dieselben in der That die u, v, w bis auf Theile α, β, γ von den angegebenen Eigenschaften darstellen. Dazu bezeichne man die durch (8.) und ähnlich in Bezug auf v und w gebaute Ausdrücke gegebenen Werthe u, v, w durch u_1, v_1, w_1, so dass

$$-4\pi u_1 = \frac{dP}{dx}+\frac{dF_2}{dz}-\frac{dF_3}{dy}, \text{ etc.}$$

dann giebt die Ausführung der Differentiationen:

$$\frac{d(u-u_1)}{dx}+\frac{d(v-v_1)}{dy}+\frac{d(w-w_1)}{dz} = 0,$$

$$\frac{d(u-u_1)}{dy}-\frac{d(v-v_1)}{dx} = 0, \text{ etc.}$$

§. 4.

Wir werden nun den m_1, m_2, m_3 eine geometrische Bedeutung geben, indem wir wieder die u, v, w als Geschwindigkeitscomponenten auffassen.

Diese Deutung ist, wenn das bewegte System von Atomen ein fester Körper ist, sehr leicht. Die Bewegung eines festen Körpers lässt sich immer durch eine fortschreitende und eine drehende Bewegung um *eine* Achse darstellen, so dass die Componenten der Geschwindigkeit eines Theilchens in der Form geschrieben werden können:

$$(1.)\qquad \begin{cases} u = a - c_3 y + c_2 z, \\ v = b - c_1 z + c_3 x, \\ w = c - c_2 x + c_1 y; \end{cases}$$

a, b, c sind die Componenten der fortschreitenden, c_1, c_2, c_3 die Componenten der Winkelgeschwindigkeit der zweiten Bewegung. Ersetzt man x, y, z durch $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$, so würde die Drehung um eine andere Achse aber mit denselben Geschwindigkeitscomponenten erfolgen; es lassen sich dann immer a', b', c' so bestimmen, dass:

$$a' + c_3\beta - c_2\gamma = a, \quad b' + c_1\gamma - c_3\alpha = b, \quad c' + c_2\alpha - c_1\beta = c,$$

so dass also die Achse jede Lage annehmen kann (nur immer sich parallel); immer aber werden die Drehungsgeschwindigkeiten dieselben bleiben. Aus (1.) folgt:

$$(2.)\qquad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right), \\ c_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right), \\ c_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right). \end{cases}$$

Man kann, um die Bewegungszustände eines beliebigen Systems von Molekülen zu untersuchen, jedes einzelne derselben als fest annehmen, und es würden dann die eben entwickelten Formeln ihren Werth behalten. Es ist aber genauer, eine Ausbreitbarkeit in den kleinsten Theilchen anzunehmen, und es kann dann bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung die Bewegung eines solchen Theilchens erklärt werden durch eine der Bewegung eines festen Körpers ähnliche neben einer radialen Ausbreitung, deren Richtungen für die verschiedensten Begränzungstheile sich in einem Punkte treffen. Für diese Bewegung gelten dann ganz die Formeln (2.), wie jetzt nachgewiesen werden soll. Dieser Beweis ist der von der Göttinger philosophischen Fakultät gekrönten Abhandlung meines verehrten Freundes Dr. *Hankel* über die Bewegung der Flüssigkeiten entnommen (Göttingen 1861.).

Betrachten wir das Integral

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

ausgedehnt über eine geschlossene Curve und suchen dasselbe auf die Form eines Doppelintegrales zu bringen, welches über eine durch diese Curve begränzte Fläche ausgedehnt werden soll. In dieser Fläche ist z von x und y abhängig und man kann daher die Transformationsformel:

$$\text{(a.)} \qquad \int (\xi\,dx + \eta\,dy) = \pm \iint \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dy}\right) dx\,dy$$

benutzen, wenn man dem obigen Integrale die Form giebt:

$$\int \left(\left(u + \frac{dz}{dx}w\right)dx + \left(v + \frac{dz}{dy}w\right)dy\right).$$

Die von uns benutzte Formel (a.) ist ohne Weiteres evident; es erklärt sich das doppelte Vorzeichen dadurch, dass man das Integral linker Hand nach zwei entgegengesetzten Richtungen um die Begränzung herum nehmen kann. Das untere Zeichen gilt, wenn man so herum geht, wie die positive x Achse gedreht werden muss, um am kürzesten auf die positive y Axe zu kommen. Unser Integral geht so aus seiner zweiten Form über in:

$$\pm \iint \left\{\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right)\frac{dz}{dy}\right\} dx\,dy.$$

Dies gewinnt eine einfachere Form durch Einführung der Winkel λ, μ, ν, welche die Normale zum Flächenelement $d\sigma$ mit den Achsen bildet; diese Winkel haben auch um 180^0 verschiedene Werthe je nach der Richtung der Normale, die als positiv bezeichnet wird, so dass die Angabe der Richtung, in der das einfache Integral $\int (u dx + v dy + w dz)$ genommen wird, nicht mehr genügt, das Vorzeichen der folgenden neuen Integralform zu bestimmen:

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$
$$= \pm \int \left\{\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)\cos\lambda + \left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right)\cos\mu + \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)\cos\nu\right\} d\sigma.$$

Im Hinblick auf die Gleichungen (2.) dieses §. ersetze man $\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)$, etc. durch $2C\cos\lambda'$, $2C\cos\mu'$, $2C\cos\nu'$, ferner sei θ der Winkel zwischen den Richtungen λ, μ, ν und λ', μ', ν', so ist

$$\int (u dx + v dy + w dz) = \pm 2 \iint C.\cos\theta.\,d\sigma.$$

Ebenso sei $u^2+v^2+w^2=U^2$ und U durch u, v, w als Projectionen der Richtung nach bestimmt; ferner ds das Umfangselement und θ' der Winkel zwischen U und ds; dann erhalten wir die symmetrische Gleichung:

$$\int U.\cos\theta'.ds = \pm 2\iint C.\cos\theta.d\sigma.$$

Als Fläche über welche integrirt wird, nehmen wir jetzt einen unendlich kleinen Kreis vom Radius r; dann sind C, $\cos\theta$ constant innerhalb der Grenzen und das Doppelintegral liefert $\pm 2C.\cos\theta.r^2\pi$.

$U\cos\theta'$ ist die Componente der Peripheriegeschwindigkeit nach der Richtung der Peripherie. Diese totale Geschwindigkeit nun besteht nach den früheren Bemerkungen aus drei Theilen: Zunächst einer fortschreitenden Bewegung des Ganzen; diese fällt im Integral weg, da die Componente davon, welche in Rechnung kommt, für diametral gegenüberstehende Punkte entgegengesetzt ist. Die radiale Bewegung liefert gar keine Componente, und es bleibt die Drehung um den Mittelpunkt, welche die Winkelgeschwindigkeit d haben möge. Der Werth des Integrals wird so: $2r^2\pi d$ und es entsteht:

$$2r^2\pi d = \pm 2r^2\pi C.\cos\theta,$$
$$d = \pm C.\cos\theta.$$

Nimmt man das Theilchen erst senkrecht zur x-, dann zur y-, dann zur z-Achse, so wird $C.\cos\theta$ successive die Winkelgeschwindigkeitscomponente nach den x, y, z; θ wird der Reihe nach identisch mit λ', μ', ν' und man ersieht, dass auch für diese Bewegung die Formeln (2.) ihre Gültigkeit behalten. Die Vorzeichen können dann, je nach der als positiv bezeichneten Richtung, immer leicht bestimmt werden. Die Drehung von rechts nach links als positiv genommen, gelten die dortigen Zeichen und die m in §. 3 werden:

$$m_1 = 2c_1, \quad m_2 = 2c_2, \quad m_3 = 2c_3.$$

Unsere Formeln für die Zerlegung der u, v, w sind dann die folgenden:

$$(3.)\begin{cases} -4\pi u = \frac{d}{dx}\iiint\frac{\Theta'}{r}dx'dy'dz' + \frac{d}{dz}2\iiint\frac{c_2'}{r}dx'dy'dz' - \frac{d}{dy}2\iiint\frac{c_3'}{r}dx'dy'dz', \\ -4\pi v = \frac{d}{dy}\iiint\frac{\Theta'}{r}dx'dy'dz' + \frac{d}{dx}2\iiint\frac{c_3'}{r}dx'dy'dz' - \frac{d}{dz}2\iiint\frac{c_1'}{r}dx'dy'dz', \\ -4\pi w = \frac{d}{dz}\iiint\frac{\Theta'}{r}dx'dy'dz' + \frac{d}{dy}2\iiint\frac{c_1'}{r}dx'dy'dz' - \frac{d}{dx}2\iiint\frac{c_2'}{r}dx'dy'dz'. \end{cases}$$

Bezüglich der hierin vorkommenden Rotationsgeschwindigkeiten gilt wieder dasselbe, wie für die Bewegung fester Körper angegeben wurde, dass nämlich eine parallele Verschiebung der Drehungsachse ohne Einfluss ist. Nur wird hier das System von Punkten, dessen Bewegung um eine und dieselbe Drehungs-

achse stattfinden soll, immer nur ein unendlich kleines Volumen haben, und es würde unnatürlich sein, die Achse aus demselben ganz herauszulegen.

§. 5.

Wir ersehen aus den vorangegangenen Entwickelungen, dass sich jeder Bewegungszustand im Inneren irgend welcher Körper in zwei zerlegen lässt, von denen der eine zu Verdichtungen Veranlassung giebt, der andere nicht. Es fällt diese Zertheilung mit der in longitudinale und transversale Wellenbewegung zusammen. Das Charakteristische der ersteren besteht darin, dass man immer zu Theilchen gleicher Geschwindigkeit kommt, wenn man senkrecht zur Bewegungsrichtung vorwärts geht, dass dagegen die in der Bewegungsrichtung liegenden Theilchen langsamer oder schneller gehen, als das zuerst betrachtete. Bei der transversalen Bewegung haben die in der Bewegungsrichtung liegenden Theile gleiche, dagegen die in senkrecht dazu gezogenen Linien liegenden verschiedene Geschwindigkeit. Diese letztere Bewegung also kann durch fortschreitende und drehende Bewegung erklärt werden, und man kommt daher zur Betrachtung von Rotationen bei jeder transversalen Bewegung. Es wäre deshalb wohl möglich, dass die Betrachtung der Wirbelfäden für die Optik von Interesse wäre, während man auch umgekehrt die Wirbelfäden zu vermeiden und durch transversale Wellenbewegung zu ersetzen im Stande wäre. Dies ist zugleich die naturgemässeste Deutung der Wirbellinien, deren Vorhandensein durchaus keine Wirbelbewegung im gewöhnlichen Sinne des Wortes verlangt.

Die Formeln (3.) des vorigen §. enthalten zugleich den Zusammenhang, der stets zwischen entfernten Punkten gleichzeitig besteht, wenn zwischen ihnen stetige Uebergänge liegen, und welcher unabhängig von jeder Gleichung für die Bewegung der Materie vorhanden ist.

Es habe ein Theilchen in x', y', z' eine Bewegung von der Art $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, so dass eine Volumenänderung Θ' eintritt. Dann indicirt dies gleichzeitig im Punkte x, y, z eine Bewegung u, v, w von der Grösse:

$$(1.)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\Theta'}{r^3}(x'-x)\,dx'\,dy'\,dz', \\ v = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\Theta'}{r^3}(y'-y)\,dx'\,dy'\,dz', \\ w = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\Theta'}{r^3}(z'-z)\,dx'\,dy'\,dz'; \end{cases}$$

eine der allgemeinen Gravitation analoge Wirkungsweise; wie man sieht, ist dies System der u, v, w wieder von der Art, dass ihm Verdichtungen zukommen. Soll $u=v=w=0$ sein, so muss die Summe aller dieser Wirkungen der umliegenden Punkte Null sein, oder auch, das Integral über jede Linie, die in der Bewegungsrichtung gezogen wird, und welche durch x, y, z geht, muss Null sein. Denn man kann sich immer in dieser Linie eine Bewegung denken, während die anderen Theile sämmtlich in Ruhe sind. Ist ds' das Element dieser Linie, so wäre immer

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Theta'}{r^3}(x'-x)\,ds' = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Theta'}{r^3}(y'-y)\,ds' = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Theta'}{r^3}(z'-z)\,ds'$$

gleich Null, wenn $u=v=w=0$.

Für die transversale Bewegung ist die Einwirkung entfernter Punkte complicirter. Finden in x', y', z' Rotationen mit den Geschwindigkeiten c_1', c_2', c_3' statt, so bringt dies in x, y, z gleichzeitige u, v, w hervor:

$$(2.)\quad\begin{cases} u = -\dfrac{1}{2\pi}\left(c_2'(z'-z)-c_3'(y'-y)\right)\dfrac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}, \\ v = -\dfrac{1}{2\pi}\left(c_3'(x'-x)-c_1'(z'-z)\right)\dfrac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}, \\ w = -\dfrac{1}{2\pi}\left(c_1'(y'-y)-c_2'(x'-x)\right)\dfrac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}, \end{cases}$$

welches wieder ein System transversaler Bewegung darstellt. Diese Wirkung hat eine grosse Analogie mit der Wirkung geschlossener elektrischer Elementarströme auf entfernte magnetische Moleküle.

Aus (2.) folgt:

$$uc_1'+vc_2'+wc_3'=0,\quad u(x'-x)+v(y'-y)+w(z'-z)=0.$$

$$U^2=u^2+v^2+w^2=\left(\frac{dx'\,dy'\,dz'}{2\pi r^2}\right)^2 C'^2\left\{1-\left(\frac{c_1'}{C'}\,\frac{x'-x}{r}+\frac{c_2'}{C'}\,\frac{y'-y}{r}+\frac{c_3'}{C'}\,\frac{z'-z}{r}\right)^2\right\}$$

$$U=\pm\frac{dx'\,dy'\,dz'}{2\pi r^2}C'\sin(C',r),$$

wo $C'=\sqrt{c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2}$, und (C',r) den Winkel bezeichnet, den die Achse der Rotation C' mit dem Radius vector r bildet. Dies ist bis auf constante Factoren ganz die Formel für die angedeutete elektrische Wirkung, die auch senkrecht zur Achse des Stromes und zur Verbindungslinie steht. Es wäre unrichtig, wenn man diesen Zusammenhang, der zwischen den u, v, w verschiedener Punkte stattfindet, auf Rechnung *von Kräften* schieben wollte, welche direct zwischen diesen Punkten wirken. Die Formeln (1.) und (2.) dieses §. drücken keine ausser den gegebenen Kräften bestehende Kraftwirkungen aus, sondern sagen nur,

dass diese Kräfte, wenn sie die Stetigkeit nicht aufheben sollen, so beschaffene u, v, w veranlassen müssen, dass dieselben den Gleichungen (1.) und (2.) genügen. Wenn sonach eine äussere Kraft die u, v, w eines Punktes verändert, so wird sie in derselben Zeit, unter Mitwirkung molekularphysikalischer Kräfte, die der übrigen Punkte so verändert haben, dass wieder die Gleichungen (1.) und (2.) erfüllt sind. Die Beobachtung solchen Zusammenhanges wird dann, wenn sie auf diese Kräfte keine Rücksicht zu nehmen vermag, zur Annahme von Fernewirkungen führen müssen.

Es ist hiernach im Folgenden der Ausdruck, Einwirkung von Bewegungszuständen entfernter Punkte auf einander, nur als abgekürzte Bezeichnung dieses angegebenen Vorganges anzusehen.

Es ist leicht erklärlich, dass diese Einwirkung der Bewegungszustände auf einander der Beobachtung entgehen musste, da dieselbe nur eintritt bei stetigen Uebergängen innerhalb des betrachteten Raumes. Es hat dieselbe eine von der Wirkung gewöhnlicher Kräfte sehr abweichende Eigenthümlichkeit, die darin besteht, dass momentane Geschwindigkeiten, und nicht Beschleunigungen erzielt werden. Ganz ähnlich ist die elektromotorische Wirkung nach dem *Ohm*schen Gesetze, nach welchem eine elektromotorische Kraft momentan eine ihr proportionale Stromintensität erzielt. Die den Formeln (1.) und (2.) analogen elektrischen Kraftwirkungen gelten auch für die Wirkung von Punkten, zwischen denen keine Stetigkeit bemerkbar ist. Es muss nun wichtig sein, zu untersuchen, ob nicht durch Benutzung dieser Formeln sich die elektrischen Wirkungen auf atomistische zurückführen lassen, und ist dies möglich, so wird es nicht zu gewagt erscheinen, diese Zurückführung auch für die elektrische Wirkung zwischen scheinbar ganz getrennten Punkten, unter Annahme einer Stetigkeit zwischen ihnen, gelten zu lassen.

Es braucht wohl kaum angedeutet zu werden, von welcher Wichtigkeit dies für die Theorie der elektrischen Erscheinungen wäre, und es erscheint daher gerechtfertigt, die eben erhaltenen Resultate auf die Untersuchung der Bewegung der Elektricität in einem Leiter anzuwenden.

Einer allgemeinen Theorie dieser Erscheinungen bot zunächst die Form der Gleichungen für dieselben bedeutende Schwierigkeiten, da die zu bestimmenden Functionen unter dreifachen Integralzeichen vorkommen. Eine Beseitigung dieser Schwierigkeit muss auch, von der physikalischen Bedeutung abgesehen, mathematisch von Interesse sein.

II.

Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern.

§. 6.

Es ist schon im §. 1 angegeben, dass eine Function dreier Variabeln innerhalb eines geschlossenen Raumes vollständig bestimmt ist, wenn man ihren Werth an der Oberfläche und ausserdem ihr $\triangle$ im ganzen Inneren kennt. Die von Oberflächenintegralen herrührenden Theile werden wir im Allgemeinen, da wir vorläufig nur die für das Innere geltenden Bewegungsgleichungen aufstellen wollen, weglassen dürfen und es wird, wo dies nicht erlaubt ist, immer möglich sein, den Einfluss dieser Theile auf die Θ und c anzugeben. Ehe wir aber die Bewegungszustände in ihre beiden Theile zerlegen, dürfen wir die Obeerflächenintegrale stets weglassen, da ihr $\triangle$ immer Null ist, und wir nur mit diesem rechnen. Wir bezeichnen deshalb vorläufig zwei Funktionen als gleich, wenn sie in ihren $\triangle$ übereinstimmen. Wir benutzen den *Green*schen Satz in der etwas modificirten Form, die in §. 2 angegeben ist, und in welcher jedes der beiden Integrale für sich ein Potential ist. Die ursprüngliche Form des Satzes wäre:

$$4\pi V' = -\iiint u \triangle V \, dx\, dy\, dz + \int V \frac{du}{dp} \, d\sigma,$$

wo u in x', y', z' unendlich wird wie $\frac{1}{r}$ und in der Oberfläche Null ist. Dann ist der Werth des dreifachen Integrals, wenn x', y', z' in der Oberfläche liegt, Null und es enthält das dreifache Integral ausser dem in Gleichung (1.) des §. 2 vorkommenden körperlichen Potential noch Oberflächenintegrale, die, mit dem Integral $\int V \frac{du}{dp} d\sigma$ vereinigt, in das Integral

$$\text{(a.)} \qquad \int \left(V \frac{d\frac{1}{r}}{dp} - \frac{dV}{dp} \frac{1}{r} \right) d\sigma$$

übergehen. Der von uns betrachtete Theil von V ist:

$$\text{(b.)} \qquad V = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\triangle V'}{r} \, dx'\, dy'\, dz',$$

und es liefert dies in der Oberfläche von Null verschiedene Werthe für V. Substituirt man diese Oberflächenwerthe in (a.), so muss das Doppelintegral Null werden für jeden inneren Punkt x', y', z' als Anfangspunkt des Radiusvector r, indem dann der Gesammtwerth von V nur von der inneren Massenvertheilung $-\frac{1}{4\pi} \triangle V$ herrührt.

Eine Function V dreier Variabeln kann nur auf eine Weise als Potentialfunction geschrieben werden. Das Charakteristische für diese Form ist, dass, wenn $dx'dy'dz'$ das Raumelement ist, der Factor von $\frac{1}{r}$ von x', y', z' unabhängig sein muss; derselbe kann dann gleich $-\frac{1}{4\pi}\triangle V$ gesetzt werden, und man wird so eine partielle Differentialgleichung für V erhalten, wenn für V ein Ausdruck gegeben war, der von der Identität (b.) verschieden, aber auf ähnliche Form gebracht werden kann. Dies Gleichsetzen der in den Potentialausdrücken vorkommenden Massen, welches einfach auf Eindeutigkeit des Zeichens $\triangle$ beruht, wollen wir im Folgenden der Kürze wegen als das „Gesetz der gleichen Massen“ bezeichnen. Eine specielle Folgerung soll jetzt gleich erwähnt werden, obgleich wir im Verlaufe dieses Aufsatzes nicht Anwendung davon zu machen haben werden. Eine Function, die im Inneren Null ist (bis auf Oberflächenintegrale) wird die Form haben:

$$\text{(c.)} \qquad \iiint \frac{0}{r}\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Es ist nun nachgewiesen, dass jede Function in die Form (b.) gebracht werden kann; lässt sich von einem für die Function gegebenen Ausdrucke nachweisen, dass diese Transformation nicht möglich ist, so muss der Factor von $\frac{1}{r}$ Null sein, und somit der Ausdruck in (c.) übergehen.

§. 7.

Bevor wir dazu übergehen, die Bewegungsgleichungen für die Elektricität nach den in §. 6. entwickelten Grundsätzen zu transformiren, ist es nöthig einige der Formen aufzusuchen, welche der Integralausdruck (b.) §. 6. annehmen kann.

Die einfachste Umformung dieses Ausdruckes besteht in Differentiation, da nach der Formel $\triangle d^n V = d^n \triangle V$ die Massenvertheilung von Differentialen der Potentialfunction mit den Differentialen der ursprünglichen Massenvertheilung identisch ist; nach unserem Sinne dürfen wir also schreiben:

$$\iiint m' \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\, dx'\, dy'\, dz' = \iiint \frac{dm'}{dx}\, \frac{1}{r}\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Durch diese Formel lassen sich beliebige höhere als erste Potenzen von $\frac{1}{r}$ auf die erste zurückbringen.

Es können aber auch beliebig hohe Potenzen von r vorkommen; wir wollen nur die Möglichkeit der ersten Potenz zeigen:

Es ist:

$$\triangle r = \frac{2}{r}, \quad r^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2,$$

$$\frac{1}{2}\triangle \iiint m' r\, dx'\, dy'\, dz' = \iiint \frac{m'}{r}\, dx'\, dy'\, dz' = V,$$

mithin:

$$\frac{1}{2}\iiint m' r\, dx'\, dy'\, dz' = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{V'}{r}\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Durch derartige Transformationen werden Potenzen r^{2n+1} auf $\frac{1}{r}$ zurückgebracht. Durch Differentiation dieser Ausdrücke nach x, y, z können auch Potenzen r^{2n} hereinkommen, wenn Ausdrücke wie $\frac{(x'-x)^n}{r^n}$ als von der nullten Ordnung bezeichnet werden, z. B.:

$$\frac{1}{2}\iiint m' \frac{x'-x}{r}\, dx'\, dy'\, dz' = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{dV'}{dx'}\, \frac{1}{r}\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Die für die Elektricitätsbewegung vorliegenden Gleichungen werden nun ohne Schwierigkeit in solche Formen gebracht werden können, womit ohne Weiteres nach dem Gesetze der gleichen Massen die Bewegungsgleichungen in Form partieller Differentialgleichungen folgen werden. Wir werden für die Ausführung dieser Rechnung damit beginnen, die Glieder von der Normalform

$$\iiint \frac{m'}{r}\, dx'\, dy'\, dz'$$

herauszulesen, wobei m' von x, y, z, das in r vorkommt, ganz unabhängig sein muss. Weitere Angaben über die Art des Verfahrens können, ohne dass ein Beispiel vorliegt, nicht gut gegeben werden.

§. 8.

Wir beginnen nun mit der Construction der Bewegungsgleichungen für die Elektricität in ihrer älteren Form. In jedem anderen Capitel der Physik bildet man diese Gleichnngen durch Anwendung der allgemeinen mechanischen Principien, wie etwa des *d'Alembert*schen. Genau betrachtet, ist, abgesehen von rein mathematischen Sätzen, d. h. solchen, die nichts mit der Erfahrung zu thun haben, der gemeinsame Grund für diese Principien die Proportionalität

von Kraft und ertheilter Geschwindigkeit *). Man kennt die von jeder Kraft auf eine Masse hervorgebrachte Wirkung. Anders ist dies in der Elektrodynamik. Ein Molekül freier Elektricität bringt, wenn es sich bewegt, zu seiner von ihm ausgehenden statischen Kraftwirkung noch eine dynamische, deren Grösse durch die *Weber*sche Formel bestimmt ist; da diese Kraft nicht der Beschleunigung proportional ist, so erscheint es umgekehrt als voreilig, die entstehende Beschleunigung der Kraft proportional zu setzen, selbst wenn man die durch die Bewegung entstehende Veränderung der Kraft in Rechnung zieht.

In der That kennt man die Wirkung, welche eine elektrische Kraft auf ein positives oder negatives Theilchen ausübt, gar nicht, und selbst die Wirkung auf ein Theilchen, in welchem beide Elektricitätsarten vorhanden sind, ist nicht vollständig bestimmt: man weiss nicht, ist die durch eine elektromotorische Kraft geschiedene Elektricitäts*menge* der Kraft proportional, oder werden dieselben Mengen mit Geschwindigkeiten, die ihr proportional sind, bewegt. Das einzige Sichere, was man hier kennt, liegt in dem *Ohm*schen Gesetze, dass die erregte Stromstärke, d. h. das Product aus bewegter elektrischer Masse in die Geschwindigkeit, der elektromotorischen Kraft proportional ist. Denkt man sich nun neben einem elektrischen Strome, der durch ein Molekül geht, daselbst noch bewegte freie Elektricität, so muss man doch nach dem allgemeinen Princip der Wirkung von Massen auf Massen **) (wonach die Wirkung zwischen ihnen den Massen proportional ist) annehmen, dass die Wirkung einer elektromotorischen Kraft auf den Strom dieselbe bleibt, sei die freie Elektricität da oder nicht. Der Zuwachs an Stromintensität wird also, abgesehen von den von der freien Elektricität herrührenden elektromotorischen Kräften von dieser ganz unabhängig sein. Das *Ohm*schen Gesetz bezieht sich nur auf elektrische Ströme im engeren Sinne (d. h. solche, bei denen gleiche Mengen + und − Elektricität mit gleichen Geschwindigkeiten nach entgegengesetzten Seiten fliessen), und nur die Wirkung auf solche darf in Rechnung gezogen werden, wenn man das *Ohm*sche Gesetz anwendet.

Nach der *Weber*schen Formel wird diese Wirkung ebenso gross erhalten, ob man auf die Bewegung der Elektricität im Strome Rücksicht nimmt,

---

*) Wenigstens in der mathematisch gefassten Form.

**) Hiermit scheint die Annahme einer sehr grossen oder gar unendlichen neutralen scheidbaren Elektricitätsmenge in jedem Molekül in Widerspruch zu stehen, da dann jeder elektromotorischen Kraft eine unendliche Wirkung zukäme, oder es deutet dies darauf, Stromänderungen durch Geschwindigkeitsänderungen zu erklären.

oder nicht, und es wird daher, da diese ganze Theorie nur auf dem *Ohm*schen Gesetze beruht, stets gerechtfertigt erscheinen, für die Berechnung der elektromotorischen Kräfte, die auf einen Punkt wirken, die Elektricitäten in diesem Punkte als ruhend anzunehmen. Für die Bestimmung der ausser regelrechten Strömungen etwa noch vorhandenen Bewegungen haben wir noch keine Regel; diese Bewegungen kommen nur als elektromotorische Ursachen in Betracht, und es kann daher höchstens der Zweifel entstehen, ob das *Ohm*sche Gesetz zur Bestimmung dieser Wirkungen ausreicht. Dies braucht aber hier nicht untersucht zu werden, da wir vorläufig von solchen irregulären Bewegungen absehen. Es sollen mit Strömung oder Strombewegung im Folgenden immer nur Ströme gemeint sein, in denen gleiche Mengen + und − Elektricität mit gleichen Geschwindigkeiten nach entgegengesetzten Seiten gehen.

§. 9.

Trotz dieser Specialisirung dürfen wir die freie Elektricität nicht vernachlässigen, wie wir auch später nach Vollendung der Rechnung deutlich sehen werden. Ist ein Strom im Verlaufe seiner Richtung nicht constant, so wird in Folge dessen ein Anhäufen von freier Elektricität eintreten; es wird dann unwahrscheinlich, dass sich noch gleiche Mengen + und − Elektricität nach entgegengesetzten Richtungen bewegen. Um aber unsere Theorie frei von allen fremdartigen Störungen zu erhalten, wollen wir diese elektrodynamische Wirkung, wenn man so sagen will, dieser freien Elektricität vernachlässigen und vorläufig nur auf die elektromotorische Rücksicht nehmen, die sich ergiebt, wenn die angehäufte Elektricität als ruhend angesehen wird. Wir ersehen auch aus der Natur, dass die von der Bewegung herrührenden Wirkungen klein sind gegen die ersteren, indem die in galvanischen Strömen vorhandene Elektricitätsmenge eine sehr bedeutende, dagegen ihre gegenseitige Wirkung, sowohl die anziehende und abstossende, wie die elektromotorische, von derselben Ordnung ist, wie die elektrostatistische Wirkung sehr geringer Mengen freier Elektricität. Wir unterlassen jede weitere Untersuchung hierüber, da dieselbe nicht wohl geführt werden kann, ohne dass in den Bewegungsgleichungen auf diese vernachlässigten Wirkungen Rücksicht genommen wird.

Es muss zunächst untersucht werden, wie sich die Anhäufung freier Elektricität aus den Strömen berechnen lässt.

Durch einen Querschnitt in aa geht, wenn u, v, w die Componenten der Stromstärke sind, in normaler Richtung die + Elektricitätsmenge $u\,dt$, und es fliesst durch $b\,b$ die Menge $(u+\frac{du}{dx}dx)\,dt$ aus während des Zeitelementes dt. In dem Parallelepiped $dx\,dy\,dz$ wird sich mithin in Folge der Bewegung der + Elektricität in der Richtung der x Achse die + Elektricitätsmenge $-\frac{du}{dx}dx\,dt.dy\,dz$ während der Zeit dt anhäufen. Eben solche Anhäufungen treten in Folge der Bewegung nach y und z auf. Die negative Elektricität bewegt sich überall entgegengesetzt und wird ebenso grosse — Mengen wegführen, als die erstere Bewegung zuführt. Die Zunahme an freier + Elektricität ist danach das Doppelte und man erhält sofort:

$$(1.)\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{de}{dt}.$$

Die *Weber*sche Formel für die Abstossung zweier bewegter Elektricitätstheilchen e und e' von der Entfernung r ist:

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1-a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+2a^2r\frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

Für die Ausrechnung der elektromotorischen Wirkung dürfen wir nach §. 7 das Theilchen e' als ruhend ansehen. Die den u, v, w zugehörigen Stromgeschwindigkeiten seien i_1, i_2, i_3, so ist für das Element in x, y, z in Bezug auf x', y', z':

$$\frac{dr}{dt} = i_1\frac{x-x'}{r}+i_2\frac{y-y'}{r}+i_3\frac{z-z'}{r}.$$

Das Theilchen $-e$ hat die Geschwindigkeitscomponenten $-i_1$, $-i_2$, $-i_3$ und es werden sich daher durch Addition der von $+e$ und $-e$ herrührenden Wirkungen die den $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ entsprechenden Theile heben. In $\frac{d^2r}{dt^2}$ wird $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{di_2}{dt}$, $\frac{di_3}{dt}$ vorkommen, und wenn ei_1, ei_2, ei_3 wieder mit u, v, w bezeichnet wird, so erhalten wir für den Gesammtwerth der von den Stromänderungen herrührenden elektromotorischen Kräfte nach den drei Achsen $\frac{dU'}{dt}$, $\frac{dV'}{dt}$, $\frac{dW'}{dt}$, (von constanten Factoren abgesehen) wo:

$$(2.)\qquad \begin{cases} U' = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}\cdot\frac{dr}{dx}\left(u\frac{dr}{dx}+v\frac{dr}{dy}+w\frac{dr}{dz}\right), \\ V' = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}\cdot\frac{dr}{dy}\left(u\frac{dr}{dx}+v\frac{dr}{dy}+w\frac{dr}{dz}\right), \\ W' = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}\cdot\frac{dr}{dz}\left(u\frac{dr}{dx}+v\frac{dr}{dy}+w\frac{dr}{dz}\right). \end{cases}$$

Der einem Buchstaben angehängte obere Index bedeutet hier immer den Werth, in welchen die durch denselben Buchstaben ohne Index bezeichnete Function von x, y, z übergeht, wenn man x', y', z' an die Stelle von x, y, z setzt.

Es sei ferner Ω das Potential der freien Elektricität:

$$(3.) \qquad \Omega = \iiint \frac{e}{r} dx\,dy\,dz + \iint \frac{\varepsilon}{r} d\sigma,$$

wo ε die Dichte im Oberflächenelement $d\sigma$, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen in der Gestalt, wie sie von *Kirchhoff* im 102. Bande von *Poggendorff*s Annalen gegeben sind. Wir schreiben sie hier:

$$(4.) \qquad \begin{cases} u' = -2\left(k\frac{d\Omega}{dx'} + h\frac{dU'}{dt}\right), \\ v' = -2\left(k\frac{d\Omega}{dy'} + h\frac{dV'}{dt}\right), \\ w' = -2\left(k\frac{d\Omega}{dz'} + h\frac{dW'}{dt}\right). \end{cases}$$

Hierbei ist k die Constante des Widerstandes, $h = \frac{k}{c^2}$.

Differentiationen vor den Integralzeichen eines Potentials setzen wir, da wir jetzt noch nicht auf Zerlegung in longitudinale und transversale Bewegung eingehen, unter die Integrale und schreiben, das Volumenelement durch dT bezeichnend:

$$(5.) \qquad \begin{cases} u' = -2\iiint \frac{dT}{r}\left[k\frac{de}{dx} + h\left(\frac{du}{dt}\frac{dr}{dx} + \frac{dv}{dt}\frac{dr}{dy} + \frac{dw}{dt}\frac{dr}{dz}\right)\frac{dr}{dx}\right], \\ v' = -2\iiint \frac{dT}{r}\left[k\frac{de}{dy} + h\left(\frac{du}{dt}\frac{dr}{dx} + \frac{dv}{dt}\frac{dr}{dy} + \frac{dw}{dt}\frac{dr}{dz}\right)\frac{dr}{dy}\right], \\ w' = -2\iiint \frac{dT}{r}\left[k\frac{de}{dz} + h\left(\frac{du}{dt}\frac{dr}{dx} + \frac{dv}{dt}\frac{dr}{dy} + \frac{dw}{dt}\frac{dr}{dz}\right)\frac{dr}{dz}\right]. \end{cases}$$

Es ist leicht, die Glieder aus den Ausdrücken unter den eckigen Klammern herauszulesen, welche von x', y', z' unabhängig sind und daher Theile der Integrale geben, welche als Massenpotentiale darstellend angesehen werden dürfen. Es seien m', m'', m''' die Factoren von $\frac{dT}{r}$ in (5.); wir zerlegen sie in:

$$m' = m_1 + \mu_1, \qquad m'' = m_2 + \mu_2, \qquad m''' = m_3 + \mu_3,$$

wo m_1, m_2, m_3 die von x', y', z' unabhängigen Grössen sein sollen.

Bilden wir den Ausdruck:

$$m'(x-x') + m''(y-y') + m'''(z-z'),$$

so hat dieser, wie leicht zu sehen, die Form:

$$a(x-x') + b(y-y') + c(z-z'),$$

wo a, b, c von x', y', z' unabhängige Grössen bedeuten. Wegen der Beliebigkeit von x', y' und z' giebt dies $m_1 = a$, $m_2 = b$, $m_3 = c$,

$$\mu_1(x-x')+\mu_2(y-y')+\mu_3(z-z') = 0.$$

Für a, b, c oder m_1, m_2, m_3 erhält man durch diese Rechnung:

$$(6.)\quad \begin{cases} m_1 = -2\left(k\dfrac{de}{dx}+h\dfrac{du}{dt}\right), \\ m_2 = -2\left(k\dfrac{de}{dy}+h\dfrac{dv}{dt}\right), \\ m_3 = -2\left(k\dfrac{de}{dz}+h\dfrac{dw}{dt}\right), \end{cases}$$

und zieht man diese Grössen von m', m'', m''' in (5.) ab, so bleibt:

$$(7.)\quad \begin{cases} \mu_1 = -2h\left[-\dfrac{du}{dt}\left(1-\left(\dfrac{dr}{dx}\right)^2\right)+\left(\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dy}{dr}+\dfrac{dw}{dt}\dfrac{dz}{dr}\right)\dfrac{dx}{dr}\right], \\ \mu_2 = -2h\left[-\dfrac{dv}{dt}\left(1-\left(\dfrac{dr}{dy}\right)^2\right)+\left(\dfrac{dw}{dt}\dfrac{dz}{dr}+\dfrac{du}{dt}\dfrac{dx}{dr}\right)\dfrac{dy}{dr}\right], \\ \mu_3 = -2h\left[-\dfrac{dw}{dt}\left(1-\left(\dfrac{dr}{dz}\right)^2\right)+\left(\dfrac{du}{dt}\dfrac{dx}{dr}+\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dy}{dr}\right)\dfrac{dz}{dr}\right]. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke genügen in der That der Gleichung

$$\mu_1(x-x')+\mu_2(y-y')+\mu_3(z-z') = 0.$$

Die Integrale von m_1, m_2, m_3 haben nun die normale Form. Die von μ_1, μ_2, μ_3 werden wir auf eine der im §. 7 angegebenen Formen zu bringen haben. Da die Zerlegung der m', m'', m''' eine eindeutige ist, so können in den μ keine zu m_1, m_2, m_3 zu rechnenden Theile enthalten sein.

Bekanntlich ist $\dfrac{dr}{dx}=\dfrac{dx}{dr}$, $\dfrac{dr}{dy}=\dfrac{dy}{dr}$, $\dfrac{dz}{dr}=\dfrac{dr}{dz}$. Ferner:

$$\frac{d^2r}{dx^2}=\frac{1}{r}\left(1-\left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right),\quad \frac{d^2r}{dy\,dx}=-\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{dy},$$

$$\frac{d^2r}{dz\,dx}=-\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{dz},\ \text{etc.}$$

Dadurch gehen die Gleichungen (7.) über in:

$$\frac{\mu_1}{r} = +2h\left[\frac{du}{dt}\frac{d^2r}{dx^2}+\frac{dv}{dt}\frac{d^2r}{dx\,dy}+\frac{dw}{dt}\frac{d^2r}{dz\,dx}\right],$$

$$\frac{\mu_2}{r} = +2h\left[\frac{du}{dt}\frac{d^2r}{dx\,dy}+\frac{dv}{dt}\frac{d^2r}{dy^2}+\frac{dw}{dt}\frac{d^2r}{dy\,dz}\right],$$

$$\frac{\mu_3}{r} = +2h\left[\frac{du}{dt}\frac{d^2r}{dz\,dx}+\frac{dv}{dt}\frac{d^2r}{dy\,dz}+\frac{dw}{dt}\frac{d^2r}{dz^2}\right].$$

Oder kürzer, da $\dfrac{dr}{dx}=-\dfrac{dr}{dx'}$, etc. und $\dfrac{du}{dt}$, $\dfrac{dv}{dt}$, $\dfrac{dw}{dt}$ von x', y', z' unab-

hängig sind:

$$\frac{\mu_1}{r} = -2h\frac{d}{dx'}\left(\frac{du}{dt}\frac{dr}{dx}+\frac{dv}{dt}\frac{dr}{dy}+\frac{dw}{dt}\frac{dr}{dz}\right),$$

etc.

Durch Zerlegungen, wie: $\frac{du}{dt}\frac{dr}{dx} = \frac{d}{dx}\left(r\frac{du}{dt}\right) - r\frac{d}{dx}\frac{du}{dt}$, gehen dann die Integrale der $\frac{\mu}{r}$ über in:

$$\iiint\frac{\mu_1}{r}\,dT = \frac{d}{dx'}\left\{-2h\iint r\left[\frac{du}{dt}\,dy\,dz+\frac{dv}{dt}\,dz\,dx+\frac{dw}{dt}\,dx\,dy\right]\right.$$
$$\left.+2h\iiint dT.r.\left[\frac{d}{dx}\frac{du}{dt}+\frac{d}{dy}\frac{dv}{dt}+\frac{d}{dz}\frac{dw}{dt}\right]\right\},$$

und die Integrale von $\frac{\mu_2}{r}$ und $\frac{\mu_3}{r}$ sind die nach y' und z' genommenen Differentialquotienten desselben unter der geschlungenen Klammer stehenden Ausdrucks. Diese Ausdrücke können nun sehr leicht nach §. 7 auf die Normalform gebracht werden. Ehe wir aber in dieser Rechnung weiter fortfahren, wollen wir, von den Formeln des ersten Theiles Gebrauch machend, die Ausdrücke, in welche die durch (5.) gegebenen Werthe der u', v', w' vermöge der zuletzt angewandten Transformationen übergehen, in ihre beiden, den longitudinalen und transversalen Bewegungen entsprechenden Theile zerlegen. Wir erreichen dies, indem wir die m_i und μ_i dieses §. in ihre Theile zerlegt denken. Doch sind hierbei noch Vorsichtsmaasregeln nöthig, die desshalb gebraucht werden müssen, weil Differentiationen vor den Integralzeichen des Potentials nicht sofort auf die Massenelemente, die darin vorkommen, übertragen werden können. Wir gehen deshalb zur Betrachtung dieser Transformation über.

§. 10.

$\triangle$ bezeichne, wie bisher, die Summe der zweiten Differentialquotienten. Dann folgt aus der Gleichung $\triangle d^n P = d^n \triangle P$, dass die zu $d^n P$ gehörige Massenvertheilung mit $\frac{d^n \triangle P}{-4\pi}$ identisch ist, und aus §. 2 ergiebt sich hieraus, dass bis auf Oberflächenintegrale:

$$d^n\iiint\frac{\triangle P'}{r}\,dx'\,dy'\,dz' = \iiint\frac{d^n\triangle P'}{r}\,dx'\,dy'\,dz'.$$

Diese so weggelassenen Integrale können, wenn keine Zerlegung in longitudinale und transversale Bewegung vorgenommen wird, stets unberücksichtigt

bleiben: aber bei der Ausführung dieser Zerlegung wird im Allgemeinen ein Theil des Werthes der Grössen Θ und m (in der Bedeutung des §. 3 genommen) aus diesen Oberflächenintegralen herrühren. Aus den gegen Ende von §. 3 gemachten Bemerkungen folgt, dass nur ein solches System α, β, γ von Oberflächenintegralen keine Θ und m liefert, welches in der Form $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$ geschrieben werden kann, wo p das Potential aussenliegender Massen bedeutet. Diese Bedingung lässt sich auch so deuten, dass α, β, γ in beiden Formen, als longitudinale und als transversale Bewegung, geschrieben werden können; so dass immer, wenn

$$\text{(a)} \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{df_2}{dz} - \frac{df_3}{dy}, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{df_3}{dx} - \frac{df_1}{dz}, \quad \frac{dp}{dz} = \frac{df_1}{dy} - \frac{df_2}{dx}$$

zu schreiben möglich ist, die $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$ bei der Aufstellung der partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung ganz vernachlässigt werden dürfen. Es ist daher umgekehrt auch erlaubt, solche Theile hinzuzusetzen, und es darf daher für Ω die Formel (3.) §. 9. benutzt werden.

Wir müssen jetzt $\frac{dU'}{dt}$, $\frac{dV'}{dt}$, $\frac{dW'}{dt}$ zerlegen (s. (2.) §. 9); zu diesem Zwecke schreiben wir die u, v, w, die daselbst unter den Integralzeichen vorkommen, in der Form $\mathfrak{u}+u$, $\mathfrak{v}+v$, $\mathfrak{w}+w$; diese Zerlegung ist für die drei Integrale $\iiint \frac{\mu_1}{r}\, dT$, etc. nicht nöthig, da diese Theile nach dem Resultat des vorigen §. lediglich longitudinale Bewegungen darstellen. Differentiationen nach x, y, z, die unter dem dreifachen Integralzeichen stehen und sich auf die Massenelemente beziehen, setzen wir vor die Integralzeichen als Differentiationen nach x', y', z', z. B.

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \iiint \frac{du}{dt}\frac{dT}{r} = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dF_2}{dz} - \frac{dF_3}{dy}\right)\frac{dT}{r} \\ \quad = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx'}\iiint \frac{dP}{dt}\frac{dT}{r} + \frac{d}{dz'}\iiint \frac{dF_2}{dt}\frac{dT}{r} - \frac{d}{dy'}\iiint \frac{dF_3}{dt}\frac{dT}{r}\right\}. \end{cases}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (4.) §. 9 zerfallen so in ihre beiden Theile; die linken Seiten können nach §. 3 zerlegt gedacht werden, und dann giebt die Gleichsetzung der Massenelemente für jede der Gleichungen (4.) zwei Differentialgleichungen. Wir schreiben dieselben jetzt hin mit der Bemerkung, dass noch nicht auf die Oberflächenintegrale Rücksicht genommen ist, welche durch die Transformation (b) hereinkommen.

Am einfachsten gestalten sich die Gleichungen für die transversale Bewegung:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{8\pi}\triangle \mathfrak{u} = h\frac{d\mathfrak{u}}{dt}, \\ \frac{1}{8\pi}\triangle \mathfrak{v} = h\frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \\ \frac{1}{8\pi}\triangle \mathfrak{w} = h\frac{d\mathfrak{w}}{dt}, \end{cases}$$

und es ist hier am bequemsten für $\triangle \mathfrak{u}$, $\triangle \mathfrak{v}$, $\triangle \mathfrak{w}$ nicht die Formen des §. 3 einzuführen.

Um die Gleichungen für die longitudinalen Bewegungen zu erhalten, müssen wir die Integrale von $\frac{\mu_1}{r}$, $\frac{\mu_2}{r}$, $\frac{\mu_3}{r}$ (s. §. 9) durch die longitudinalen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ausdrücken. Dies geschieht leicht vermöge Gleichung (1.) §. 9, welcher die folgende an die Seite gesetzt werden kann:

$$u\,dy\,dz + v\,dz\,dx + w\,dx\,dy = d\sigma(u\cos Nx + v\cos Ny + w\cos Nz) = -\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt}d\sigma,$$

wo $d\sigma$ das Oberflächenelement, ε die Dichte der Elektricität daselbst, N die nach Innen gerichtete Normale. Dann ist:

$$\Omega = \int \frac{e}{r}dT,$$

wo das Integral sowohl über den Raum als auch über die Oberfläche ausgedehnt werden muss, und in der Oberfläche e durch ε zu ersetzen ist, und es wird

$$\int \frac{\mu_1}{r}\,dT = -\frac{d}{dx'}\left\{h\int r\,dT\frac{d^2e}{dt^2}\right\}, \text{ etc.},$$

$$\triangle\int \frac{\mu_1}{r}\,dT = -\frac{d}{dx'}2h\frac{d^2}{dt^2}\int \frac{e}{r}\,dT = -\frac{d}{dx'}\left(2h\frac{d^2\Omega}{dt^2}\right).$$

Durch Benutzung der Formeln des §. 3. erhalten wir hieraus:

$$(2.)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{4\pi}\triangle \mathfrak{u} = -2k\frac{de}{dx} + 2h\frac{d\mathfrak{u}}{dt}, \\ -\frac{1}{4\pi}\triangle \mathfrak{v} = -2k\frac{de}{dy} + 2h\frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \\ -\frac{1}{4\pi}\triangle \mathfrak{w} = -2k\frac{de}{dz} + 2h\frac{d\mathfrak{w}}{dt}, \end{cases}$$

$$(3.)\qquad \frac{d\mathfrak{u}}{dx} + \frac{d\mathfrak{v}}{dy} + \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{de}{dt}.$$

Durch partielle Differentiation der Gleichungen (2.) respective nach x, y, z und Addition folgt:

$$(4.)\qquad \frac{1}{8\pi}\triangle\frac{de}{dt} + 2k\triangle e + h\frac{d^2e}{dt^2} = 0.$$

und man hätte dies auch direct aus der von *Kirchhoff* gegebenen Formel

$$\frac{de}{dt} = -16\pi k e + 2h\frac{d^2\Omega}{dt^2}$$

herleiten können. Die Gleichungen (2.) sind die Resultate der Differentiation nach x, y, z *einer* Gleichung, da $-4\pi u = \frac{dP}{dx}$, etc., nämlich von:

$$(5.) \qquad \frac{1}{8\pi}\triangle\frac{dP}{dt} + 2k\triangle P + h\frac{d^2P}{dt^2} = 0,$$

wobei P noch eine willkürliche Function von t allein enthält, die bei der Bildung der Gleichungen (2.) aus (5.) wieder wegfällt.

Nachdem wir nun die Bewegungsgleichungen gebildet haben, können wir auf die Correctionen näher eingehen, welche die Gleichungen in Folge dessen erleiden müssen, dass durch die Transformationen nach Art von (b) dieses §. Oberflächenintegrale vernachlässigt worden sind. Es seien p_1, p_2, p_3 drei beliebige aber von aussenliegenden Massen herrührende Potentiale. Dann ist:

$$\triangle p_1 = \triangle p_2 = \triangle p_3 = 0.$$

Es mögen nun p_1, p_2, p_3 nach §. 3 zerlegt werden, wobei p, f_1, f_2, f_3 an die Stelle von P, F_1, F_2, F_3 treten sollen

$$-4\pi p_1 = \frac{dp}{dx} + \frac{df_2}{dz} - \frac{df_3}{dy}, \quad \text{etc.}$$

Dann ist:

$$-4\pi\triangle p_1 = \frac{d}{dx}(\triangle p) + \frac{d\triangle f_2}{dz} - \frac{d\triangle f_3}{dy} = 0,$$

mithin können die Grössen

$$\frac{d\triangle p}{dx}, \quad \frac{d\triangle p}{dy}, \quad \frac{d\triangle p}{dz}$$

als ein System α, β, γ betrachtet werden, welches in beiden Formen geschrieben werden kann. Es seien nun die von den weggelassenen Oberflächenintegralen herrührenden zu den Gleichungen (1.) und (2.) rechterseits hinzuzusetzenden Glieder gebildet. Diese Glieder auszurechnen, ihren analytischen Ausdruck anzugeben, würde sehr einfach durch theilweise Integration von (b) geschehen; man würde so die Oberflächenintegrale und nach §. 3 die aus ihnen folgenden Correctionen der Gleichung in (1.) und (2.) erhalten.

Das Hinzukommen dieser Correctionen ist gleichbedeutend damit, dass den u, v, w neue Bestandtheile λ, μ, ν hinzugefügt werden. Nach den Eigenschaften eines Systems (a) §. 10 würden diese Bestandtheile der u, v, w auf $\triangle$u, $\triangle$v, $\triangle$w, $\triangle$u, $\triangle$v, $\triangle$w und e gar nicht influiren, und

es bleiben daher die Gleichungen, die in diesem §. entwickelt sind, streng richtig, nur gelten sie nicht für die Grössen u, v, w, u, v, w selbst, sondern für $u+\lambda$, $v+\mu$, etc. Die Ausdrücke der hinzukommenden λ, μ, ν durch die Integrale der Gleichungen (1.) und (2.) zu bilden, würde zu weit führen. Ich muss dieses für spätere Gelegenheit vorbehalten. Jetzt nur noch einige Schlussbemerkungen.

§. 11.

Die Bildung der Theile λ, μ, ν ist immer möglich, wenn zu den Gleichungen (4.) §. 9 rechterseits beliebige, etwa äusseren inductorischen Ursachen entsprechende Oberflächenintegrale hinzukommen. Man kann daher Inductionsströme nach den entwickelten Gleichungen untersuchen.

Diese zeigen, dass die transversale Elektricitätsbewegung den Gesetzen der geleiteten Wärme unterliegt, welche demnach maassgebend sind für alle solche Bewegungen der Elektricität, in Folge deren keine Anhäufung freier Elektricität stattfindet.

Wäre der Einfluss der inneren Induction (d. h. der durch Aenderung der inneren Strömungen hervorgebrachte Effect) zu vernachlässigen, so müsste $\triangle u$, $\triangle v$, $\triangle w$ Null sein. Für e würde sich ergeben:

$$\frac{1}{8\pi}\frac{de}{dt}+2ke=0,$$

wo e noch eine von x, y, z unabhängige, aber mit t veränderliche willkürliche Constante enthält. Nach dieser Gleichung, in der gar kein x, y, z vorkommt, muss von dem Fall, welchen *Kirchhoff* betrachtet, wo die innere Induction Null wäre und die freie Elektricität sich nach den Gesetzen der geleiteten Wärme bewegte, abgesehen werden.

Aus (5.) (§. 10) folgt, dass, wenn elektrodynamisches Gleichgewicht bestehen soll, dann $\triangle u$, $\triangle v$, $\triangle w$ verschwinden müssen, ebenso dass e im Innern Null sein muss; es können also dann die u, v, w durch Potentiale äusserer Massen dargestellt werden und zwar als Differentialquotienten nach x, y, z *eines* solchen; dasselbe gilt dann auch für u, v, w.

Bildet man die Summe der Gleichungen (1.) und (2.), so dass links $\triangle(u+u)\ldots$ stehen, so müssen die λ, μ, ν in jeder dieser drei Gleichungen sich wegheben, da die $\triangle$ der Oberflächenintegrale Null sind, wenn auch die $\triangle$ der longitudinalen und transversalen Theile einzeln von Null verschieden sind.

Die grösste Verschiedenheit zwischen den Gleichungen, die wir jetzt für die Elektricität entwickelt haben, und denen der Molekularphysik besteht darin, dass erstere nicht für die gesammten u, v, w gelten. Eine speciellere Analyse, als die bis jetzt geführte, müsste die Ausdrücke dieser den entwickelten Gleichungen nicht unterworfenen Theile liefern, in u, v, w ausgedrückt, und man würde so Gleichungen für die Gesammtwerthe erhalten. Die λ, μ, ν (s. §. 10) sind die Theile der u, v, w, die sich in Wärme umsetzen, und es würden die eben angedeuteten Gleichungen daher den wesentlichen Unterschied von den Gleichungen der Molekularphysik haben, dass sie nicht mehr die Constanz der lebendigen Kraft, oder der vorhandenen Wärmemenge oder dergleichen ausdrücken.

Berlin, 1862.

Ueber die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $Rr+Ss+Tt+U(s^2-rt)=V$.

(Von Herrn *George Boole* zu Cork in Irland.)

Einleitung.

1. In dem vorliegenden Aufsatze beabsichtige ich die Theorie der Integration der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1.) \qquad Rr+Ss+Tt+U(s^2-rt) = V$$

zu betrachten, unter der Voraussetzung, dass dieselbe ein erstes Integral von der Form

$$(2.) \qquad F(u, v) = 0$$

besitzt. Es bezeichnen hierin x, y die unabhängigen, z die abhängige Veränderliche, p, q und r, s, t die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung von z, ferner R, S, T, U, V und u, v bestimmte Functionen von x, y, z, p, q, und zwar dergestalt, dass die Formen der beiden letzteren u, v von denen der ersteren R, S, T, U, V abhangen. Vorläufig mögen einige Bemerkungen vorangeschickt werden.

Dass aus einem ersten Integrale von der Form (2.) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form (1.) nothwendig entsteht, wird folgendermassen bewiesen. Differentiirt man (2.) nach x und nach y, und bezeichnet man $\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}$, beziehungsweise mit $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, und, der Kürze wegen, $F(u, v)$ mit F, so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}\right\}+\frac{\partial F}{\partial v}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}\right\}+\frac{\partial F}{\partial v}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}\right\} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich durch Elimination von $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$:

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}\right\}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}\right\}$$
$$-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}\right\}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}\right\} = 0,$$

oder

$$(3.)\quad \begin{cases} \left\{\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} r+\left\{\frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial v}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} s \\ \quad +\left\{\frac{\partial v}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} t+\left\{\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}\right\}(s^2-rt) \\ \quad =\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right), \end{cases}$$

ein Ergebniss, welches in der Form (1.) enthalten ist, und worin die Coefficienten von r, s ... Functionen von x, y, z, p, q sind, deren Formen von der Beschaffenheit von u und v allein abhangen.

2. Die partielle Differentialgleichung (1.) ist auch wegen deren geometrischer Bedeutung bemerkenswerth. Man betrachte das System von Oberflächen, welches durch die Gleichung

$$(4.)\quad \Phi(x, y, z, a, b, c) = 0$$

dargestellt wird, wenn die darin vorkommenden Constanten a, b, c sich unter Erfüllung zweier beliebigen Bedingungen

$$(5.)\quad \varphi_1(a, b, c) = 0, \quad \varphi_2(a, b, c) = 0$$

verändern, so wird die Gleichung der erzeugten einhüllenden Fläche einer partiellen Differentialgleichung von der obigen Form genügen. Aber in diesem Falle wird die besondere Bedingungsgleichung

$$(6.)\quad S^2+4(UV-RT) = 0$$

zwischen den Coefficienten stattfinden. Der Beweis dieses Satzes geschieht auf folgende Weise:

Durch Auflösung von (4.) erhalte man

$$(7.)\quad z = \varphi(x, y, a, b, c),$$

wo b und c die aus (5.) hervorgehenden Functionen von a bedeuten. Diese Gleichung der eingehüllten Fläche geht in die Gleichung der einhüllenden Fläche über, wenn man a nicht als constant sondern als eine Function von x, y, z behandelt, welche durch die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a} = 0$$

zu bestimmen ist. Es gelten daher, sowohl für die einhüllende als für die eingehüllte Fläche, die Gleichungen

$$(8.)\quad p=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit (7.) dienen zur Bestimmung von a, b, c als Functionen von x, y, z, p, q. Stellt man deren Werthe durch die Gleichungen

$$a = u, \quad b = v, \quad c = w$$

dar, so hat man, weil b und c beliebige Functionen von a sind,

$$v = \varphi(u), \qquad w = \psi(u).$$

Dies sind die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung der einhüllenden Fläche. Man sieht, dass beide von der allgemeinen Form (2.) sind.

Um die willkürlichen Functionen φ und ψ fortzuschaffen, und dadurch die gesuchte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten, differentiirt man die beiden Gleichungen (8.) nach x und nach y; dadurch ergeben sich

$$r = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial x}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial b\,\partial x}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial c\,\partial x}\frac{\partial c}{\partial x},$$

$$s = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial x}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial b\,\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial c\,\partial x}\frac{\partial c}{\partial y},$$

$$s = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial y}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial b\,\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial c\,\partial y}\frac{\partial c}{\partial x},$$

$$t = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial y}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial b\,\partial y}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial c\,\partial y}\frac{\partial c}{\partial y}$$

und hieraus

$$(9.)\quad \begin{cases} \left(r - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\left(t - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) - \left(s - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \\ = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial b\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial b\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}\right) \\ + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial b\,\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial b\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y}\right) \\ + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial c\,\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial c\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Weil aber b und c blosse Functionen von a sind, so hat man

$$\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y} = 0.$$

Mithin reducirt sich (9.) auf

$$\left(r - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\left(t - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) - \left(s - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

oder

$$(10.)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}r - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}s + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}t + s^2 - rt = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2.$$

Da nun diese Gleichung von der Form (1.) ist, so liefert die Vergleichung der entsprechenden Coefficienten die Relationen

$$\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}}{R} = \frac{-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}}{S} = \frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}}{T} = \frac{1}{U} = \frac{\frac{\partial^2\varphi}{dx^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2}{V},$$

woraus sich nach Elimination von $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$

$$S^2+4(UV-RT) = 0,$$

d. h. die oben erwähnte Bedingungsgleichung (6.) ergiebt.

3. Was die Geschichte der in Rede stehenden Differentialgleichung betrifft, so bin ich nur im Stande auf wenige Abhandlungen hinzuweisen. Die Theorie ihrer Integration ist bereits von *Ampère* behandelt worden (Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier 18). *Monge* hat sich bekanntlich mit deren geometrischer Bedeutung beschäftigt, aber mit scheinbarem Mangel an Allgemeinheit. In den letzten Jahren hat *De Morgan* die Theorie ihrer Integration behandelt (Cambridge Philosophical Transactions, Vol. IX, Pt. 4). Dass irgend ein Anderer sich mit demselben Gegenstande beschäftigt habe, ist mir nicht bekannt.

Die Methoden von *Ampère* und *De Morgan* sind von einander ganz verschieden. Dieser führt die Bestimmung von u und v in dem ersten Integrale (2.) auf die Lösung eines Systems von zwei linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurück; wogegen jener die nämliche Grössenbestimmung auf die Lösung eines Systemes von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführt. In dem, was sie leisten, stimmen beide Ergebnisse mit einander überein, denn die Lösung des *De Morgan*schen Systems verlangt in der That die des *Ampère*schen. Aber die Verschiedenheit der Methoden bleibt unvermindert. Bei der *Ampère*schen ist keine Dazwischenkunft von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vorhanden.

Ehe ich mit den soeben erwähnten Arbeiten von *Ampère* und *De Morgan* bekannt geworden, war es mir gelungen, auf zwei von einander und von den obigen verschiedenen Wegen dasselbe Ziel zu erreichen. Zwischen diesen Wegen trat auch eine merkwürdige Reciprocität auf, und es ist mir kaum zweifelhaft, dass in denselben, wegen deren Einfachheit und Allgemeinheit, die natürliche Entwickelung der Grundprincipien enthalten ist, auf welchen die Methoden von *Ampère* und *De Morgan* sich stützen, wiewohl das wirk-

liche Verfahren von dem jener Mathematiker verschieden ist. Der Darlegung dieser Methoden sind die folgenden Seiten gewidmet.

Die erste Methode stimmt darin mit der De Morganschen überein, dass sie sich damit beschäftigt, durch Vergleichung von (1.) und (3.) Gleichungen zu bilden, aus welchen, nach Elimination von den Differentialquotienten von v, partielle Differentialgleichungen für die unabhängige Bestimmung von u hervorgehen. In dieser Abhandlung wird, so wie ich glaube, die angedeutete Elimination zum ersten Mal völlig bewirkt; und auf die sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen, welche vom zweiten Grade sind, wird ein Verfahren angewandt, wodurch das erhaltene System in *lineare* Systeme zerfällt. Endlich werden die Beziehungen, in welchen diese verschiedenen Systeme zur Integration von (1.) stehen, erörtert.

Es versteht sich von selbst, dass ich, die obenerwähnten Reciprocitätssätze allein ausgenommen, keinen Anspruch darauf mache, neue Resultate gegeben zu haben. Ich strebe nur nach der vollkommenen Strenge des analytischen Verfahrens. Dafür ist es unentbehrlich, dass die Eliminationsergebnisse vollständig seien und dass die verschiedenartigen Fälle, in welche solche Ergebnisse zerfallen, von einander abgesondert betrachtet werden.

Erste Methode.

4. Lehrsatz. *Es sei*

$$F(u, v) = 0$$

ein erstes Integral der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V,$$

so wird u als Function von x, y, z, p, q die beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$R\frac{\partial u^2}{\partial q^2} - S\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p} + T\frac{\partial u^2}{\partial p^2} + U\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial q}\right\} = 0,$$

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + V\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial q}\right\} = 0$$

befriedigen. Aehnliche Gleichungen gelten auch für v. Hier bedeuten $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}$ und $\frac{\partial u^2}{\partial p^2}$, $\frac{\partial u^2}{\partial q^2}$ die Quadrate von $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial q}$.

Zur Uebereinstimmung von (1.) und (3.) ist es nöthig, dass die folgenden aus der Vergleichung der Coefficienten entstehenden Gleichungen befriedigt werden, nämlich

$$(a.)\quad \frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\mu R,$$

$$(b.)\quad \frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial v}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\mu S,$$

$$(c.)\quad \frac{\partial v}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\mu T,$$

$$(d.)\quad \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}=\mu U,$$

$$(e.)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\mu V.$$

Da nun die obigen fünf Gleichungen in Bezug auf die fünf Grössen $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial v}{\partial p}$, $\frac{\partial v}{\partial q}$, μ homogen sind, so ist es möglich diese zu eliminiren und so eine nur die Differentialquotienten von u enthaltende Relation zu gewinnen. Es lässt sich aber wegen der merkwürdigen *cyclischen* Gestalt der Gleichungen vermuthen, dass noch eine zweite Relation zwischen denselben Grössen bestehe. Man bemerke, dass durch die Vertauschung von

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad S,\quad U,\quad V,\quad \mu$$

mit

$$\frac{\partial u}{\partial q},\quad \frac{\partial u}{\partial p},\quad \frac{\partial v}{\partial q},\quad \frac{\partial v}{\partial p},\quad -S,\quad V,\quad U,\quad -\mu,$$

und umgekehrt, keine Aenderung in dem obigen Gleichungssystem herbeigeführt wird; daher leuchtet es ein, dass wenn nach der obenerwähnten Elimination *eine* Relation zwischen den Differentialquotienten von u und den Grössen R, S, T u. s. w. sich ergeben hat, es erlaubt sein wird die Grössen

$$(11.)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial p},\quad \frac{\partial u}{\partial q},\quad S,\quad U,\quad V,$$

beziehungsweise mit

$$(12.)\quad \frac{\partial u}{\partial q},\quad \frac{\partial u}{\partial p},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad -S,\quad V,\quad U$$

zu vertauschen, wodurch eine zweite Relation sich ergiebt.

Multiplicirt man nun $(a.)$, $(b.)$, $(c.)$, $(d.)$ beziehungsweise mit

$$\frac{\partial u^2}{\partial q^2},\quad -\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p},\quad \frac{\partial u^2}{\partial p^2},\quad \frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

und addirt, so ergiebt sich, unter Fortlassung des gemeinsamen Factors μ,

die Relation

$$(13.)\qquad R\frac{\partial u^2}{\partial q^2}-S\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p}+T\frac{\partial u^2}{\partial p^2}+U\left\{\frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}=0,$$

woraus man durch die oben bewiesene Umwandlung die zweite Relation

$$(14.)\qquad R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+V\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial p}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial q}\right\}=0$$

herleiten kann, welche auch durch directe Elimination hergeleitet wird, wenn man die Gleichungen $(a.)$, $(b.)$, $(c.)$, $(e.)$ beziehungsweise mit $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial p}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial q}$ multiplicirt, dann addirt und den gemeinsamen Factor μ fortlässt.

Aehnliche Relationen werden auch in Bezug auf v statt finden. Allgemeiner kann man sagen, dass die willkürliche Function $F(u, v)$ einem solchen Systeme Genüge leisten muss.

Ferner ist es klar, dass die vier Gleichungen, die auf diese Weise im Ganzen gefunden sind, das vollständige Ergebniss bilden, welches von der Elimination von μ aus den ursprünglichen Gleichungen herrührt.

Da die für v geltenden Relationen den für u gefundenen ganz ähnlich sind, so genügt es die beiden Gleichungen (13.), (14.) zu betrachten.

Zunächst gedenke ich zwei besondere Fälle, nämlich wenn $U=0$ und wenn $V=0$ ist, zu betrachten; und zwar deshalb, weil sie sich zu Ausnahmefällen in der allgemeinen Theorie gestalten. Nachher wird der allgemeine Fall, bei welchem weder $U=0$ noch $V=0$ ist, betrachtet werden.

Besonderer Fall $U=0$.

5. Die zu betrachtende Gleichung ist

$$Rr+Ss+Tt=V.$$

Bezeichnet man mit m_1, m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$(15.)\qquad Rm^2-Sm+T=0,$$

so nimmt das System (13.), (14.) die Form

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial q}-m_1\frac{\partial u}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial q}-m_2\frac{\partial u}{\partial p}\right)=0,$$

$$R\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+V\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial p}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial q}\right\}=0$$

an. Die erste dieser Gleichungen zerfällt, nach Fortlassung des Factors R, in

$$(16.)\qquad \frac{\partial u}{\partial q}-m_1\frac{\partial u}{\partial p}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial q}-m_2\frac{\partial u}{\partial p}=0,$$

deren erstere, wenn sie erfüllt ist, dazu benutzt werden kann, die zweite Gleichung des vorigen Systems auf die Form

$$R\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+V\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\},$$

d. h. auf

$$(17.)\qquad \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\left\{R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+Rm_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial p}\right\}=0$$

zurückzuführen. Das Zusammenbestehen der Gleichungen (13.), (14.) führt daher zu einem der beiden Systeme:

$$1^{\text{stens}}.\quad \frac{\partial u}{\partial q}-m_1\frac{\partial u}{\partial p}=0,\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

$$2^{\text{tens}}.\quad \frac{\partial u}{\partial q}-m_1\frac{\partial u}{\partial p}=0,\quad R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+Rm_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial p}=0,$$

oder wenn man m_2 durch $\frac{T}{Rm_1}$ und nachher m_1 durch m ersetzt:

$$(\text{I.})\qquad \frac{\partial u}{\partial q}-m\frac{\partial u}{\partial p}=0,\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

$$(\text{II.})\qquad \frac{\partial u}{\partial q}-m\frac{\partial u}{\partial p}=0,\qquad Rm\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+Vm\frac{\partial u}{\partial p}=0,$$

und es ist klar, dass die Anwendung der zweiten statt der ersten Gleichung (16.) zu denselben Systemen geführt haben würde, in denen nur m alsdann die zweite Wurzel m_2 der Gleichung (15.) zu bedeuten hätte.

Es leuchtet ein, dass die in Rede stehende Differentialgleichung

$$Rr+Ss+Tt=V$$

aus (I.), da darin V weder unmittelbar noch mittelbar vorkommt, nicht herrühren kann. Sei $u=0$ ein erstes Integral der partiellen Differentialgleichung, welcher das System (I.) wirklich entspricht. Durch einmalige Differentiation nach x und y erhält man die Gleichungen

$$(18.)\qquad \begin{cases}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial p}r+\frac{\partial u}{\partial q}s=0,\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial p}s+\frac{\partial u}{\partial q}t=0,\end{cases}$$

mit deren Hülfe sich die Grössen $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial q}$ aus (I.) eliminiren lassen. Daraus ergiebt sich

$$r+2ms+m^2t=0,$$

ein mit $Rr+Ss+Tt=V$ in Widerspruch stehendes Ergebniss.

Eliminirt man dagegen auf die nämliche Weise diese Grössen aus (II.), so ergiebt sich gerade die Gleichung

$$Rr+Ss+Tt = V.$$

Wenn man nun $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ beziehungsweise durch

$$\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}$$

ersetzt, so verwandelt sich (II.) in die Form

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial q}-m\dfrac{\partial u}{\partial p} = 0, \\ Rm\dfrac{\partial u}{\partial x}+T\dfrac{\partial u}{\partial y}+(Rmp+Tq)\dfrac{\partial u}{\partial z}+Vm\dfrac{\partial u}{\partial p} = 0, \end{cases}$$

und es kommt jetzt darauf an, diese Gleichungen gleichzeitig zu integriren.

Zu diesem Zwecke addirt man die Gleichungen, nachdem man die erste mit dem Factor λ multiplicirt hat, welcher als eine beliebige Function von x, y, z, p, q anzusehen ist. Dies giebt

$$Rm\frac{\partial u}{\partial x}+T\frac{\partial u}{\partial y}+(Rmp+Tq)\frac{\partial u}{\partial z}+(V-\lambda)m\frac{\partial u}{\partial p}+\lambda\frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

und hieraus erhält man durch Anwendung des *Lagrange*schen Verfahrens

$$\frac{dx}{Rm}=\frac{dy}{T}=\frac{dz}{Rmp+Tq}=\frac{dp}{(V-\lambda)m}=\frac{dq}{\lambda}.$$

Unstreitig muss irgend eine gleichzeitige Auflösung von (19.) diesen Gleichungen, abgesehen von der Form von λ, Genüge leisten. Eliminirt man aber λ, so bleibt das System

$$(20.)\quad \frac{dx}{Rm}=\frac{dy}{T}=\frac{dz}{Rmp+Tq}=\frac{dp+mdq}{Vm}$$

übrig. Daher hängt von der Befriedigung dieses Systems die Bestimmung von u und v ab.

Es ist nun leicht nachzuweisen, dass dieses mit dem bekannten *Monge*schen Systeme wirklich übereinstimmt. Denn, da $m_1 m_2 = \frac{T}{R}$ ist, so kann man m durch $\frac{T}{Rm}$ ersetzen, wodurch sich das obige System in

$$(21.)\quad m\,dx = dy = \frac{m\,dz}{p+mq} = \frac{Rm\,dp+T\,dq}{V}$$

verwandelt, was gleichbedeutend ist mit

$$dy - m\,dx = 0,$$
$$Rm\,dp + T\,dq - Vm\,dx = 0,$$
$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

dem bekannten *Monge*schen System.

Gelingt es hieraus zwei Integralgleichungen

$$u = a, \quad v = b,$$

welche p und q enthalten, zu gewinnen, so wird

$$F(u, v) = 0$$

ein allgemeines erstes Integral von (1.) bilden. Lässt m zwei Werthe zu, so wird es zwei derartige Integrale geben. Die Theorie der zweiten Integration wird später betrachtet werden.

Besonderer Fall $V = 0$.

6. Die zu betrachtende Gleichung ist

$$Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = 0.$$

Es lässt sich auf diesen Fall ein durchaus ähnliches Verfahren anwenden, doch kann man, bei gehörigem Gebrauch des schon angegebenen Reciprocitätssatzes, dasselbe zum grössten Theil entbehren. Vertauscht man in (15.) und (II.) die Grössen (11.) mit den Grössen (12.), so hat man

$$(22.) \qquad Rm^2 + Sm + T = 0,$$

$$(23.) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$(24.) \qquad Rm\frac{\partial u}{\partial q} + T\frac{\partial u}{\partial p} + Um\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Addirt man die beiden letzten Gleichungen, nach Ersetzung von $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ durch $\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}$, und nachdem die erste Gleichung mit λ multiplicirt worden ist, so entsteht

$$Rm\frac{\partial u}{\partial q} + T\frac{\partial u}{\partial p} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + (U - \lambda)m\frac{\partial u}{\partial y} + \{\lambda p + (U - \lambda)mq\}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

und hieraus

$$\frac{dq}{Rm} = \frac{dp}{T} = \frac{dx}{\lambda} = \frac{dy}{(U - \lambda)m} = \frac{dz}{\lambda p + (U - \lambda)mq},$$

ein System, welches nach der Elimination von λ in das folgende übergeht:

$$(25.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{R} = \dfrac{m\,dp}{T} = \dfrac{dy + m\,dx}{U}, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0. \end{cases}$$

Gelingt es aus diesen Gleichungen zwei Integrale $u = a$, $v = b$, welche p und q enthalten, zu bekommen, so wird $F(u, v) = 0$ ein allgemeines erstes Integral von (1.), und da m im Allgemeinen zwei Werthe annehmen kann, so werden zwei allgemeine erste Integrale entstehen.

Allgemeiner Fall, bei welchem weder $U = 0$ noch $V = 0$ ist.

7. Die partiellen Differentialgleichungen (13), (14.) sind homogen und zweiten Grades in Rücksicht auf die vier Grössen $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial q}$. Wenn in derselben Weise nur drei anstatt vier Grössen in diesen Gleichungen vorkämen, so wäre es von vorn herein möglich, das System in lineare Systeme zu zerlegen, denn, wird dasselbe mit $P = 0$, $Q = 0$ bezeichnet, und daraus die Gleichung

$$P + \lambda Q = 0$$

gebildet, so könnte die Grösse λ so bestimmt werden, dass die linke Seite in lineare Factoren zerfiele. Kommen aber in P und Q vier Grössen homogen und im zweiten Grade vor, so kann die Zerlegung in lineare Factoren nur bei besonderer Eigenthümlichkeit von P und Q herbeigeführt werden. Versuchen wir, ob es im vorliegenden Falle möglich ist.

Eliminirt man S zwischen (13.), (14.), so erhält man

$$(26.) \qquad R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial q} + T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial p} + U\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + V\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

eine aus den ursprünglichen Gleichungen auch direct herzuleitende Relation, wenn man (*a.*), (*c.*), (*d.*), (*e.*) beziehungsweise mit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial q}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial p}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}$$

multiplicirt, addirt, und den gemeinsamen Factor μ weglässt. Es wird bequem sein, die Gleichungen (14.), (26.) anstatt (13.), (14.) zu benutzen.

Addirt man (14.), mit λ multiplicirt, zu (26.), so ergiebt sich die folgende Gleichung:

$$(27.) \quad \begin{cases} R\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + (U + S\lambda)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + T\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \\ \quad + R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial q} + V\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q} + T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial p} \\ \quad + V\lambda\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial q}\right\} = 0. \end{cases}$$

Es ist zu bemerken, dass auf der linken Seite die Quadrate von $\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)$ fehlen. Daraus erschliesst man als die zu probirende Form des aus linearen Factoren bestehenden Aequivalents die folgende:

$$(28.) \qquad \left\{R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+n\frac{\partial u}{\partial p}\right\}\left\{\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m'\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+n'\frac{\partial u}{\partial q}\right\}.$$

Die Vergleichung der Coefficienten in (27.), (28.) ergiebt:

$$\begin{aligned}
(a.) \qquad & Rm'+\lambda m = U+S\lambda, \\
(b.) \qquad & mm' = T\lambda, \\
(c.) \qquad & n\lambda = \lambda V = mn', \\
(d.) \qquad & Rn' = R, \\
(e.) \qquad & m'n = T, \\
(f.) \qquad & nn' = V.
\end{aligned}$$

Aus (*b.*), (*c.*), (*d.*) findet man

$$n = V, \qquad n' = 1, \qquad \lambda = \frac{m}{V}, \qquad m' = \frac{T}{V},$$

Werthe, die auch (*e.*) und (*f.*) befriedigen, während (*a.*) die Gestalt

$$(29.) \qquad m^2 - Sm + RT - UV = 0$$

annimmt, und zur Bestimmung von m dient. Zugleich nimmt (27.) die in Factoren aufgelöste Form an:

$$(30.) \qquad \left\{R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial p}\right\}\left\{m\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial q}\right\} = 0.$$

Da aber zwei Werthe von m der quadratischen Gleichung (29.) genügen, so liefert (30.), wenn man jene Werthe mit m_1, m_2 bezeichnet, die zwei Gleichungen

$$(31.) \qquad \begin{cases} \left\{R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial p}\right\}\left\{m_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial q}\right\} = 0, \\ \left\{R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial p}\right\}\left\{m_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial q}\right\} = 0. \end{cases}$$

Um diese zu befriedigen, muss man gleichzeitig einen Factor aus der einen und einen aus der anderen der Null gleich setzen. Da aber vier Combinationen möglich sind, so treten vier Systeme von linearen Gleichungen auf, und es kommt jetzt darauf an, die Beziehung dieser verschiedenen Systeme zur Auflösung der partiellen Differentialgleichung (1.) zu ergründen.

Setzt man zunächst die beiden ersten Factoren gleich Null; so hat man

$$R\frac{\partial u}{\partial x}+m_1\frac{\partial u}{\partial y}+V\frac{\partial u}{\partial p}=0,$$

$$R\frac{\partial u}{\partial x}+m_2\frac{\partial u}{\partial y}+V\frac{\partial u}{\partial p}=0,$$

ein System, welches, wofern m_1, m_2 ungleich sind, zu der einfachen Form

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+V\frac{\partial u}{\partial p}=0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

zurückgeführt werden kann.

Aus diesem Systeme aber ist kein Werth von u abzuleiten, welcher der Gleichung (1.) zu genügen geeignet ist, denn S, U, T kommen nicht in dem Systeme vor. Ferner ist es leicht zu zeigen, dass die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher das soeben erhaltene System wirklich entspricht, nicht (1.) sondern

$$Vt-R(s^2-rt)=0$$

ist. Um dies zu beweisen eliminirt man, vermöge (18.), die Grössen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \frac{\partial u}{\partial p},\ \frac{\partial u}{\partial q}.$$

In ähnlicher Weise zeigt es sich, dass, wenn man die letzten Factoren der Gleichungen (31.) der Null gleichsetzt, das daraus entstehende System nicht der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.), sondern der Gleichung

$$Vr+T(s^2-rt)=0$$

entspricht.

Es bleiben demnach nur diejenigen Systeme übrig, die sich ergeben, wenn man einen ersten Factor aus einer der Gleichungen (31.) nebst einem zweiten Factor aus der anderen gleich Null setzt, nämlich die Systeme

$$(32.)\quad \begin{cases} R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial p}=0, \\ m_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial q}=0, \end{cases}$$

$$(33.)\quad \begin{cases} R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial p}=0, \\ m_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V\frac{\partial u}{\partial q}=0. \end{cases}$$

Diese Systeme genügen der partiellen Differentialgleichung (1.). Dies zu beweisen, ist es nur erforderlich, die Grössen $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, u. s. w. aus (32.) oder (33.) vermöge (18.) zu eliminiren. Auf diese Weise erhält man die Gleichung

$$V\{Rr+Ss+Tt+U(s^2-rt)-V\} = 0,$$

welche, abgesehen von dem schon behandelten Fall $V=0$, mit (1.) übereinstimmt. Betrachten wir besonders das System (32.).

Addirt man zur ersten Gleichung desselben die zweite, mit λ multiplicirt, nachdem man $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ durch $\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}$, ersetzt hat, so ergiebt sich

$$(R+\lambda m_2)\frac{\partial u}{\partial x}+(m_1+\lambda T)\frac{\partial u}{\partial y}+\{Rp+m_1q+\lambda(Tq+m_2p)\}\frac{\partial u}{\partial z}+V\frac{\partial u}{\partial p}+\lambda V\frac{\partial u}{\partial q}=0.$$

Dies führt auf das gewöhnliche System

$$\frac{dx}{R+\lambda m_2}=\frac{dy}{m_1+\lambda T}=\frac{dz}{Rp+m_1q+\lambda(Tq+m_2p)}=\frac{dp}{V}=\frac{dq}{\lambda V},$$

woraus man, nach Elimination von λ, erhält:

$$(34.)\qquad \begin{cases} U\,dq+m_1\,dx-R\,dy = 0, \\ U\,dp+m_2\,dy-T\,dx = 0, \\ dz-p\,dx-q\,dy = 0. \end{cases}$$

Gelingt es zwei Integrale, $u=a$, $v=b$ dieses Systems zu erhalten, so ist $F(u,v)=0$ ein allgemeines erstes Integral von (1.). Das andere erste Integral ist in ähnlicher Weise durch Integration des aus (33.) herrührenden Systems

$$(35.)\qquad \begin{cases} U\,dq+m_2\,dx-R\,dy = 0, \\ U\,dp+m_1\,dy-T\,dx = 0, \\ dz-p\,dx-q\,dy = 0 \end{cases}$$

zu bilden.

Es ist in §. 4 angedeutet worden, dass die schon behandelten Fälle $U=0$, $V=0$ als Ausnahmen in der allgemeinen Theorie vorkommen. Wie dies in Rücksicht auf V geschieht, liegt klar vor Augen. Der Fall $U=0$ tritt als Ausnahme dadurch hervor, dass dabei die beiden ersten Gleichungen von (34.) und von (35.) identisch werden. Es wird sich aber ausweisen, dass, wenn man in diesem Fall die Elimination von λ richtig bewirkt, man zu denselben Schlüssen gelangt, zu welchen bereits die besondere Betrachtung in §. 5 geführt hat. Gelingt es nun aus (34.) zwei Integrale $u=a$, $v=b$,

in welchen p und q enthalten sind, zu gewinnen, so ist

$$F(u, v) = 0$$

ein allgemeines erstes Integral von (1.). In ähnlicher Weise ist ein allgemeines erstes Integral aus (35.) herzuleiten.

Theorie der zweiten Integration.

8. Um die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(36.) \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = 0$$

zu integriren, die zur Abkürzung mit $P = 0$ bezeichnet werden soll, ist es der *Charpit*schen Methode zufolge hinreichend, eine andere Gleichung $Q = 0$ zu finden, welche eine willkürliche Constante enthält und zweitens, mit $P = 0$ verbunden, Werthe von p und q liefert, die $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ integrirbar machen. Die Integration dieser totalen Differentialgleichung wird auf ein vollständiges Integral von (36.) führen, welches wir mit

$$z = f(x, y, a, b)$$

bezeichnen wollen. Hieraus entsteht das allgemeine Integral dadurch, dass man b durch $\varphi(a)$ ersetzt und a aus den Gleichungen

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a)\},$$

$$0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a)\}}{\partial a}$$

eliminirt. Die Auffindung der Hülfsgleichung $Q = 0$ beruht bekanntlich auf der Gleichung

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right),$$

aus welcher sich folgende entwickeln lässt:

$$(37.) \qquad \frac{\partial P}{\partial p}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial P}{\partial q}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial Q}{\partial q} = 0,$$

worin $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}$, u. s. w. Da P bekannt ist, so hat man eine lineare partielle Differentialgleichung zur Bestimmung von Q. Dies reicht, wie schon angedeutet worden, hin, irgend einen Werth von Q, welcher eine willkürliche Constante enthält, abzuleiten.

Im vorliegenden Falle aber lässt sich ein leichterer Weg einschlagen. Wiewohl es erforderlich gewesen ist, die obige Theorie zu erörtern, werde ich mich derselben doch fast nur bedienen, um klar zu machen, auf welche

Art die Beschaffenheit der Gleichungen, deren Integration die ersten Integrale von (1.) ergab, auch die Ausführung der zweiten Integration und damit die vollständige Auflösung von (1.) vereinfacht.

Betrachten wir die allgemeine Gleichung

$$Rr+Ss+Tt+U(s^2-rt) = V,$$

in welcher weder $U=0$ noch $V=0$ ist. Setzen wir zunächst voraus, dass die beiden Wurzeln der Gleichung

$$m^2-Sm+RT-UV = 0$$

einander gleich sind. Die Systeme (34.), (35.) werden alsdann identisch, und man hat zur Bestimmung des ersten Integrals

$$(38.) \quad \begin{cases} U\,dq+m\,dx-R\,dy = 0, \\ U\,dp+m\,dy-T\,dx = 0, \\ dz-p\,dx-q\,dy = 0. \end{cases}$$

Da aber bei diesem System die Bedingung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-m}{U}$$

erfüllt wird, so erhellt es, dass irgend zwei Integrale $u=a$, $v=b$ solche Werthe von p und q liefern werden, welche $dz-p\,dx-q\,dy$ integrirbar machen.

Um das allgemeine erste Integral $F(u, v)=0$, oder, was dasselbe ist, $v=\varphi(u)$ noch einmal zu integriren, verbinde man dasselbe, der *Charpit*schen Methode gemäss, mit dem besonderen Integrale $u=a$. Man hat

$$v=\varphi(u), \qquad u=a,$$

oder was gleichbedeutend ist,

$$u=a, \qquad v=\varphi(a),$$

in Folge wovon die nun integrirbar gewordene Gleichung $dz-p\,dx-q\,dy=0$ ein vollständiges Integral von der Form

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a), c\}$$

liefert. Eliminirt man a aus den Gleichungen

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a), \psi(a)\},$$
$$0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a), \psi(a)\}}{\partial a},$$

so hat man das allgemeine Integral von (1.). Eliminirt man aber a, c aus den Gleichungen

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a), c\},$$

$$0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a), c\}}{\partial a}, \qquad 0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a), c\}}{\partial c},$$

so hat man das singulare Integral.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auf den Fall, in welchem $V = 0$ ist, ausdehnen. Nur tritt statt des Systemes (38.) das System (21.) auf.

Im Falle von $U = 0$ aber wird diese Methode unzureichend; denn aus (*d.*) in 4. erhellt, dass in diesem Falle

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p} = 0$$

ist, woraus, einem bekannten Satze nach, u in Bezug auf p und q eine Function von v ist. Daher reichen die vereinigten Gleichungen

$$u = a, \qquad v = \varphi(a)$$

nicht hin, die Grössen p und q zu bestimmen. Man muss zu den gewöhnlichen Methoden für die Integration von $F(u, v) = 0$ zurückkehren.

Nehme man endlich an, dass m_1, m_2 ungleich sind, und betrachte man zunächst den allgemeinen Fall, in welchem weder U noch V verschwinden. Wir wollen zeigen, dass irgend ein Integral aus dem Systeme (34.) mit irgend einem Integrale aus dem Systeme (35.) verbunden, solche Werthe von p und q liefern wird, welche $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ integrirbar machen.

Um dies zu beweisen, kehre man zu den ursprünglichen Gleichungen (32.), (33.) zurück, aus welchen (34.) und (35.) hergeleitet sind. Daraus erhellt, dass wenn $P = 0$ ein Integral von (34.) und $Q = 0$ ein Integral von (35.) ist, die folgenden Gleichungen befriedigt sein werden:

$$-V\frac{\partial P}{\partial p} = R\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + m_1\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$-V\frac{\partial P}{\partial q} = m_2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + T\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$-V\frac{\partial Q}{\partial p} = R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + m_2\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right),$$

$$-V\frac{\partial Q}{\partial q} = m_1\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + T\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Man führe diese Werthe von $\frac{\partial P}{\partial p}$, $\frac{\partial P}{\partial q}$, $\frac{\partial Q}{\partial p}$, $\frac{\partial Q}{\partial q}$ in (37.) ein, so wird diese Gleichung eine identische, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Verbindet man daher das allgemeine Integral $F(u, v) = 0$, welches aus *einem* der Systeme (34.), (35.) abgeleitet ist, mit einem besonderen Integrale $u = a$, welches dem anderen angehört, so wird man, nach ausgeführter Integration von $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, zu einer vollständigen Lösung von (1.)

$$z = f(x, y, a, c)$$

gelangen, in welcher nicht bloss zwei willkürliche Constanten vorkommen, sondern auch, wegen der allgemeinen Form von $F(u, v)$, eine willkürliche Function. Hieraus wird die allgemeine Lösung von (1.) dadurch hervorgehen, dass man a aus den Gleichungen

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a)\},$$
$$0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a)\}}{\partial a}$$

eliminirt, — und die singulare Lösung dadurch, dass man a, c aus den drei Gleichungen

$$z = f(x, y, a, c),$$
$$0 = \frac{\partial f(x, y, a, c)}{\partial a}, \qquad 0 = \frac{\partial f(x, y, a, c)}{\partial c}$$

eliminirt. Die allgemeine Lösung hat den Charakter eines Ausdrucks, in welchem zwei willkürliche Functionen vorkommen.

Aehnliche Betrachtungen gelten auch, wenn $U = 0$ oder $V = 0$, ohne dass hierbei Ausnahmefälle eintreten.

Der Bequemlichkeit halber mögen alle bisherigen Ergebnisse, sowohl die ausführlich ausgesprochenen als die nur angedeuteten, in einem Gesammtüberblick zusammengefasst werden.

Zusammenstellung von Ergebnissen.

9. 1^{stens}. Im Falle $U = 0$, bildet man die Gleichungen

$$(A.) \qquad \frac{dx}{R} = \frac{m\,dy}{T} = \frac{dp + m\,dq}{V},$$
$$(B.) \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

wo m eine der Wurzeln der Gleichung

$$(C.) \qquad Rm^2 - Sm + T = 0.$$

2^{tens}. Im Falle $V = 0$, bildet man die Gleichungen

$$(A.) \qquad \frac{dq}{R} = \frac{m\,dp}{T} = \frac{dy + m\,dx}{U},$$
$$(B.) \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

wo m eine der Wurzeln der Gleichung

$$(C.) \qquad Rm^2+Sm+T = 0$$

bezeichnet.

3^{tens}. Sind weder $U=0$ noch $V=0$, so bildet man die Gleichungen

$$(A.) \quad \begin{cases} U\,dq+m_1\,dx-R\,dy = 0, \\ U\,dp+m_2\,dy-T\,dx = 0, \end{cases}$$

$$(B.) \qquad dz-p\,dx-q\,dy = 0,$$

wo m_1, m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$(C.) \qquad m^2-Sm+RT-UV = 0$$

bezeichnen.

In jedem Falle wird, wenn $u=a$, $v=b$ Integrale von $(A.)$ bezeichnen, welche mit oder ohne Hülfe von $(B.)$ erhalten worden sind,

$$F(u, v) = 0$$

ein allgemeines erstes Integral von (1.) darstellen. Das zweite allgemeine Integral oder, was dasselbe ist, die allgemeine Lösung z ergiebt sich entweder durch unabhängige Integration dieser Gleichung, oder, was viel bequemer ist, durch das folgende Verfahren.

Wenn $m_1=m_2$ ist, so führe man in die Gleichung $dz-p\,dx-q\,dy=0$ die aus $u=a$, $v=\varphi(a)$ erhaltenen Werthe von p und q ein. Durch Integration derselben wird eine *vollständige Lösung*

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a), c\}$$

entstehen, woraus man eine allgemeine Lösung ableiten wird, indem man a aus den Gleichungen

$$(E.) \quad \begin{cases} z = f\{x, y, a, \varphi(a), \psi(a)\}, \\ 0 = \dfrac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a), \psi(a)\}}{\partial a} \end{cases}$$

eliminirt, und eine singulare Lösung, indem man a, c, aus den Gleichungen

$$(F.) \quad \begin{cases} z = f\{x, y, a, \varphi(a), c\}, \\ 0 = \dfrac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial a}, \qquad 0 = \dfrac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial c} \end{cases}$$

eliminirt.

In dem so gebildeten System von particularen, allgemeinen und singularen Integralen werden alle Lösungen enthalten sein.

Das obige Verfahren erleidet, wie schon bemerkt worden ist, eine Ausnahme in dem besonderen Fall $U=0$.

Wenn m_1, m_2 von einander verschiedene Werthe besitzen, so verfüge man in dem allgemeinen ersten Integrale, $F(u, v)=0$, auf beliebige Weise

über die Zweideutigkeit, welche mit den darin vorkommenden Werthen von m_1, m_2 verbunden ist. Hierauf vertausche man in u die beiden Wurzeln m_1, m_2 mit einander, nenne u' den neuen Werth von u. Nun verbinde man das particulare Integral $u'=a$ mit dem allgemeinen $F(u,v)=0$ und führe dadurch die Integration von $dz-p\,dx-q\,dy=0$ aus. Die so erhaltene vollständige Lösung

$$z = f(x, y, a, c)$$

wird zur entsprechenden allgemeinen Lösung dadurch führen, dass man a aus den Gleichungen

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a)\},$$
$$0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(\alpha)\}}{\partial a}$$

eliminirt, und zur singularen Lösung dadurch, dass man a, c aus den Gleichungen

$$z = f(x, y, a, c),$$
$$0 = \frac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial a}, \qquad 0 = \frac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial c}$$

eliminirt.

10. Ich füge die folgenden Beispiele hinzu. Es sei

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t-\frac{s^2-rt}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} = -(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Da diese Gleichung dem allgemeinen Falle angehört, bei welchem weder $U=0$ noch $V=0$ ist, so hat man, den obigen Regeln gemäss,

$$m^2+2pqm+p^2q^2 = 0,$$

wonach $m=-pq$ ist, und die zur Bestimmung von u, v dienenden Gleichungen sind

$$\frac{dq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}+pq\,dx+(1+q^2)\,dy = 0,$$
$$\frac{dp}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}+pq\,dy+(1+p^2)\,dx = 0,$$

woraus nach Elimination von dy

$$dx-\frac{(1+q^2)\,dp-pq\,dq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$
$$x-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = a.$$

In ähnlicher Weise ist

$$y-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = b,$$

nachdem b durch $\varphi(a)$ ersetzt worden ist, geht daher die Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

in die Form

$$dz - \frac{\{x-a\}dx + \{y-\varphi(a)\}dy}{\sqrt{1-\{x-a\}^2-\{y-\varphi(a)\}^2}}$$

über. Also ist

$$\{x-a\}^2+\{y-\varphi(a)\}^2+\{z-c\}^2 = 1$$

eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung. Die entsprechende allgemeine Lösung ist am einfachsten durch Elimination von a aus

$$\{x-a\}^2+\{y-\varphi(a)\}^2+\{z-\psi(a)\}^2 = 1,$$
$$x-a+\{y-\varphi(a)\}\varphi'(a)+\{z-\psi(a)\}\psi'(a) = 0$$

zu erhalten. Es ist leicht einzusehen, dass kein singulares Integral vorhanden ist. In der That nimmt das System $(F.)$ die sich selbst widersprechende Form

$$z = c+\sqrt{1-\{x-a\}^2-\{y-\varphi(a)\}^2},$$
$$0 = \frac{-\{x-a\}-\{y-\varphi(a)\}\varphi'(a)}{\sqrt{1-\{x-a\}^2-\{y-\varphi(a)\}^2}}, \quad 0 = 1$$

an.

Zum zweiten Beispiel nehmen wir die allgemeine Gleichung bei beständigen Coefficienten

$$ar+bs+ct+e(s^2-rt) = h.$$

Hier sind m_1, m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$m^2-bm+ac-eh = 0,$$

und unter der Voraussetzung, dass sie ungleich sind, zerfällt das System $(A.)$ in die beiden Systeme

$$\left.\begin{aligned} e\,dq+m_1\,dx-a\,dy &= 0\\ e\,dp+m_2\,dy-c\,dx &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} e\,dq+m_2\,dx-a\,dy &= 0\\ e\,dp+m_1\,dy-c\,dx &= 0\end{aligned}\right\},$$

es treten also die beiden ersten Integrale auf:

$$eq+m_1x-ay = f_1(ep+m_2y-cx),$$
$$eq+m_2x-ay = f_2(ep+m_1y-cx).$$

Setzt man an die Stelle des zweiten dieser Integrale das besondere darin enthaltene

$$ep+m_1y-cx = C,$$

während das erste unumschränkt bleibt, so findet man aus dem Zusammen-

bestehen beider:

$$p = \frac{cx - m_1 y + C}{e}, \qquad q = \frac{ay - m_1 x + f_1\{(m_2 - m_1)y + C\}}{e}.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ ein, so folgt, nach ausgeführter Integration und Ersetzung von $\int f(c)\,dt$ durch $\varphi(t)$,

$$z = \frac{1}{e}\left(\frac{cx^2}{2} - m_1 xy + \frac{ay^2}{2} + Cx + \varphi\{C + (m_2 - m_1)y\}\right) + C',$$

eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung. Daher nimmt das entsprechende allgemeine Integral die Form an:

$$z = \frac{1}{e}\left(\frac{cx^2}{2} - m_1 xy + \frac{ay^2}{2} + Cx + \varphi\{C + (m_2 - m_1)y\}\right) + \psi(C),$$

$$0 = \frac{1}{e}\left(x + \varphi'\{C + (m_2 - m_1)y\}\right) + \psi'(C),$$

woraus, nachdem φ und ψ bestimmt worden sind, nur C zu eliminiren übrig bleibt. Auch hier ist keine singulare Lösung vorhanden.

Zweite Methode.

11. Man setze

$$(39.) \qquad s^2 - rt = \mu,$$

und indem man diese Gleichung mit

$$(40.) \qquad \begin{cases} dp = r\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy, \end{cases}$$

und der gegebenen Gleichung

$$(1.) \qquad Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$$

verbindet, eliminire man r, s, t aus denselben, so ergiebt sich

$$(41.) \qquad \begin{cases} R\,dp^2 + S\,dp\,dq + T\,dq^2 - V(dp\,dx + dq\,dy) \\ \quad - \mu\{R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 - U(dp\,dx + dq\,dy)\} = 0. \end{cases}$$

Wir werden nicht *a priori* zu beweisen versuchen, dass es erlaubt ist, diese Gleichung in das System

$$(42.) \qquad \begin{cases} R\,dp^2 + S\,dp\,dq + T\,dq^2 - V(dp\,dx + dq\,dy) = 0, \\ R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 - U(dp\,dx + dq\,dy) = 0 \end{cases}$$

zu zerlegen. Genüge es hier, die Zulässigkeit dieses Verfahrens dadurch *a posteriori* festzustellen, dass wir das erhaltene System in lineare Systeme zerlegen und die besonderen Beziehungen derselben zu (1.) getrennt bestimmen.

Hätten wir nur r, t aus (1.) vermöge (40.) eliminirt, und in dem Ergebnisse den von s unabhängigen und den in s multiplicirten Theil besonders,

$= 0$ gesetzt, so wären wir zu dem System

$$(42^*.) \qquad \begin{cases} R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 - U(dp\,dx + dq\,dy) = 0, \\ R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - U\,dp\,dq - V\,dx\,dy = 0 \end{cases}$$

gelangt. In den *Ampère*schen Untersuchungen kommt dieses System vor, nur mit dem Unterschiede, dass *Ampère* die Gründe der angedeuteten Zerlegung *a priori* festzusetzen versucht.

Wie man auch immer zu irgend einem der beiden obigen gleichwerthigen Systeme gelangt, so scheint es mir kaum fraglich zu sein, dass die Zerlegung derselben in lineare Systeme und die Bestimmung der daraus entstehenden Beziehungen zu (1.) wesentlich erforderlich ist; und hierin liegt, wenn ich mich nicht irre, das wirkliche Fehlschlagen der *Ampère*schen Theorie.

Gehen wir nun von dem symmetrischen System (42.) aus. Man ersieht leicht, dass eine gewisse Aehnlichkeit der Form zwischen diesem System und dem System (13.), (14.) sich zeigt, — eine Aehnlichkeit, welche sich so ausdrücken lässt: wenn die Grössen

$$(43.) \qquad dx, \quad dy, \quad dp, \quad dq, \quad U, \quad V, \quad S$$

beziehungsweise mit

$$(44.) \qquad -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial q}, \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad V, \quad U, \quad -S$$

vertauscht werden, so geht das eine in das andere System über. Es folgt unmittelbar aus dieser Verbindung der beiden Systeme, dass sich das ganze Verfahren von §. 4, insofern es sich auf die Form der Gleichungen (13.), (14.) bezieht, auch hier unumschränkt anwenden lässt, dass daher die Einführung und Bestimmung der Grössen λ, m, etc., die Zerlegung des Systems (42.) in vier lineare Systeme, die Erforschung der Beziehungen, in welchen diese Systeme zu (1.) stehen, u. s. w. einen Verlauf darbieten, ganz ähnlich dem in §. 4 und den folgenden §§. auseinandergesetzten. Vermöge der obigen Vertauschung lassen sich auch die Ergebnisse des einen Verfahrens unmittelbar in die des anderen umwandeln.

Ebenso gehen z. B. die Gleichungen (29.), (32.), (33.) in die folgenden

$$(45.) \qquad m^2 - Sm + RT - UV = 0,$$

$$(46.) \qquad \begin{cases} -R\,dy + m_1\,dx + U\,dq = 0, \\ m_2\,dy - T\,dx + U\,dp = 0, \end{cases}$$

$$(47.) \qquad \begin{cases} m_1\,dy - T\,dx + U\,dp = 0, \\ -R\,dy + m_2\,dx + U\,dq = 0 \end{cases}$$

über. Man ersieht, dass diese Gleichungen, wenn man denselben

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

hinzufügt, mit den Systemen (34.), (35.) übereinstimmen. Auch folgt aus demselben Reciprocitätssatze, dass, wenn man entweder aus (46.) oder aus (47.) die Grössen dy, dx, dp, dq eliminirt, die Gleichung entsteht:

$$(48.) \qquad U\{Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) - V\} = 0.$$

Endlich treten dieselben Ausnahmefälle $U = 0$, $V = 0$ wie oben, nur in umgekehrter Ordnung und mit umgekehrten Verhältnissen, ein.

Auf den merkwürdigen Umstand wollte ich hier aufmerksam machen, dass sich die partiellen Differentialgleichungen (32.), (33.) durch das oben erwähnte Gesetz in eben dieselben gewöhnlichen Differentialgleichungen verwandeln, auf welchen deren gleichzeitige Integration beruht.

Wenn man die Natur der oben angewandten Reciprocität erwägt, so ist es klar, dass dieselbe nicht für den Ausdruck eines ursprünglichen und unabhängigen Gesetzes gehalten werden darf. In der That sind zwei Bestandtheile zu unterscheiden, aus denen sie sich zusammensetzt, wovon der eine in der besonderen Beschaffenheit entweder des Systems

$$(49.) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial u}{\partial p} r - \frac{\partial u}{\partial q} s, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial u}{\partial p} s - \frac{\partial u}{\partial q} t,$$

oder des Systems

$$(50.) \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy$$

besteht, während der andere in der Gleichartigkeit der beiden mit einander verglichenen Systeme beruht.

Durch blosse Auflösung geht (49.) in die gleichwerthige Form

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{r}{s^2 - rt}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{s}{s^2 - rt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{s}{s^2 - rt}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{t}{s^2 - rt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

über, woraus erhellt, dass (49.) keine wirkliche Veränderung erleidet, wenn man darin die Grössen

$$\left(\frac{\partial u}{dx}\right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial u}{\partial q}, \quad r, \quad s, \quad t$$

beziehungsweise mit

$$\frac{\partial u}{\partial q}, \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{-r}{s^2 - rt}, \quad \frac{s}{s^2 - rt}, \quad \frac{-t}{s^2 - rt}$$

vertauscht. Durch die Vertauschung aber von r, s, t mit $\frac{-r}{s^2 - rt}$, $\frac{s}{s^2 - rt}$, $\frac{-t}{s^2 - rt}$ geht die Gleichung

$$Rr+Ss+Tt+U(s^2-rt) = V$$

in

$$Rr-Ss+Tt+V(s^2-rt) = U$$

über, oder, was dasselbe ist, die Grössen S, U, V gehen in $-S$, V, U über, so dass die hier betrachtete Transformation mit der in (11.), (12.) gegebenen völlig übereinstimmt.

Aus der Vergleichung von (49.), (50.) ergiebt sich aber, dass es gestattet ist, die Grössen

$$(51.) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial u}{\partial q}$$

beziehungsweise mit

$$(52.) \quad dp, \quad dq, \quad -dx, \quad -dy$$

zu vertauschen.

Durch Verbindung der in (11.), (12.) und in (51.), (52.) ausgedrückten Reciprocitätssätze gelangt man leicht zu dem in (43.), (44.) angegebenen.

Es ist zu bemerken, dass diese Reciprocitätssätze von dem bekannten *Legendre*schen sich unterscheiden, obgleich diese alle als aus derselben Quelle herstammend anzusehen sind.

12. Ich habe mir in dieser Abhandlung nur vorgenommen, die Theorie der Integration von (1.), unter der Bedingung, dass ein erstes Integral von der Form $F(u, v) = 0$ vorhanden sei, zu betrachten. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so muss man zu verschiedenen speciellen Methoden Zuflucht nehmen, z. B. zu den *Legendre*schen und *Laplace*schen Umwandlungen, schon in diesem Journal (Band 58) von den Herren *Fuchs* und *Hoppe* durch ein besonderes Beispiel erläutert, — zu den symbolischen Methoden, u. s. w. Eine allgemeine Methode ist bis jetzt nicht aufgestellt worden. Wenn ich über die Möglichkeit und die Beschaffenheit einer solchen Methode eine Vermuthung ausdrücken darf, so wollte ich auf ein Verallgemeinern der schönen Methode, welche *Cauchy* zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung angewandt hat, in Verbindung mit der von *Pfaff* und *Jacobi* herrührenden Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung hinweisen.

Cork, in Irland, 1862.

Zur Theorie der quadratischen Reste.

(Von Herrn *Stern* zu Göttingen.)

---

1. In dem ersten Hefte dieses Bandes des Journals habe ich die Frage behandelt, wenn man die Zahlen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ auf alle möglichen Weisen mit $+$ und $-$ verbindet, während p eine Primzahl ist, wie viele dieser Aggregate, nach dem Modul p, einem quadratischen Reste oder Nichtreste oder Null congruent sind. Eine ähnliche Frage ist folgende. Wenn man die sämmtlichen quadratischen Reste einer Primzahl p auf alle möglichen Weisen mit $+$ oder $-$ verbindet, wie viele dieser Aggregate werden einem quadratischen Reste oder einem quadratischen Nichtreste oder Null congruent sein? Die Zahl $p=3$ bleibt hierbei, da sie nur einen einzigen quadratischen Rest hat, von selbst ausgeschlossen.

Da im Folgenden nur von *quadratischen* Resten die Rede ist, so werde ich diese, der Kürze halber, nur *Reste* nennen, sowie die *quadratischen* Nichtreste nur *Nichtreste*. Die einzelnen Reste sollen durch $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{1}{2}(p-1)}$ bezeichnet werden und irgend einer derselben durch a; ebenso die einzelnen Nichtreste durch $b_1, b_2, \ldots b_{\frac{1}{2}(p-1)}$ und irgend einer derselben durch b. Ferner soll r eine Wurzel der Gleichung $x^p-1=0$ bedeuten (die Einheit ausgenommen) und zwar wählen wir dafür den einfachsten Werth, also

$$r = \cos\frac{2\pi}{p} + \sin\frac{2\pi}{p}\cdot i.$$

Diesem entsprechend sei

$$\Pi(1+r^a) = (1+r^{a_1})(1+r^{a_2})\ldots(1+r^{a_{\frac{1}{2}(p-1)}}),$$

woraus sich von selbst die Bedeutung von $\Pi(1+r^b)$, $\Pi(1-r^a)$, $\Pi(1-r^b)$, u. s. w. ergiebt.

2. Die oben angedeutete Frage lässt sich auf eine andere zurückführen. Addirt man nemlich die sämmtlichen Reste der Zahl p in der Weise, dass man k derselben mit dem $+$ Zeichen, die übrigen mit dem $-$ Zeichen nimmt, so ist dieses Aggregat, nach dem Modul p, der Zahl congruent, die man erhält, wenn man nur die k positiven Reste addirt und die Summe mit 2 multiplicirt. Bezeichnet man nemlich diese Summe durch S, die Summe der negativen Reste durch $-s$, so hat man $S-s=2S-(S+s)$. Nun ist

$S+s \equiv 0$, also $S-s \equiv 2S$. Statt die Zahlen zu suchen, welchen die aus sämmtlichen Resten, von denen k positiv, die übrigen negativ sind, gebildeten Aggregate congruent sind, hat man daher nur die Zahlen zu suchen, welchen die Combinationen *) der k^{ten} Classe, gebildet aus den mit 2 multiplicirten Resten, congruent sind, indem man die in jeder Combination enthaltenen Elemente mit + verbindet. Und demnach kann man, statt der im vorigen §. angegebenen Frage, folgende stellen: Man multiplicirt die einzelnen Reste mit 2 und bildet aus den so erhaltenen Zahlen als Elementen sämmtliche Combinationen aus allen Classen, indem man die in jeder Combination enthaltenen Zahlen mit + verbindet. Wie viele dieser Combinationen werden einem Reste oder Nichtreste oder Null congruent sein?

Es wird hierbei nur zu beachten sein, dass einem der Aggregate aus sämmtlichen Resten keine Combination entspricht, demjenigen nemlich, bei welchem sämmtliche Reste das — Zeichen haben. Da aber dieses Aggregat $\equiv 0$ ist, so wird man nur die Anzahl der Combinationen die $\equiv 0$ sind, um eine Einheit zu vermehren haben, wenn man die Anzahl der Aggregate, die $\equiv 0$ sind, finden will.

Es wird aber offenbar genügen, die Combinationen aus den einfachen Resten, statt aus dem Doppelten derselben, zu bilden. Denn, wenn 2 ein Rest ist, so hat man in beiden Fällen dieselben Elemente; ist dagegen 2 ein Nichtrest, so entspricht jedem Reste a oder Nichtreste b, welchem eine aus den Resten gebildete Combination congruent ist, ein Nichtrest $2a$ oder Rest $2b$, welchem die aus dem Doppelten dieser Reste gebildete Combination congruent ist.

Giebt es m Combinationen aus den Resten, welche einer Zahl k congruent sind, so sage ich: die Zahl k kommt m mal unter den Combinationen vor. Es ist also die Frage zu beantworten, wie oft jede Zahl, Null eingeschlossen, unter den Combinationen aus den Resten vorkommt.

3. Man setze

$$(1.)\quad \Pi(1+r^a) = (1+r)(1+r^4)\ldots\left(1+r^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\right) = 1+A_1 r+A_2 r^2+\ldots+A_p r^p.$$

Die Zahlen A_1, A_2, ... A_p geben also an, wie oft die Zahlen 1, 2, ... 0 unter den Combinationen aus den Resten vorkommen. Nun ist zunächst leicht zu sehen, dass unter diesen Combinationen alle Reste gleich oft und auch

*) Unter Combinationen werden im Folgenden immer Combinationen ohne Wiederholung verstanden.

alle Nichtreste gleich oft vorkommen. Man kann sogar noch allgemeiner beweisen, dass dies bei jeder einzelnen Combinationsclasse der Fall sein muss. Ist die in der k^{ten} Classe vorkommende Combination $a_1+a_2+\cdots+a_k$ einem Reste congruent, so dass man $a_1+a_2+\cdots+a_k\equiv a$ hat, und multiplicirt man diese Congruenz mit allen einzelnen Resten, so erhält man $\frac{1}{2}(p-1)$ Congruenzen, die ebenso viel Combinationen der k^{ten} Classe repräsentiren, von denen jede einem anderen Reste congruent ist. Sobald also unter den Combinationen der k^{ten} Classe *ein* Rest vorkommt, müssen *alle* Reste darunter vorkommen. Zugleich müssen alle diese Reste gleich oft vorkommen. Käme nemlich der Rest a_r unter den Combinationen m mal vor, der Rest a_s aber nicht so oft, so dass man also m Congruenzen von der Form $a_1+a_2+\cdots+a_k\equiv a_r$ hätte, so liesse sich jedenfalls ein Rest a_t finden, welcher der Congruenz $a_r a_t\equiv a_s$ genügte. Indem man also jene m Congruenzen mit a_t multiplicirte, erhielte man m Congruenzen, welche ebenso viel Combinationen der k^{ten} Classe aus den Resten repräsentiren, die congruent a_s wären, gegen die Voraussetzung. Man beweist ebenso, dass auch alle Nichtreste in gleicher Zahl in jeder Combinationsclasse vorkommen. Es folgt ferner, dass auch bei den Combinationen aus den Nichtresten in jeder Combinationsclasse alle Reste gleich oft und alle Nichtreste gleich oft vorkommen müssen. Zugleich ist klar, dass, wenn unter den Combinationen irgend einer Classe aus den Resten jeder Rest m mal und jeder Nichtrest n mal vorkommt, unter den Combinationen derselben Classe aus den Nichtresten jeder Rest n mal und jeder Nichtrest m mal vorkommen muss. Denn aus jeder Combination der Reste, welche einem Reste oder einem Nichtreste congruent ist, ergiebt sich, wenn man die einzelnen Elemente dieser Combination mit einem Nichtreste multiplicirt, eine Combination derselben Classe aus den Nichtresten, die einem Nichtreste oder Reste congruent ist. Die Null muss dagegen unter den Combinationen aus den Resten ebenso oft vorkommen, als unter den Combinationen aus den Nichtresten.

4. Setzt man

$$\Sigma r^a = r^{a_1}+r^{a_2}+\cdots+r^{a_{\frac{1}{2}(p-1)}},$$

$$\Sigma r^b = r^{b_1}+r^{b_2}+\cdots+r^{b_{\frac{1}{2}(p-1)}},$$

$$l = 1+A_p$$

und nimmt man an, dass die Reste m mal, die Nichtreste n mal unter den Combinationen aus den Resten vorkommen, so kann man statt der Gleichung (1.)

auch schreiben:

$$(2.) \qquad \Pi(1+r^a) = l+m\Sigma r^a+n\Sigma r^b,$$

woraus

$$\Pi(1+r^b) = l+n\Sigma r^a+m\Sigma r^b$$

folgt. Aus

$$\Pi(1-r^a) = \Pi\left(1-\cos\frac{2a\pi}{p}-\sin\frac{2a\pi}{p}i\right)$$

folgt, wegen $\sin\frac{2a\pi}{p} = 2\sin\frac{a\pi}{p}\cos\frac{a\pi}{p}$ und $1-\cos\frac{2a\pi}{p} = 2\left(\sin\frac{a\pi}{p}\right)^2$

$$\Pi(1-r^a) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}(2i)^{\frac{1}{2}(p-1)}\Pi\sin\frac{a\pi}{p}\cdot e^{\Sigma a\cdot\frac{\pi}{p}i},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und Σa die Summe der Reste bezeichnet. Da nun $e^{\pi i} = -1$, und Σa und $\frac{\Sigma a}{p}$ zugleich gerade oder ungerade sind, so hat man auch

$$(3.) \qquad \Pi(1-r^a) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}(2i)^{\frac{1}{2}(p-1)}\Pi\sin\frac{a\pi}{p}(-1)^{\Sigma a}$$

und ebenso findet man

$$\Pi(1-r^b) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}(2i)^{\frac{1}{2}(p-1)}\Pi\sin\frac{b\pi}{p}(-1)^{\Sigma b}.$$

5. Sei nun $p = 4\nu+3$, dann entspricht jedem Reste a ein Nichtrest $p-a$, man hat daher $\Pi\sin\frac{a\pi}{p} = \Pi\sin\frac{b\pi}{p}$ und

$$\frac{\Pi(1-r^a)}{\Pi(1-r^b)} = (-1)^{\Sigma a-\Sigma b}.$$

Nun ist $\Sigma a+\Sigma b = \frac{p(p-1)}{2}$ eine ungerade Zahl, von den zwei Zahlen Σa, Σb ist also immer die eine gerade, die andere ungerade, folglich

$$(4.) \qquad \frac{\Pi(1-r^a)}{\Pi(1-r^b)} = -1.$$

Ist nun $p = 8k+7$, also 2 ein Rest, so ist

$$\Pi(1+r^a)\Pi(1-r^a) = \Pi(1-r^{2a}) = \Pi(1-r^a),$$
$$\Pi(1+r^b)\Pi(1-r^b) = \Pi(1-r^{2b}) = \Pi(1-r^b),$$

d. h.

$$(5.) \qquad \Pi(1+r^a) = 1, \qquad \Pi(1+r^b) = 1.$$

Ist $p = 8k+3$, also 2 ein Nichtrest, so ist

$$\Pi(1+r^a)\Pi(1-r^a) = \Pi(1-r^b),$$

mithin nach (4.)

$$(6.) \qquad \Pi(1+r^a) = -1, \qquad \Pi(1+r^b) = -1.$$

Für die Zahlen $p = 8k+7$ folgt mithin aus (2.)

$$A_p + m\Sigma r^a + n\Sigma r^b = 0,$$

welcher Gleichung nur Genüge geleistet werden kann, wenn

$$A_p = m = n.$$

Nun ist die Anzahl aller Combinationen aus den $\frac{1}{2}(p-1)$ Resten

$$A_p + (m+n)\left(\frac{p-1}{2}\right),$$

also nach dem Vorhergehenden gleich pA_p, andererseits ist diese Anzahl $= 2^{\frac{1}{2}(p-1)}-1$, mithin

$$A_p = m = n = \frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)}-1}{p} = A_1 = A_2 = \cdots = A_{p-1}.$$

Ist dagegen $p = 8k+3$, so hat man nach (6.)

$$l + m\Sigma r^a + n\Sigma r^b = -1,$$

oder

$$2 + A_p + m\Sigma r^a + n\Sigma r^b = 0.$$

Damit diese Gleichung bestehen kann, muss also

$$2 + A_p = m = n$$

sein. Man hat mithin

$$A_p + 2(2 + A_p)\left(\frac{p-1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)}-1,$$

d. h.

$$A_p = \frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)}+1}{p} - 2,$$

$$m = n = \frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)}+1}{p} = A_1 = A_2 = \cdots = A_{p-1}.$$

Hieraus folgt demnach der Satz:

Bildet man aus den Resten einer Primzahl $p = 4\nu+3$ sämmtliche Combinationen, so kommen unter diesen alle Reste und alle Nichtreste gleich oft vor und zwar jeder $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)}\pm 1}{p}$ mal, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $p = 8k+3$ oder $8k+7$ ist. Die Null kommt im ersten Falle $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)}+1}{p} - 2$ mal, im zweiten $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)}-1}{p}$ mal vor.

Uebrigens ergiebt sich aus dem Vorhergehenden von selbst, dass dasselbe Verhältniss auch bei den Combinationen aus den Nichtresten stattfindet.

6. Setzt man noch immer voraus, dass $p = 4\nu+3$, so hat man

$$\Pi(1-r^a) = (1-r)(1-r^4)\dots\left(1-r^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\right),$$

$$\Pi(1-r^b) = (1-r^{-1})(1-r^{-4})\dots\left(1-r^{-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\right),$$

und, wie bekannt,

$$(7.) \qquad \Pi(1-r^a)\Pi(1-r^b) = p.$$

Nun setze man

$$(8.) \qquad \Pi(1-r^a) = \beta_0+\beta_1 r \ +\beta_2 r^2 \ +\dots+\beta_{p-1}r^{p-1},$$

also

$$(8'.) \qquad \Pi(1-r^b) = \beta_0+\beta_1 r^{-1}+\beta_2 r^{-2}+\dots+\beta_{p-1}r^{-(p-1)}.$$

Hier bezeichnet β_h, wenn nicht $h=0$ ist, wie oft die Zahl h in den geraden Classen der aus den Resten gebildeten Combinationen mehr vorkommt als in den ungeraden, dagegen ist $\beta_0 = 1+\beta_p$, wo β_p andeutet, wie oft Null in den geraden Classen mehr vorkommt als in den ungeraden.

Aus den Gleichungen (7.) und (8.) ergiebt sich sofort, wie ich schon bei einem ähnlichen Fall in meinem früheren Aufsatze §. 5 gezeigt habe,

$$(9.) \qquad \beta_0^2+\beta_1^2+\dots+\beta_{p-1}^2 = p-1,$$

$$(10.) \qquad \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} = 0.$$

Da aber $A_k = \dfrac{2^{\frac{1}{2}(p-1)} \pm 1}{p}$, also eine ungerade Zahl ist, wenn k eine der Zahlen $1, 2, \dots p-1$ ist, so kann keine der Zahlen $\beta_1^2, \beta_2^2, \dots \beta_{p-1}^2$ Null sein. Damit die Gleichung (9.) bestehen kann, muss also $\beta_0=0$, d. h. $\beta_p = -1$ sein, woraus mithin folgt, dass die Null in den geraden Classen einmal weniger vorkommt als in den ungeraden. Es folgt ferner, dass jede der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{p-1}$ der positiven oder negativen Einheit gleich ist, und zwar muss nach (10.) die Hälfte dieser Zahlen positiv und die andere Hälfte negativ sein. Es kommt also nur noch darauf an, das Zeichen allgemein zu bestimmen.

Aus der bekannten Gleichung

$$\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{2\pi}{p}\sin\frac{3\pi}{p}\cdots\sin\frac{p-1}{p}\pi = \frac{p}{2^{p-1}}$$

folgt, da $p = 4\nu+3$,

$$\left[\Pi\sin\frac{a\pi}{p}\right]^2 = \frac{p}{2^{p-1}}$$

und, da $\Pi \sin \frac{a\pi}{p}$ positiv ist,

$$\Pi \sin \frac{a\pi}{p} = \frac{\sqrt{p}}{2^{\frac{1}{2}(p-1)}}.$$

Mithin nach Gleichung (3.)

$$\Pi(1-r^a) = (-i)^{\frac{1}{2}(p-1)} \sqrt{p}\,(-1)^{\Sigma a}.$$

Ferner ist

$$\Sigma r^a - \Sigma r^b = r - r^{-1} + r^4 - r^{-4} + \cdots + r^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} - r^{-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} = i\,\Sigma 2 \sin \frac{2a\pi}{p},$$

aber, wie bekannt,

$$\Sigma 2 \sin \frac{2a\pi}{p} = \sqrt{p},$$

also

$$\Sigma r^a - \Sigma r^b = i\sqrt{p}$$

und

$$\Pi(1-r^a) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} (i)^{\frac{1}{2}(p-3)} [\Sigma r^a - \Sigma r^b] (-1)^{\Sigma a}$$

oder

$$(11.) \qquad \Pi(1-r^a) = \pm [\Sigma r^a - \Sigma r^b] (-1)^{\Sigma a},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $p = 8k+7$ oder $= 8k+3$ ist.

Vergleicht man daher diese Formel mit der Formel (8.), so ergiebt sich, dass für $p = 8k+7$ der Werth von β_h entweder $(-1)^{\Sigma a}$ oder $-(-1)^{\Sigma a}$ ist, je nachdem h ein Rest oder Nichtrest von p ist; bei den Zahlen von der Form $8k+3$ ist es umgekehrt.

Man hat demnach den Satz:

Wenn man aus den Resten alle Combinationen bildet, so ist, wenn $p = 8k+7$, der Unterschied der Zahlen, welche angeben wie oft eine Zahl h in den geraden und in den ungeraden Combinationsclassen vorkommt, $(-1)^{\Sigma a}$ oder $-(-1)^{\Sigma a}$, je nachdem h ein Rest oder Nichtrest ist; bei den Zahlen $p = 8k+3$ ist es umgekehrt.

Da, wie oben bemerkt wurde, von den Zahlen Σa, Σb immer die eine gerade, die andere ungerade ist, so kann man statt $-(-1)^{\Sigma a}$ auch $(-1)^{\Sigma b}$ setzen. Bedenkt man ferner, dass 2 ein Rest oder ein Nichtrest ist, je nachdem $p = 8k+7$ oder $8k+3$, so sieht man, dass man statt der Formel (11.) auch schreiben kann:

$$(12.) \qquad \Pi(1-r^a) = [\Sigma r^a - \Sigma r^b] (-1)^{\Sigma 2a},$$

wenn man unter $\Sigma 2a$ die Summe der Zahlen versteht, die man aus den

Zahlen $2a_1, 2a_2 \ldots 2a_{p-1}$ erhält, wenn man von jeder der letzteren die darin enthaltenen Vielfachen von p abzieht. Man kann demnach den obigen Satz auch so aussprechen:

Der Unterschied der Zahlen, welche angeben, wie oft eine Zahl h in den geraden und in den ungeraden Classen der aus den Resten gebildeten Combinationen vorkommt, ist $(-1)^{\Sigma 2a}$ oder $-(-1)^{\Sigma 2a}$, je nachdem h ein Rest oder Nichtrest ist.

Bedient man sich des bekannten Symbols $\left(\frac{h}{p}\right)$, um die positive oder negative Einheit auszudrücken, je nachdem h ein Rest oder Nichtrest von p ist, so ist mithin dieser Unterschied $\left(\frac{h}{p}\right)(-1)^{\Sigma 2a}$. Zugleich folgt alsdann aus §. 5, dass die Zahl h in jedem Falle $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)} - \left(\frac{2}{p}\right)}{p}$ mal unter den Combinationen vorkommt. Sobald also h nicht Null ist, kommt diese Zahl in den *geraden* Combinationsclassen $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)} - \left(\frac{2}{p}\right)}{2p} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{p}\right)(-1)^{\Sigma 2a}$ und in den *ungeraden* $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)} - \left(\frac{2}{p}\right)}{2p} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{p}\right)(-1)^{\Sigma 2a}$ mal vor.

Ferner folgt aus §. 5, dass die Null $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)} - \left(\frac{2}{p}\right)}{p} - \left(1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right)$ mal unter den Combinationen vorkommt. Da sie nun, wie oben gezeigt wurde, in den geraden Classen einmal weniger als in den ungeraden vorkommt, so ist sie in den ungeraden Classen $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)} - \left(\frac{2}{p}\right)}{2p} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{p}\right)$ mal enthalten.

Aus der Formel (8′.) ergiebt sich, dass bei den aus den Nichtresten gebildeten Combinationen der Unterschied der Zahlen, welche angeben, wie oft eine Zahl h in den geraden und in den ungeraden Combinationsclassen vorkommt, $(-1)^{\Sigma 2a}$ oder $-(-1)^{\Sigma 2a}$ ist, je nachdem h ein Nichtrest oder Rest ist, also jedenfalls $-\left(\frac{h}{p}\right)(-1)^{\Sigma 2a}$, woraus sich, in Verbindung mit §. 5, ergiebt, dass jede solche Zahl in den geraden Combinationsclassen $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)} - \left(\frac{2}{p}\right)}{2p} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{p}\right)(-1)^{\Sigma 2a}$ und in den ungeraden $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)} - \left(\frac{2}{p}\right)}{2p} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{p}\right)(-1)^{\Sigma 2a}$ mal vorkommt. Für $h = 0$ bleiben die früheren Formeln.

7. Sei nun $p = 4\nu+1$. Man setze wieder

$$\Pi(1+r^a) = l+m\Sigma r^a+n\Sigma r^b,$$
$$\Pi(1+r^b) = l+n\Sigma r^a+m\Sigma r^b.$$

Nach dem bekannten *Gauss*schen Satze ist aber in diesem Falle

$$\Sigma r^a = \Sigma\cos\frac{2a\pi}{p} = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{p}; \qquad \Sigma r^b = \Sigma\cos\frac{2b\pi}{p} = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{p},$$

also

$$\Pi(1+r^a) = l-\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}\sqrt{p},$$

$$\Pi(1+r^b) = l-\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{2}\sqrt{p}.$$

Nun sind die Zahlen l, m, n wieder zunächst durch die Gleichung (§. 5)

$$(13.) \qquad l+(m+n)\frac{p-1}{2} = 2^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

verbunden. Ist $p = 8k+1$, also 2 ein Rest, so ist mithin

$$\Pi(1+r^a)\Pi(1-r^a) = \Pi(1-r^a), \quad \Pi(1+r^b)\Pi(1-r^b) = \Pi(1-r^b),$$

d. h.

$$(14.) \qquad \Pi(1+r^a) = 1, \qquad \Pi(1+r^b) = 1,$$

und hieraus folgt wieder $l-1 = A_p = m = n$, also, wegen Formel (13.),

$$(15.) \qquad A_p = m = n = \frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)}-1}{p}.$$

Bei den Zahlen von der Form $8k+1$ kommt mithin, wie bei den Zahlen von der Form $8k+7$, unter den Combinationen aus den Resten (sowie auch aus den Nichtresten) jeder Rest und jeder Nichtrest, sowie auch Null, $\frac{2^{\frac{1}{2}(p-1)}-1}{p}$ mal vor.

Bei den Zahlen von der Form $8k+5$ fällt das Resultat weniger einfach aus, wozu folgende Betrachtungen führen.

8. Ist $\frac{x^p-1}{x-1} = X$, so hat man, wie bekannt, $Y^2-pZ^2 = 4X$, wo $Y+Z\sqrt{p} = 2\Pi(x-r^a)$, $Y-Z\sqrt{p} = 2\Pi(x-r^b)$ und Y und Z nach ganzen positiven Potenzen von x geordnete und mit ganzzahligen Coefficienten versehene Reihen sind. Setzt man $x = -1$ und bezeichnet die Werthe, welche dann Y und Z annehmen, durch Y_0 und Z_0, so folgt

$$(16.) \qquad Y_0+Z_0\sqrt{p} = 2\Pi(1+r^a); \qquad Y_0-Z_0\sqrt{p} = 2\Pi(1+r^b).$$

Aus

$$(1+r^a) = 1+\cos\frac{2a\pi}{p}+\sin\frac{2a\pi}{p}i = 2\cos\frac{a\pi}{p}e^{\frac{a\pi}{p}i}$$

folgt, wie in §. 4,

$$\Pi(1+r^a) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)}\Pi\cos\frac{a\pi}{p}(-1)^{\Sigma a}.$$

Da nun $p=4\nu+1$, so ist $\Sigma a=\nu p$ und mithin

$$\Pi(1+r^a) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)}\Pi\cos\frac{a\pi}{p}(-1)^{\nu}.$$

In dem Producte $\Pi\cos\frac{a\pi}{p}$ ist aber die Anzahl der negativen Factoren gerade oder ungerade, je nachdem ν eine gerade oder ungerade Zahl ist; demnach ist $\Pi(1+r^a)$ jedenfalls positiv, und bezeichnet man den absoluten Werth von $\Pi\cos\frac{a\pi}{p}$ durch W, so hat man

$$\Pi(1+r^a) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)}W.$$

Auch ist $\Pi(1+r^a)\Pi(1+r^b)=1$, also

$$\Pi(1+r^b) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(p-1)}W}.$$

Demnach ist

$$Y_0+Z_0\sqrt{p}=2^{\frac{1}{2}(p+1)}W; \qquad Y_0-Z_0\sqrt{p}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(p-3)}W}.$$

Es sind also Y_0 und Z_0 ganze Zahlen, die durch Kreisfunctionen bestimmt sind (oder Null). Man bezeichne durch y_0 und z_0 die absoluten Werthe von Y_0 und Z_0. Nun zeigen die vorstehenden Gleichungen, dass jedenfalls Y_0 positiv ist, also $Y_0=y_0$.

Ist $p=8k+1$, so folgt aus (14.) und (16.)

$$Y_0=y_0=2, \qquad Z_0=z_0=0.$$

9. Bezeichnet man durch Y' und Z' das, was aus Y und Z wird, wenn man $x=1$ setzt, so folgt aus den obigen Gleichungen

$$Y'+Z'\sqrt{p} = 2\Pi(1-r^a),$$
$$Y'-Z'\sqrt{p} = 2\Pi(1-r^b).$$

Aus Formel (3.) folgt aber, da $p=4\nu+1$,

$$\Pi(1-r^a)=2^{\frac{1}{2}(p-1)}\Pi\sin\frac{a\pi}{p}; \qquad \Pi(1-r^b)=2^{\frac{1}{2}(p-1)}\Pi\frac{\sin b\pi}{p},$$

so dass Y' und Z' ebenfalls durch Kreisfunctionen bestimmt sind. Nun hat schon *Dirichlet* gezeigt (Bd. 18 dieses Journals p. 270), dass Y' positiv, Z' negativ ist. Bezeichnet man also die absoluten Werthe von Y' und Z' durch y' und z', so hat man

$$(17.) \qquad y'-z'\sqrt{p}=2\Pi(1-r^a), \qquad y'+z'\sqrt{p}=2\Pi(1-r^b).$$

Nun setze man

$$\Pi(1-r^a) = L+M\Sigma r^a+N\Sigma r^b.$$

Hier bezeichnet also $L-1$ wie oft Null, M wie oft jeder Rest, N wie oft jeder Nichtrest in den geraden Classen der aus den Resten gebildeten Combinationen mehr vorkommt als in den ungeraden. Setzt man wieder für Σr^a und Σr^b ihre Werthe, so hat man

$$\Pi(1-r^a) = L-\frac{M+N}{2}+\frac{M-N}{2}\sqrt{p}$$

und mithin nach (17.)

$$(18.) \qquad 2L-(M+N)=y'; \qquad N-M=z'.$$

Bekanntlich enthalten aber die ungeraden Combinationsclassen, bei jeder Elementenzahl, eine Combination mehr als die geraden, man hat daher auch noch die Gleichung

$$L-1+(M+N)\frac{p-1}{2} = -1$$

oder

$$(19.) \qquad 2L+(M+N)(p-1) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der ersten Gleichung (18.) folgt zunächst

$$M+N = -\frac{y'}{p}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der zweiten Gleichung (18.) und setzt zugleich $y'=pt'$, so findet man mithin

$$(20.) \qquad \begin{cases} M = -\dfrac{t'+z'}{2}, \\ N = \dfrac{z'-t'}{2}, \\ L = \dfrac{p-1}{2}t'. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist also bei den Zahlen $p=4\nu+1$ der Unterschied der Vertheilung der Reste und Nichtreste unter den geraden und ungeraden Classen der aus den Resten gebildeten Combinationen vollkommen bestimmt.

Da $y_1^2-pz_1^2=4p$, also $z_1^2-pt_1^2=-4$, so folgt $z'>t'$, ausgenommen wenn $p=5$, wo $z'=t'=1$. Aus dem Werthe von N folgt also, dass die *Nichtreste* in den *geraden* Classen häufiger vorkommen als in den *ungeraden*, ausgenommen, wenn $p=5$. Dagegen zeigt der Werth von M, dass die *Reste* in den *ungeraden* Classen häufiger vorkommen als in den *geraden*. Zugleich zeigt der Werth von L, dass auch Null in den geraden Classen häufiger vor-

kommt als in den ungeraden, und dass die Differenz $L-1$ immer eine ungerade Zahl ist.

Für die Combinationen aus den Nichtresten erhält man ebenso aus

$$\Pi(1-r^b) = L'+M'\Sigma r^a+N'\Sigma r^b$$

die Gleichungen

$$M' = \frac{z'-t'}{2} = N,$$

$$N' = -\frac{z'+t'}{2} = M,$$

$$L' = \frac{p-1}{2}t' = L.$$

10. Die Erörterungen des vorhergehenden §. gelten gleichmässig für die Zahlen $8k+1$ wie für die Zahlen $8k+5$. Für die ersteren findet man nun durch die Verbindung der Gleichungen (15.) und (20.), wie oft jede Zahl in den geraden und in den ungeraden Combinationsclassen vorkommt.

Ist $p = 8k+5$, so hat man

$$\Pi(1-r^a)\Pi(1+r^a) = \Pi(1-r^b).$$

Aus den Gleichungen (16.) und (17.) folgt daher

$$(y'-z'\sqrt{p})(Y_0+Z_0\sqrt{p}) = 2(y'+z'\sqrt{p}),$$

und da $Y_0 = y_0$

$$y_1Y_0-z_1Z_0p = 2y',$$
$$y_1Z_0-Y_0z_1 = 2z'.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung $y_1^2-pz_1^2 = 4p$ ergiebt sich hieraus

$$Y_0 = \frac{y_1^2+pz_1^2}{2p} = \frac{z_1^2+pt_1^2}{2},$$

$$Z_0 = \frac{y'z'}{p} = t'z'.$$

Hier ist also Z_0 positiv und mithin gleich z_0, und daher

$$(21.)\quad \begin{cases} y_0+z_0\sqrt{p} = 2\Pi(1+r^a), \\ y_0-z_0\sqrt{p} = 2\Pi(1+r^b). \end{cases}$$

Setzt man nun wieder

$$\Pi(1+r^a) = l+m\Sigma r^a+n\Sigma r^b,$$

so findet man, indem man wie in §. 7 die Werthe von Σr^a und Σr^b substituirt,

$$2l-(m+n) = y_0,$$
$$m-n = z_0.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit der Formel (13.), so erhält man

$$(22.)\quad \begin{cases} l = \dfrac{2^{\frac{1}{2}(p+1)} + (p-1)y_0}{2p}, \\ m = \dfrac{2^{\frac{1}{2}(p+1)} + pz_0 - y_0}{2p}, \\ n = \dfrac{2^{\frac{1}{2}(p+1)} - pz_0 - y_0}{2p}. \end{cases}$$

Die Werthe von l, m, n sind demnach durch Kreisfunctionen bestimmt.

Aus dem Werthe von l folgt

$$l-1 = \frac{2^{\frac{1}{2}(p+1)} - y_0 + (y_0-2)p}{2p},$$

die Zahl, welche angiebt, wie oft die Null unter den Combinationen aus den Resten vorkommt. Die Zahlen m und n können, ihrer Bedeutung nach, niemals negativ sein. Da nun $m-n = z_0$ und $z_0 = t'z'$ nicht Null sein kann, so kann m ebenfalls nicht Null sein und man hat daher jedenfalls $m > n$. Dies giebt den Satz:

Unter den Combinationen aus den Resten einer Primzahl von der Form $8k+5$ kommen die Reste in grösserer Anzahl vor als die Nichtreste.

Hierin unterscheiden sich also die Primzahlen dieser Form wesentlich von den übrigen Primzahlen, bei welchen, nach dem Vorhergehenden, Reste und Nichtreste immer in gleicher Zahl vorkommen.

Aus der Verbindung der Gleichungen (20.) und (22.) ergiebt sich wieder, wie oft jede Zahl in den geraden und in den ungeraden Combinationsclassen vorkommt.

11. Verfolgt man den von *Dirichlet* a. a. O. angegebenen Weg, so findet man noch folgende Resultate.

Ist $p = 8k+1$, so hat man nach Formel (14.)

$$\frac{\Pi(1+r^a)}{\Pi(1+r^b)} = 1 = \frac{\Pi\left(1+e^{\frac{2a\pi}{p}i}\right)}{\Pi\left(1+e^{\frac{2b\pi}{p}i}\right)}.$$

Entwickelt man $\log \dfrac{\Pi\left(1+e^{\frac{2a\pi}{p}i}\right)}{\Pi\left(1+e^{\frac{2b\pi}{p}i}\right)}$ in eine Reihe, so hat man mithin

$$\Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\Sigma e^{\frac{2na\pi}{p}i} - \Sigma e^{\frac{2nb\pi}{p}i}\right] = 0,$$

wo sich die Summation in Beziehung auf n auf alle ganzen positiven Werthe von n bezieht. Da nun, wenn n kein Vielfaches von p ist,

$$(23.) \qquad \Sigma e^{\frac{2na\pi}{p}i} - \Sigma e^{\frac{2nb\pi}{p}i} = \left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p},$$

so folgt, dass für die Primzahlen $p = 8k+1$

$$\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\cdot\frac{1}{n} = 0,$$

wo die Werthe von n, die Vielfache von p sind, ausgeschlossen werden müssen. Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn $p = 8k+7$, da dann die Gleichung (23.) so wie (14.) statt hat.

Ist $p = 8k+5$, so ist

$$\Pi(1+r^a) = \frac{\Pi(1-r^b)}{\Pi(1-r^a)}; \qquad \Pi(1+r^b) = \frac{\Pi(1-r^a)}{\Pi(1-r^b)},$$

also nach Formel (3.)

$$\log\frac{\Pi(1+r^a)}{\Pi(1+r^b)} = 2\log\frac{\Pi(1-r^b)}{\Pi(1-r^a)} = 2\log\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{p}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{p}}.$$

Dies ist mithin der Werth der Reihe $\sqrt{p}\,\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$, wo wieder die Werthe von n, welche Vielfache von p sind, ausgeschlossen sind. Nun ist, wie *Dirichlet* a. a. O. gezeigt hat, $\log\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{p}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{p}} = \sqrt{p}\,\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$. Demnach ist für die Zahlen $p = 8k+5$ der Werth der Reihe $\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$ das Doppelte des Werthes der Reihe $\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$, sobald die Werthe von n, die Vielfache von p sind, ausgeschlossen werden.

Um den Werth von $\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$ für den Fall, dass $p = 8k+3$ ist, zu bestimmen, kann man sich eines Verfahrens bedienen, welches *Dirichlet* ebenfalls in einem ähnlichen Falle angewandt hat und durch welches man den Werth der Reihe überhaupt für alle Zahlen $p = 4\nu+3$ erhält. Da nemlich bei dieser letzteren Zahlenform, für ein bestimmtes n, nach *Gauss*

$$\Sigma\sin\frac{2na\pi}{p} - \Sigma\sin\frac{2nb\pi}{p} = \left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p},$$

so hat man:

$$\sqrt{p}\,\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} = \Sigma\Sigma(-1)^{n-1}\sin\frac{2na\pi}{p}\cdot\frac{1}{n} - \Sigma\Sigma(-1)^{n-1}\sin\frac{2nb\pi}{p}\cdot\frac{1}{n},$$

wo man nun in der Doppelsumme für n *alle* ganzen Zahlen nehmen kann, da die Glieder, die sich auf Werthe von n beziehen, welche Vielfache von p sind, von selbst wegfallen.

Die Summation in Beziehung auf n kann vermittelst der Formel

$$\Sigma(-1)^{n-1}\frac{\sin nz}{n} = \operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}z)$$

ausgeführt werden. In der ersten Doppelsumme ist $z=\frac{2a\pi}{p}$. Man bezeichne durch A_1 die *Summe* der Reste, welche kleiner als $\frac{1}{2}p$ sind, durch A_2 die *Summe* der Reste, die grösser als $\frac{1}{2}p$ sind. Da nun, wenn $a<\frac{1}{2}p$, mithin $z<\pi$ zugleich $\operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{tg}\frac{1}{2}z)=\frac{1}{2}z=\frac{a\pi}{p}$, so wird der auf diese a bezügliche Theil der ersten Doppelsumme $=A_1\frac{\pi}{p}$. Ist dagegen $a>\frac{1}{2}p$, also $z>\pi$, und man setzt $z=2\pi-\varphi$, so ist $\operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{tg}\frac{1}{2}z)=-\frac{1}{2}\varphi=\frac{a\pi}{p}-\pi$, und der auf diese a bezügliche Theil der ersten Doppelsumme wird $A_2\frac{\pi}{p}-s\pi$, wo s die *Anzahl* der a, die grösser als $\frac{1}{2}p$ sind, bedeutet. Bezeichnet man ferner durch B_1 die *Summe* der Nichtreste, die kleiner als $\frac{1}{2}p$ ist, durch B_2 die *Summe* der Nichtreste, die grösser als $\frac{1}{2}p$ ist, so ist die *Anzahl* der letzteren $\frac{1}{2}(p-1)-s$. Man hat daher:

$$\sqrt{p}\,\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{p}[A_1+A_2]-s\pi-\frac{\pi}{p}[B_1+B_2]+[\tfrac{1}{2}(p-1)-s]\pi.$$

Nun ist aber

$$A_2=sp-B_1, \qquad B_2=\left(\frac{p-1}{2}-s\right)p-A_1;$$

substituirt man diese Werthe, so findet man

$$\sqrt{p}\,\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} = 2(A_1-B_1)\frac{\pi}{p},$$

oder

$$\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} = 2(A_1-B_1)\frac{\pi}{p\sqrt{p}}.$$

Ist $p=8k+7$, so ist, wie oben gefunden wurde, der Werth der Reihe gleich Null, also muss in diesem Falle $A_1=B_1$ sein, ein schon bekanntes Resultat. Ist $p=8k+3$, so hat man, wie ebenfalls bekannt ist, $A_1-B_1=\Sigma b-\Sigma a$ *).

---

*) *Liouville* Journ. des Mathém. T. 7, p. 144.

In diesem Falle ist mithin

$$\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} = 2(\Sigma b - \Sigma a)\frac{\pi}{p\sqrt{p}};$$

in demselben Falle ist aber, wie *Dirichlet* bewiesen hat *),

$$\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} = (\Sigma b - \Sigma a)\frac{\pi}{p\sqrt{p}},$$

also wieder $\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$ das Doppelte von $\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$. Fasst man alle vier Fälle zusammen, so ergiebt sich allgemein:

$$\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} = \left[1-\left(\frac{2}{p}\right)\right]\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}.$$

---

*) Mathem. Abhandl. d. K. Ak. d. W. zu Berlin aus d. Jahre 1837, p. 56.

Göttingen, April 1862.

Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten.

(Von Herrn *E. Franke* zu Bernburg.)

Aus der Determinante

$$P = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

lassen sich bekanntlich

$$\left[\frac{n.n-1.n-2 \dots\dots n-m+1}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;\dots\dots\; m}\right]^2 = \mu^2$$

Unterdeterminanten m^{ter} Ordnung von der Form

$$\frac{\partial^m P}{\partial a_{s_1}^{r_1} \partial a_{s_2}^{r_2} \dots \partial a_{s_m}^{r_m}}$$

ableiten, in denen die Ungleichungen

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_m$$
$$s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_m$$

statthaben; andererseits kann man diese μ^2 Unterdeterminanten, als Elemente genommen, zu *einer* Determinante dergestalt zusammenstellen *), dass sämmtliche Glieder derselben Reihe gleiche obere Indices, und sämmtliche Glieder derselben Colonne gleiche untere Indices im Nenner des Quotienten

$$\frac{\partial^m P}{\partial a_{s_1}^{r_1} \partial a_{s_2}^{r_2} \dots \partial a_{s_m}^{r_m}}$$

erhalten, dass ferner die oberen Indices jeder Reihe mit den unteren Indices der Colonne von gleicher Ordnungszahl übereinstimmen.

Diese letztere Uebereinstimmung vorausgesetzt, ist die gemeinschaftliche Reihenfolge in Reihen und Colonnen eine willkürliche, da der Werth der fraglichen Determinante, welche mit

$$D(\partial^m P)$$

*) Man sehe *Cauchy*, sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs, 3e section, des systèmes de quantitées dérivées et de leurs déterminans. Journal de l'école polytechnique, cahier 17.

bezeichnet werden mag, durch gleichzeitige Versetzung entsprechender Reihen und Colonnen nicht verändert wird.

Indem man die Combinationen $r_1, r_2, \ldots r_m$ und $s_1, s_2, \ldots s_m$ in die Symbole x und y zusammenfasst, bezeichne man die Unterdeterminante

$$\frac{\partial^m P}{\partial a_{s_1}^{r_1} \partial a_{s_2}^{r_2} \ldots \partial a_{s_m}^{r_m}} \quad \text{mit} \quad b_y^x,$$

womit angedeutet werden soll, dass dieselbe in der Anordnung der die Determinante $D(\partial^m P)$ bildenden Elemente zu einem Quadrat ihre Stellung in der x^{ten} Reihe und der y^{ten} Colonne gefunden hat; diese Unterdeterminante b_y^x stimmt bis auf das leicht zu bestimmende Vorzeichen mit der folgenden

$$\begin{vmatrix}
a_1^1 & \ldots & a_{s_1-1}^1 & a_{s_1+1}^1 & \ldots & a_{s_2-1}^1 & a_{s_2+1}^1 & \ldots & a_n^1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_1^{r_1-1} & \ldots & a_{s_1-1}^{r_1-1} & a_{s_1+1}^{r_1-1} & \ldots & a_{s_2-1}^{r_1-1} & a_{s_2+1}^{r_1-1} & \ldots & a_n^{r_1-1} \\
a_1^{r_1+1} & \ldots & a_{s_1-1}^{r_1+1} & a_{s_1+1}^{r_1+1} & \ldots & a_{s_2-1}^{r_1+1} & a_{s_2+1}^{r_1+1} & \ldots & a_n^{r_1+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_1^{r_2-1} & \ldots & a_{s_1-1}^{r_2-1} & a_{s_1+1}^{r_2-1} & \ldots & a_{s_2-1}^{r_2-1} & a_{s_2+1}^{r_2-1} & \ldots & a_n^{r_2-1} \\
a_1^{r_2+1} & \ldots & a_{s_1-1}^{r_2+1} & a_{s_1+1}^{r_2+1} & \ldots & a_{s_2-1}^{r_2+1} & a_{s_2+1}^{r_2+1} & \ldots & a_n^{r_2+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_1^n & \ldots & a_{s_1-1}^n & a_{s_1+1}^n & \ldots & a_{s_2-1}^n & a_{s_2+1}^n & \ldots & a_n^n
\end{vmatrix}$$

überein. Ebenso bezeichne man die Unterdeterminante $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{vmatrix}
a_{s_1}^{r_1} & a_{s_2}^{r_1} & \ldots & a_{s_m}^{r_1} \\
a_{s_1}^{r_2} & a_{s_2}^{r_2} & \ldots & a_{s_m}^{r_2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{s_1}^{r_m} & a_{s_2}^{r_m} & \ldots & a_{s_m}^{r_m}
\end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta_y^x,$$

so dass b_y^x und β_y^x nach *Cauchy*s Benennung complementare Terme und die beiden aus je μ^2 Gliedern bestehenden Systeme complementare Systeme sind. Endlich werde der Kürze halber für die Determinante $D(\partial^m P)$ da, wo die genauere Bezeichnung nicht erfordert wird, der Buchstabe B geschrieben.

Dies vorausgesetzt, so hat man bekanntlich folgendes System von Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \beta_1^x b_1^1 + \beta_2^x b_2^1 + \cdots + \beta_\mu^x b_\mu^1 = 0, \\ \vdots \\ \beta_1^x b_1^{\nu-1} + \beta_2^x b_2^{\nu-1} + \cdots + \beta_\mu^x b_\mu^{\nu-1} = 0, \\ \beta_1^x b_1^\nu + \beta_2^x b_2^\nu + \cdots + \beta_\mu^x b_\mu^\nu = P, \\ \beta_1^x b_1^{\nu+1} + \beta_2^x b_2^{\nu+1} + \cdots + \beta_\mu^x b_\mu^{\nu+1} = 0, \\ \vdots \\ \beta_1^x b_1^\mu + \beta_2^x b_2^\mu + \cdots + \beta_\mu^x b_\mu^\mu = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination aus denselben erhält man

$$(2.)\quad B.\beta_y^x = P\cdot\frac{\partial B}{\partial b_y^x}.$$

Man hat nun für jede beliebige Determinante P, wie leicht zu beweisen, die Gleichung:

$$P\cdot\frac{\partial^i P}{\partial a_{y_1}^{x_1}\partial a_{y_2}^{x_2}\partial a_{y_3}^{x_3}\ldots\partial a_{y_i}^{x_i}} = \frac{\partial P}{\partial a_{y_1}^{x_1}}\cdot\frac{\partial^{i-1}P}{\partial a_{y_2}^{x_2}\partial a_{y_3}^{x_3}\ldots\partial a_{y_i}^{x_i}} - \frac{\partial P}{\partial a_{y_2}^{x_1}}\cdot\frac{\partial^{i-1}P}{\partial a_{y_1}^{x_2}\partial a_{y_3}^{x_3}\partial a_{y_4}^{x_4}\ldots\partial a_{y_i}^{x_i}}$$
$$+\frac{\partial P}{\partial a_{y_3}^{x_1}}\cdot\frac{\partial^{i-1}P}{\partial a_{y_1}^{x_2}\partial a_{y_2}^{x_3}\partial a_{y_4}^{x_4}\partial a_{y_5}^{x_5}\ldots\partial a_{y_i}^{x_i}} - \cdots \pm \frac{\partial P}{\partial a_{y_i}^{x_1}}\cdot\frac{\partial^{i-1}P}{\partial a_{y_1}^{x_2}\partial a_{y_2}^{x_3}\ldots\partial a_{y_{i-1}}^{x_i}},$$

aus welcher für die Determinante B mit Rücksicht auf (2.) hervorgeht:

$$P\cdot\frac{\partial^i B}{\partial b_{y_1}^{x_1}\partial b_{y_2}^{x_2}\ldots\partial b_{y_i}^{x_i}} = \beta_{y_1}^{x_1}\cdot\frac{\partial^{i-1}B}{\partial b_{y_2}^{x_2}\partial b_{y_3}^{x_3}\ldots\partial b_{y_i}^{x_i}} - \beta_{y_2}^{x_1}\cdot\frac{\partial^{i-1}B}{\partial b_{y_1}^{x_2}\partial b_{y_3}^{x_3}\partial b_{y_4}^{x_4}\ldots\partial b_{y_i}^{x_i}}$$
$$+\beta_{y_3}^{x_1}\cdot\frac{\partial^{i-1}B}{\partial b_{y_1}^{x_2}\partial b_{y_2}^{x_3}\partial b_{y_4}^{x_4}\partial b_{y_5}^{x_5}\ldots\partial b_{y_i}^{x_i}} - \cdots \pm \beta_{y_i}^{x_1}\cdot\frac{\partial^{i-1}B}{\partial b_{y_1}^{x_2}\partial b_{y_2}^{x_3}\ldots\partial b_{y_{i-1}}^{x_i}}.$$

Hieraus schliesst man leicht, dass, wenn die Gleichung

$$(3.)\quad P^k\cdot\frac{\partial^k B}{\partial b_{y_1}^{x_1}\partial b_{y_2}^{x_2}\ldots\partial b_{y_k}^{x_k}} = B\cdot\begin{vmatrix} \beta_{y_1}^{x_1} & \beta_{y_2}^{x_1} & \ldots & \beta_{y_k}^{x_1} \\ \beta_{y_1}^{x_2} & \beta_{y_2}^{x_2} & \ldots & \beta_{y_k}^{x_2} \\ \vdots & & & \\ \beta_{y_1}^{x_k} & \beta_{y_2}^{x_k} & \ldots & \beta_{y_k}^{x_k} \end{vmatrix}$$

für $k = i-1$ stattfindet, dieselbe auch für $k = i$ gelten muss, so dass, da der

Fall $k = 1$ der Gleichung (3.) in (2.) enthalten ist, die Allgemeingültigkeit von (3.) erwiesen ist *).

Für $k = \mu$ geht aus derselben die bekannte von *Cauchy* am angeführten Orte gegebene Gleichung hervor:

$$(4.) \qquad P^{\mu} = D(\partial^{m} P) . D(\partial^{n-m} P).$$

Um den Werth jeder der beiden complementaren Determinanten zu bestimmen. von welchen die Gleichung (4.) das Product angiebt, betrachte man folgenden besonderen Fall der Gleichung (3.).

---

*) Die stufenweise Verification der Gleichung (3.) unter Voraussetzung von (2.) lässt sich durch folgendes directe Verfahren ersetzen. Man bilde das Product der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_\mu^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_\mu^2 \\ \vdots & & & \\ b_1^\mu & b_2^\mu & \dots & b_\mu^\mu \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \dots & \beta_k^1 & . & . & . & \dots & \beta_\mu^1 \\ \vdots & & & & & & & & \\ \beta_1^k & \beta_2^k & \dots & \beta_k^k & . & . & . & \dots & \beta_\mu^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & . & \dots & 0 \quad 1 \end{vmatrix},$$

welches nach der bekannten Regel für die Multiplication und in Hinblick auf die Gleichungen (1.) die resultirende Determinante giebt:

$$\begin{vmatrix} P & 0 & \dots & . & 0 & b_{k+1}^1 & \dots & b_\mu^1 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P & b_{k+1}^k & \dots & b_\mu^k \\ b_1^{k+1} & . & \dots & . & b_k^{k+1} & b_{k+1}^{k+1} & \dots & b_\mu^{k+1} \\ \vdots & & & & & & & \\ b_1^\mu & . & \dots & . & b_k^\mu & b_{k+1}^\mu & \dots & b_\mu^\mu \end{vmatrix},$$

d. h. es ist

$$B \begin{vmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_k^1 \\ \vdots & & \\ \beta_1^k & \dots & \beta_k^k \end{vmatrix} = P^k \frac{\partial^k B}{\partial b_1^1 \dots \partial b_k^k}.$$

Dieser Beweis ist nichts Anderes als eine Erweiterung desjenigen, welchen ich für die Herleitung der *Jacobi*schen Formeln zur Zurückführung der Unterdeterminanten des adjungirten Systems auf Unterdeterminanten des ursprünglichen gegeben habe, und welcher in dem *Baltzer*schen Buche über Determinanten eine Stelle gefunden hat.

B.

Für jeden Werth von i sei $x_i = y_i$. Ferner theile man die μ Symbole $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, welche die sämmtlichen Combinationen zu m der n Zahlen $1, 2, \ldots n$ darstellen, in zwei Klassen, nämlich

(a.) $x_1 \ldots x_\nu$ diejenigen Combinationen umfassend, in welchen die Zahl 1 nicht vorkommt, und

(b.) $x_{\nu+1} \ldots x_\mu$ diejenigen Combinationen in sich schliessend, in deren jeder die Zahl 1 wohl vorkommt.

Während μ die Anzahl der Combinationen von n Elementen zu m ist, also nach der gewöhnlichen Bezeichnung $\binom{n}{m}$, ist $\nu = \binom{n-1}{m}$ und $\mu - \nu = \binom{n-1}{m-1}$, so dass

$$\nu = \frac{n-1 \,.\, n-2 \ldots n-m}{1 \;.\; 2 \;\ldots\; m}.$$

Nun setze man in (3.) $k = \nu$, so wird

$$(4^*.) \qquad \frac{\partial^\nu B}{\partial b^{x_1}_{x_1} \partial b^{x_2}_{x_2} \ldots \partial b^{x_\nu}_{x_\nu}}$$

die Determinante aller der b, deren oberer und unterer Index zur Klasse (b.) gehört. Da b^x_y die Determinante derjenigen a bezeichnet, deren obere und untere Indices nach Ausschluss der Combinationen x und y von allen Indices übrig bleiben, so ist (4*.) die Determinante aller b, in welchen kein a mit oberem oder unterem Index 1 vorkommt, d. h. (4*.) wird eine Unterdeterminante von $\frac{\partial P}{\partial a^1_1}$ und zwar der Ordnung $m-1$, also

$$= D\Big(\partial^{m-1} \frac{\partial P}{\partial a^1_1}\Big).$$

Geht man nun zu der in Gleichung (3.) vorkommenden Determinante der Grössen β über, so haben dieselben in unserem Falle zu oberen und unteren Indices die sämmtlichen Symbole der Klasse (a.) und da β^x_y aus denjenigen a gebildet ist, deren obere und untere Indices in den Combinationen x und y enthalten sind, so haben wir auch hier sämmtliche β, in welchen kein a mit oberem oder unterem Index 1 vorkommt, und ihre Determinante wird in ähnlicher Weise wie oben

$$= D\Big(\partial^{(n-1)-m} \frac{\partial P}{\partial a^1_1}\Big).$$

Die Gleichung (3.) geht also in diesem Falle über in:

$$(5.) \qquad P^\nu D\Big(\partial^{m-1} \frac{\partial P}{\partial a^1_1}\Big) = D(\partial^m P) D\Big(\partial^{n-1-m} \frac{\partial P}{\partial a^1_1}\Big),$$

woraus man die zu beweisende Gleichung

$$(6.) \qquad D(\partial^m P) = P^\nu = P^{\frac{n-1 \,.\, n-2 \,\ldots\, n-m}{1 \;.\; 2 \;\ldots\; m}}$$

leicht verificirt. Aus dem Bestehen dieser Gleichung würde nämlich, da $\nu = \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!}$ ist, folgen, dass bei unverändertem P eine Vertauschung von m mit $n-m-1$ den Werth der abgeleiteten Determinante nicht ändert, d. h. dass

$$(6^*.) \qquad D(\partial^m P) = D(\partial^{n-1-m} P)$$

ist. Gesetzt nun (6.) gelte für Determinanten aus 1^2, 2^2, ... $(n-1)^2$ Elementen, so würde auch (6*.) für dieselben gelten, man hätte also

$$D\Big(\partial^{m-1} \frac{\partial P}{\partial a_1^1}\Big) = D\Big(\partial^{n-2-(m-1)} \frac{\partial P}{\partial a_1^1}\Big),$$

wodurch (5.) in die zu beweisende Gleichung (6.) übergeht.

Da nun die Gültigkeit der Gleichung (6.) für $n=3$ feststeht, so muss dieselbe allgemein für Determinanten von beliebiger Ordnung Geltung haben*).

Vermittelst der Gleichung (6.) geht der Ausdruck (3.) über in:

$$(7.) \qquad \frac{\partial^k B}{\partial b_{y_1}^{x_1} \partial b_{y_2}^{x_2} \ldots \partial b_{y_k}^{x_k}} = P^{\nu-k} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{y_1}^{x_1} & \beta_{y_2}^{x_1} & \ldots & \beta_{y_k}^{x_1} \\ \beta_{y_1}^{x_2} & \beta_{y_2}^{x_2} & \ldots & \beta_{y_k}^{x_2} \\ \vdots & & & \\ \beta_{y_1}^{x_k} & \beta_{y_2}^{x_k} & \ldots & \beta_{y_k}^{x_k} \end{vmatrix}.$$

Bernburg, 1862.

---

*) Wenn man die Bedingungen der Theilbarkeit ganzer Functionen durch einander in Rücksicht zieht, so würde schon die von *Cauchy* gegebene Gleichung (4.) hinreichen zu beweisen, dass die Determinante $D(\partial^m P)$ sich auf eine Potenz der ursprünglichen Determinante P und zwar auf die ν^{te} reducirt, ein Ergebniss, welches übrigens auch als besonderer Fall in dem von *Sylvester* (Phil. Mag., April 1851) gegebenen Determinantensatz enthalten ist. Nach Gleichung (4.) ist nämlich $D(\partial^m P)$ ein Theiler von P^μ. Aber P ist in Beziehung auf jede Reihe von Grössen a, die einen und denselben oberen oder unteren Index haben, eine lineare Function, und hieraus folgt unmittelbar, dass es keine in P^μ theilbare ganze Function der Grössen a giebt ausser den Functionen der Form cP^λ, wo λ eine der Zahlen 0, 1, 2 ... μ ist und c ein rein numerischer Factor. Die Dimension von $D(\partial^m P)$ ergiebt alsdann sofort $\lambda = \nu = \frac{n-1 \,.\, n-2 \,\ldots\, n-m}{1 \;.\; 2 \;\ldots\; m}$ und der besondere Fall, in welchem von den Grössen a nur die in der Diagonalreihe stehenden a_i^i von der Null verschieden sind, ergiebt $c=1$. — Aber offenbar war es die Absicht des Herrn Verfassers, eine von diesen Betrachtungen unabhängige Herleitung der Gleichung (6.) zu geben, und dies hat derselbe in der geschickten oben ausgeführten Weise geleistet. *B.*

Ueber einige bestimmte Integrale.

(Von *E. Heine* in Halle a. S.)

§. 1. Die Integrale, deren Werth hier ermittelt werden soll, finden ihre Anwendung, wie sich in einer andern Arbeit zeigen wird, in der Theorie der *speciellen Lamé*schen Functionen. An dieser Stelle handelt es sich um die Verallgemeinerung eines Satzes von *Poisson*, nach welchem

$$\int_0^{\pi} \sin\theta_1 \, d\theta_1 \int_0^{2\pi} f[a_1\cos\theta_1 + a_2\sin\theta_1\cos\theta_2 + a_3\sin\theta_1\sin\theta_2]\, d\theta_2$$

sich in ein einfaches Integral

$$2\pi \int_0^{\pi} f[\cos\varphi \cdot \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}]\sin\varphi \, d\varphi$$

verwandeln lässt, oder, wie wir uns ausdrücken können, nach welchem das erste Integral sich nicht verändert, wenn man in demselben a_2 und a_3 mit Null, a_1 aber mit $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ vertauscht. Dieser Satz, auf ein $n-1$ faches Integral übertragen, lautet:

Setzt man

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta_1, \\ x_2 &= \sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \sin\theta_1\sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_n &= \sin\theta_1\sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \end{aligned}$$

so bleibt das $n-1$ fache Integral

$$\int f[a_1x_1 + a_2x_2 + \text{etc.} + a_nx_n]\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}\, d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1},$$

in welchem die a reelle Constante bezeichnen, f eine continuirliche Function ist, und die Integration nach θ_1, θ_2, etc., θ_{n-2} sich von 0 bis π, nach θ_{n-1} von 0 bis 2π erstreckt, ungeändert, wenn man in demselben a_2, a_3, etc., a_n mit Null vertauscht, a_1 aber mit $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\text{etc.}+a_n^2}$.

Da sich nach diesem Satze das $n-1$ fache Integral in das Product einer von f unabhängigen Constanten, nämlich eines leicht zu berechnenden

bekannten $n-2$ fachen Integrals, und eines einfachen Integrals verwandelt, so hat man als *Zusatz:*

Der Werth dieses $n-1$ fachen Integrals ist daher

$$2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\pi} f[\cos\theta\,.\,\sqrt{a_1^2+a_2^2+\text{etc.}+a_n^2}]\sin^{n-2}\theta\,d\theta.$$

Der Vollständigkeit halber fügen wir im §. 2—4 einen Beweis dieses Satzes hinzu, obgleich derselbe Denen, die mit der Theorie der orthogonalen Substitutionen vertraut sind, nichts Neues darbieten wird. Wir geben auch im §. 6—8 noch einen zweiten Beweis, der unabhängig von dieser *allgemeinen* Theorie ist, und beschäftigen uns ausserdem im §. 5 mit einer nahe liegenden Uebertragung des Satzes auf den Fall, in welchem statt der Function f von *einer* linearen Verbindung der x eine Function von mehreren linearen Verbindungen derselben auftritt. Die speciellen Formeln im §. 9—11 sollen in einer späteren Abhandlung angewandt werden.

Erster Beweis.

§. 2. Es seien n Veränderliche X_1, X_2, etc. X_n, welche die Bedingung erfüllen

$$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2 \leqq 1,$$

durch eine orthogonale Substitution mit n anderen Grössen Z_1, Z_2, etc. Z_n verbunden, für die also gleichfalls

$$Z_1^2+Z_2^2+\cdots+Z_n^2 \leqq 1.$$

Es wird dann bekanntlich

$$dX_1\,dX_2\ldots dX_n = dZ_1\,dZ_2\ldots dZ_n.$$

Wenn nun die Grössen x wie oben von den θ abhängen, also dadurch, dass man θ_1, θ_2, etc. θ_{n-2} alle Werthe von 0 bis π, θ_{n-1} von 0 bis 2π giebt, alle Werthe annehmen, für die

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = 1$$

wird; wenn ferner n Grössen z_1, z_2, etc. z_n in entsprechender Art durch Winkel φ_1, φ_2, etc. φ_{n-1} ausgedrückt werden, so setze man

$$X_1 = rx_1;\quad X_2 = rx_2;\quad \ldots;\quad X_n = rx_n;$$
$$Z_1 = \varrho z_1;\quad Z_2 = \varrho z_2;\quad \ldots;\quad Z_n = \varrho z_n.$$

Da ferner, in Folge der orthogonalen Substitution, welche die X und Z verbindet,

$$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2 = Z_1^2+Z_2^2+\cdots+Z_n^2$$

ist, so wird $r=\varrho$.

Man hat bekanntlich

$$dX_1\,dX_2\ldots dX_n = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\,d\theta_1\,d\theta_2\ldots d\theta_{n-1}\,dr,$$

und hieraus

$$\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1} = \sin^{n-2}\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1},$$

ein Resultat, welches uns *den Satz verschafft:*

Bestehen zwischen n Grössen x und eben so vielen anderen z solche lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1 &= c_1' x_1 + c_1'' x_2 + \cdots + c_1^{(n)} x_n, \\ z_2 &= c_2' x_1 + c_2'' x_2 + \cdots + c_2^{(n)} x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n &= c_n' x_1 + c_n'' x_2 + \cdots + c_n^{(n)} x_n, \end{aligned}$$

durch welche identisch

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$$

wird, und drückt man x_1, x_2, etc. x_n und z_1, z_2, etc. z_n durch die je $n-1$ Grössen θ_1, θ_2, etc. θ_{n-1} und φ_1, φ_2, etc. φ_{n-1} vermittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta_1, & z_1 &= \cos\varphi_1, \\ x_2 &= \sin\theta_1\cos\theta_2, & z_2 &= \sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}, & z_n &= \sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

aus, bezeichnet ferner durch ψ eine continuirliche Function, so ist

$$\int\psi[x_1, x_2, \text{etc. } x_n]\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}$$

gleich dem Integrale

$$\int\psi[x_1, x_2, \text{etc. } x_n]\sin^{n-2}\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1},$$

wenn man nach θ_1, etc. θ_{n-2}; φ_1, etc. φ_{n-2} von 0 bis π, nach θ_{n-1} und φ_{n-1} von 0 bis 2π integrirt, und im ersten Integrale die x durch die θ, im zweiten durch die φ ausdrückt.

§. 3. Mit Hülfe dieses Resultats beweist man leicht den Satz des §. 1. Sind zunächst die Constanten a so beschaffen, dass

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1,$$

so setze man in den Formeln des §. 2

$$\psi[x_1, x_2, \text{etc. } x_n] = f[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \text{etc.} + a_n x_n],$$

und nehme ebendaselbst für die c mit unterem Index 1 die a, so dass

$$c_1' = a_1; \quad c_1'' = a_2; \quad \text{etc.}; \quad c_1^{(n)} = a_n$$

gemacht wird. Da hierdurch $\psi[x_1, x_2, \text{etc. } x_n]$ in $f[z_1]$, also nach Einführung der φ in $f[\cos\varphi_1]$ übergeht, so verwandelt sich das Integral des §. 1 in das Product

$$\int_0^\pi f[\cos\varphi_1]\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1 \cdot \int \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1}.$$

Wäre aber

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \varkappa^2$$

und $\varkappa$ nicht gleich 1, so hätte man

$$\psi[x_1, \text{etc. } x_n] = f[a_1 x_1 + \text{etc.} + a_n x_n] = F\left[\frac{a_1}{\varkappa} x + \text{etc.} + \frac{a_n}{\varkappa} x_n\right]$$

gesetzt; würde man nun die Buchstaben $\frac{a_1}{\varkappa}$, etc. $\frac{a_n}{\varkappa}$, F ebenso behandeln wie oben a_1, etc. a_n, f, so würde im ersten Factor des oben stehenden Productes von Integralen $F[\cos\varphi_1]$ statt $f[\cos\varphi_1]$ auftreten, und dieser Factor sich daher in

$$\int_0^\pi f[\varkappa\cos\varphi_1]\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1$$

verwandeln, während der zweite ungeändert bleibt.

§. 4. Um auch den Zusatz im §. 1 zu beweisen, hat man noch diesen zweiten Factor, ein Product von $n-2$ Integralen, zu bestimmen. Hierzu bedient man sich der bekannten Formel

$$\int_0^\pi \sin^s\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^s} \frac{\Gamma(s+1)}{\left(\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)\right)^2},$$

in der s eine positive Zahl bedeutet, und die, mit Hülfe der für ganze s geltenden Formel

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \frac{\Gamma(s)}{2^{s-1}}\sqrt{\pi},$$

in den zu unserem Zwecke bequemeren Ausdruck

$$\int_0^\pi \sin^s\varphi\, d\varphi = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}$$

übergeht. Dieser verwandelt das Product der $n-2$ Integrale sogleich in

$$2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

einen Werth, welchen bereits *Jacobi* *) in nicht wesentlich verschiedener Form in einer Arbeit angegeben hat, aus der wir hier, zur Beleuchtung unsrer Formeln, noch erwähnen, dass das Element

$$\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1}$$

sich auch mit

$$\frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n}$$

vertauschen lässt.

Erweiterung des Satzes im §. 1.

§. 5. Statt der Function f von *einer* linearen Verbindung der Grössen x mag jetzt in dem Integrale des §. 1 die Function

$$f[a_1x_1 + \text{etc.} + a_nx_n;\ b_1x_1 + \text{etc.} + b_nx_n]$$

auftreten, wenn auch die b reelle Constanten bezeichnen.

Es sei zunächst

$$a_1^2 + \text{etc.} + a_n^2 = b_1^2 + \text{etc.} + b_n^2 = 1,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \cos\psi.$$

Macht man nun wieder die Substitution des §. 2, und setzt, wie im §. 3,

$$c_1' = a_1;\quad c_1'' = a_2;\quad \text{etc.};\quad c_1^{(n)} = a_n,$$

so wird wiederum

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \text{etc.} + a_nx_n = z_1 = \cos\varphi_1.$$

Ferner hat man

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \text{etc.} + b_nx_n = \alpha_1z_1 + \alpha_2z_2 + \text{etc.} + \alpha_nz_n,$$

wenn α_1, α_2, etc. α_n folgende Grössen bezeichnen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= b_1c_1' + b_2c_1'' + \cdots + b_nc_1^{(n)},\\
\alpha_2 &= b_1c_2' + b_2c_2'' + \cdots + b_nc_2^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_n &= b_1c_n' + b_2c_n'' + \cdots + b_nc_n^{(n)}.
\end{aligned}$$

Da α_1 nichts Anderes als $a_1b_1 + a_2b_2 + \text{etc.} + a_nb_n$ oder $\cos\psi$ ist, da ferner

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \text{etc.} + \alpha_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \text{etc.} + b_n^2 = 1$$

wird, so kann man setzen:

$$\alpha_1 = \cos\psi;\quad \alpha_2 = \sin\psi\,.\,\mathfrak{a}_2;\quad \alpha_3 = \sin\psi\,.\,\mathfrak{a}_3;\quad \text{etc.};\quad \alpha_n = \sin\psi\,.\,\mathfrak{a}_n,$$

---

*) Dieses Journal Bd. XII, S. 60: De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis etc.

so dass die $\mathfrak{a}$ die Gleichung

$$\mathfrak{a}_2^2+\mathfrak{a}_3^2+\cdots+\mathfrak{a}_n^2 = 1$$

erfüllen, und findet, dass das Integral

$$(a.)\quad \int f[a_1x_1+\text{etc.}+a_nx_n;\ b_1x_1+\text{etc.}+b_nx_n]\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1},$$

in welchem die Grenzen für θ die bekannten 0 und π respective 2π sind, gleich ist dem Integrale

$$\int f[\cos\varphi_1;\ \cos\psi\cos\varphi_1+\sin\psi\sin\varphi_1.u]\sin^{n-2}\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\begin{aligned} u &= \mathfrak{a}_2\xi_2+\mathfrak{a}_3\xi_3+\cdots+\mathfrak{a}_n\xi_n,\\ \xi_2 &= \cos\varphi_2,\\ \xi_3 &= \sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\ &\cdots\cdots\\ \xi_n &= \sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_n. \end{aligned}$$

Das letzte Integral hat in Bezug auf die ξ dieselbe Form wie das Integral im §. 1 in Bezug auf die x; wendet man auf dasselbe den Satz des §. 1 an, *so findet man als Werth von* (*a.*) *das Doppelintegral*

$$2\frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_0^\pi d\varphi_1\int_0^\pi f[\cos\varphi_1;\ \cos\varphi_1\cos\psi+\sin\varphi_1\sin\psi\cos\varphi_2]\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\,d\varphi_2.$$

Wäre

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 &= \varkappa^2,\\ b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 &= \lambda^2, \end{aligned}$$

und $\varkappa$ und λ von 1 verschieden gewesen, so hätte man

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n = \varkappa\lambda\cos\psi$$

gesetzt, und als Werth von (*a.*) dasjenige Doppelintegral gefunden, welches aus dem vorstehenden hervorgeht, wenn man in letzterem der Function f als erstes und zweites Argument respective das $\varkappa$ und λfache des gegenwärtigen giebt.

Aehnliche Formeln erhält man, wenn f von noch mehr als zwei linearen Verbindungen der x abhängt.

Zweiter Beweis des Satzes im §. 1.

§. 6. Bereits am Schlusse des §. 3 hat sich gezeigt, dass es genügt, unseren Satz für den Fall zu beweisen, in welchem $a_1^2+a_2^2+\text{etc.}+a_n^2$ gleich 1

ist. Ferner kann man auch a_n gleich Null setzen und dafür zur selben Zeit a_{n-1} mit $\sqrt{a_{n-1}^2+a_n^2}$ vertauschen; man hat dadurch den Vortheil, dass nicht mehr x_n unter dem Integrale vorkommt. Um das Integral in diese, für den folgenden Beweis bequemere Form zu bringen, setze man

$$\begin{aligned}
a_1 &= b_1\cos\eta_1, & b_1 &= 1,\\
a_2 &= b_2\cos\eta_2, & b_2 &= \sin\eta_1,\\
a_3 &= b_3\cos\eta_3, & b_3 &= \sin\eta_1\sin\eta_2,\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
a_{n-1} &= b_{n-1}\cos\eta_{n-1}, & b_{n-1} &= \sin\eta_1\sin\eta_2\ldots\sin\eta_{n-2},\\
a_n &= b_{n-1}\sin\eta_{n-1}, &&
\end{aligned}$$

so dass $a_{n-1}^2+a_n^2$ mit b_{n-1}^2 übereinstimmt. Es verwandelt sich dann $a_1x_1+\text{etc.}+a_nx_n$ in $b_1x_1\cos\eta_1+b_2x_2\cos\eta_2+\cdots+b_{n-2}x_{n-2}\cos\eta_{n-2}+b_{n-1}\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}.\cos(\theta_{n-1}-\eta_{n-1})$. Führt man nun in dem zu untersuchenden Integrale des §. 1 für $\theta_{n-1}-\eta_{n-1}$ *einen* Integrationsbuchstaben ein, der wiederum θ_{n-1} heissen mag, so hat man auch jetzt nach θ_{n-1} von 0 bis 2π zu integriren, oder, was auf dasselbe hinauskommt, man hat von 0 bis π zu integriren und dann das Integral doppelt zu nehmen. Das $n-1$fache Integral verwandelt sich also in das folgende, gleichfalls $n-1$fache, in dem aber nach allen θ von 0 bis π integrirt wird:

$$2\int f[b_1x_1\cos\eta_1+b_2x_2\cos\eta_2+\text{etc.}+b_{n-2}x_{n-2}\cos\eta_{n-2}+b_{n-1}x_{n-1}]\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}.$$

Nach diesen Vorbereitungen findet man den gesuchten Satz vermittelst wiederholter Anwendung *der Reductionsformel*

$$\int_0^\pi\int_0^\pi F[\cos\eta\cos\varphi+\sin\eta\sin\varphi\cos\varphi_1]\sin^{m+1}\varphi\sin^m\varphi_1\,d\varphi\,d\varphi_1$$
$$=\int_0^\pi F[\cos\varphi]\sin^{m+1}\varphi\,d\varphi\,.\int_0^\pi\sin^m\varphi_1\,d\varphi_1,$$

in der man sich m positiv zu denken hat, und für $\int_0^\pi\sin^m\varphi_1\,d\varphi_1$ seinen Werth aus §. 4, nämlich $\sqrt{\pi}\,\dfrac{\Gamma\frac{m+1}{2}}{\Gamma\frac{m+2}{2}}$ einsetzen kann.

§. 7. *Zum Beweise der Reductionsformel*, also des Satzes, dass das Integral auf der Linken sich nicht ändert, wenn man $\eta=0$ setzt, verwandelt man dasselbe in eines, in welchem nach φ_1 von 0 bis 2π integrirt wird. Setzt man dazu den *Zahlwerth* von $\sin\varphi_1$ statt $\sin\varphi_1$, so bleibt das Element des

Integrals noch continuirlich; wenn man dann von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_1 = 2\pi$, nach φ noch immer von 0 bis π integrirt, so wird das neue Integral das Doppelte des früheren. Durch eine geometrische Betrachtung, welcher *Dirichlet* sich in seinem Beweise des Satzes über die Entwickelung einer Function nach Kugelfunctionen bedient *), zeigt sich auf der Stelle, dass dies Integral seinen Werth nicht ändert, wenn η gleich Null wird. Rein analytisch folgt dasselbe, wenn man für φ und φ_1 neue Veränderliche ψ und ψ_1 durch die Substitution

$$\begin{aligned} \cos\eta\cos\varphi + \sin\eta\sin\varphi\cos\varphi_1 &= \cos\psi, \\ \sin\eta\cos\varphi - \cos\eta\sin\varphi\cos\varphi_1 &= \sin\psi\cos\psi_1, \\ \sin\varphi\sin\varphi_1 &= \sin\psi\sin\psi_1 \end{aligned}$$

einführt. Während φ die Werthe von 0 bis π, φ_1 von 0 bis 2π durchläuft, geht auch ψ von 0 bis π, ψ_1 von 0 bis 2π. Berücksichtigt man, dass auch die Zahlwerthe der m^{ten} Potenzen von $\sin\varphi\sin\varphi_1$ und $\sin\psi\sin\psi_1$ gleich werden, dass ferner

$$\sin\varphi\, d\varphi\, d\varphi_1 = \sin\psi\, d\psi\, d\psi_1$$

ist, so verwandelt sich das neue Integral in

$$\int_0^{\pi} d\psi \int_0^{2\pi} F[\cos\psi]\,(\text{val. num. }\sin\psi\sin\psi_1)^m \sin\psi\, d\psi_1,$$

also in

$$2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} F[\cos\psi]\sin^{m+1}\psi\sin^m\psi_1\, d\psi\, d\psi_1,$$

wodurch die Reductionsformel bewiesen ist.

§. 8. Es ist leicht zu sehen, wie diese Formel das $n-1$fache Integral des §. 6 nach und nach auf die verlangte Form reducirt. Setzt man in ersterer zunächst $m = 0$, η_{n-2}, θ_{n-2} und θ_{n-1} für η, φ und φ_1, ferner

$$u = \cos\eta_{n-2}\cos\theta_{n-2} + \sin\eta_{n-2}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},$$

$$F[u] = f[b_1x_1\cos\eta_1 + b_2x_2\cos\eta_2 + \text{etc.} + b_{n-3}x_{n-3}\cos\eta_{n-3} + b_{n-2}\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-3}.u],$$

so geht das $n-1$fache Integral des §. 6, mit seinem Factor 2, in

$$2\int f[b_1x_1\cos\eta_1 + \cdots + b_{n-3}x_{n-3}\cos\eta_{n-3} + b_{n-2}x_{n-2}]\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\, d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}$$

über, und verwandelt sich auf ähnliche Art, durch wiederholte Anwendung derselben Reductionsformel, schliesslich in den Ausdruck

$$2\int f[b_1x_1]\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\, d\theta_1\ldots d\theta_{n-1},$$

in dem $b_1 = 1$ ist, also in die zu beweisende Formel.

---

*) Dieses Journal Bd. XVII, S. 50, oder Handb. d. K. §. 101, S. 273.

Specielle Fälle.

§. 9. Macht man im §. 1

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=x^2; \qquad f[z]=\frac{1}{(a+iz)^{n-1}},$$

indem man durch a eine reelle positive Constante bezeichnet, so wird das $n-1$fache Integral nach unserem Satze auf das einfache

$$2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-2}\theta\,d\theta}{(a+ix\cos\theta)^{n-1}}$$

reducirt, welches auf viele verschiedene Arten, z. B. vermittelst der Substitution

$$\cos\eta=\frac{a\cos\theta+ix}{a+ix\cos\theta}$$

ausgeführt werden kann, über die man Näheres im Handb. d. K. §. 8 findet. Durch dieselbe geht unser Integral ohne seinen multiplicirenden Factor in

$$\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}}\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\eta\,d\eta=\frac{\sqrt{\pi}}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

über. *Man erhält also schliesslich die Gleichung, in welcher nach θ_1, etc. θ_{n-2} von 0 bis π, nach θ_{n-1} von 0 bis 2π zu integriren ist:*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2.\pi^{\frac{1}{2}n}}\int\frac{\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\,d\theta_1\,d\theta_2\ldots d\theta_{n-1}}{[a+i(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)]^{n-1}}=\frac{1}{[a^2+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2]^{\frac{1}{2}(n-1)}}.$$

§. 10. Von dieser Formel wollen wir hier nur *eine* Anwendung, nämlich auf die Entwickelung der Grösse

$$T=\frac{1}{(1-2\alpha y+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}}$$

nach Potenzen von α machen, indem wir unter $n-1$ eine positive ganze Zahl, die gerade oder ungerade sein kann, und unter α einen hinlänglich kleinen Werth verstehen. Setzt man

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot T=I^0[n,y]+\alpha I^1[n,y]+\text{etc.}+\alpha^s I^s[n,y]+\text{etc.},$$

so ist der Coefficient von α^s, also $I^s[n,y]$ eine endliche, nach Potenzen von y geordnete Reihe, die man im §. 65 des Handb. d. K. findet, wo die Entwickelung von T nach aufsteigenden Potenzen von α für beliebige, ganze und

gebrochene n ausgeführt ist. Es zeigte sich dort, dass der Coefficient von α^s eine einfache ganze Function von y, eine hypergeometrische Reihe ist, die sich auch durch mehrfache Differentiation einer Potenz von y^2-1 nach y darstellen lässt. Hier wo n ganz ist, gelangt man sehr schnell zum Werthe von I, wenn man die bekannten Entwickelungen der beiden Ausdrücke

$$\log(1-2\alpha y+\alpha^2); \quad (1-2\alpha y+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

nach Potenzen von α zu Grunde legt, und diese mehrfach nach y differentiirt. Die so entstehenden *endlichen Reihen* für die I spielen erst in unserer nächsten Arbeit eine Rolle, und sollen dort besprochen werden. Hier genüge die Bemerkung, *dass sie sämmtlich Differentialquotienten nach y, zum Theil von Kugelfunctionen von y, zum Theil von Cosinus der Vielfachen des Winkels* $\arccos y$ *sind.* Es ist unsere Absicht, *hier den Ausdruck der I durch ein bestimmtes Integral zu geben.*

Setzt man $y=\cos\gamma$ und

$$1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2 = (1-\alpha\cos\gamma)^2+\alpha^2\sin^2\gamma,$$

ferner in der Formel des §. 9

$$a=1-\alpha\cos\gamma; \quad a_1=\alpha\sin\gamma; \quad a_2=a_3=\text{etc.}=a_n=0,$$

so wird nach derselben

$$T=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2.\pi^{\frac{1}{2}n}}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1}{[1-\alpha(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\theta_1)]^{n-1}}\cdot\int\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}d\theta_2\ldots d\theta_{n-1}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-2}\theta\, d\theta}{[1-\alpha(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\theta)]^{n-1}}.$$

Hieraus folgt, indem man nach aufsteigenden Potenzen von α entwickelt, *als Ausdruck von I:*

$$I^s[n+1,\cos\gamma]=\frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{1\ .\ 2\ \ \ldots\ \ s}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\theta)^s\sin^{n-1}\theta\, d\theta.$$

Diesem Ausdrucke kann man einen zweiten, ihm gleichen hinzufügen. Setzt man dazu $\alpha\beta=1$, so wird

$$T=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Sigma\beta^{-s}I^s[n,y]=\frac{\beta^{n-1}}{(1-2\beta y+\beta^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}};$$

also wird I^s auch der Coefficient von $\dfrac{\sqrt{\pi}\,\beta^{-s}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ in der Entwickelung von

$\beta^{n-1}(1-2\beta y+\beta^2)^{\frac{1-n}{2}}$ nach absteigenden Potenzen von β. Macht man nun

$$1-2\beta\cos\gamma+\beta^2 = (\beta\cos\gamma-1)^2+\beta^2\sin^2\gamma,$$

und in der Formel des §. 9, indem man sich β und $\cos\gamma$ positiv denkt,

$$a=\beta\cos\gamma-1; \quad a_1=\beta\sin\gamma; \quad a_2=a_3=\text{etc.}=a_n=0,$$

so wird nach derselben

$$\frac{\beta^{n-1}}{(1-2\beta\cos\gamma+\beta^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-2}\theta\,d\theta}{\left(\cos\gamma+i\sin\gamma-\frac{1}{\beta}\right)^{n-1}},$$

also ein zweiter Ausdruck für I gefunden:

$$I[n+1,\cos\gamma] = \frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,s}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}\theta\,d\theta}{(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\theta)^{n+s}}.$$

Die Gleichung, welche aus der Gleichsetzung der beiden so gefundenen Ausdrücke von I entstehen würde, nämlich

$$\int_0^{\pi}(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\theta)^s\sin^{n-1}\theta\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}\theta\,d\theta}{(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\theta)^{n+s}},$$

ist wenigstens für ungerade n bekannt. Man vergl. über dieselbe Handb. d. K. §. 48, S. 136.

§. 11. Auch von dem Satze des §. 5 werden wir später eine Anwendung zu machen haben, und zwar ist für uns der Fall von besonderer Wichtigkeit, in welchem $f[x,y]$ in das Product einer Function von x in eine Function von y zerfällt. Um sogleich anzudeuten, welche Art der Anwendung wir beabsichtigen, wählen wir als Functionszeichen Buchstaben I und I', setzen also $f[x,y]=I[x]I'[y]$; alsdann folgt aus §. 5:

Ist

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n = \cos\psi,$$

so wird das $n-1$fache Integral, zwischen den Grenzen 0 und π respective 2π genommen,

$$\int I[a_1x_1+\cdots+a_nx_n]\,I'[b_1x_1+\cdots+b_nx_n]\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}$$

gleich dem Doppelintegrale

$$2\,\frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_0^{\pi}I[\cos\varphi]\sin^{n-2}\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}I'[\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi_1]\sin^{n-3}\varphi_1\,d\varphi_1.$$

Halle, im September 1862.

Note sur la réalité des racines d'une équation quadratique.

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

A propos du mémoire que vient de publier M. *Hesse* (voir ce Journal t. LX, p. 305) je remarque que si l'une ou l'autre des deux formes

$$(a, b, c, f, g, h)(\ )^2, \qquad (a', b', c', f', g', h')(\ )^2$$

est une forme *définie* (forme qui conserve toujours le même signe pour des valeurs réelles quelconques des variables), l'équation suivante en λ:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda a', & h-\lambda h', & g-\lambda g', & x \\ h-\lambda h', & b-\lambda b', & f-\lambda f', & y \\ g-\lambda g', & f-\lambda f', & c-\lambda c', & z \\ x, & y, & z & \end{vmatrix} = 0$$

aura ses deux racines réelles. En écrivant

$$A = bc-f^2, \quad A' = b'c'-f'^2, \quad A = bc'+b'c-2ff',$$
$$B = ca-g^2, \quad \ldots$$
$$\vdots$$

de manière que $(A, B, C, F, G, H)(\ )^2$ dénote la forme adjointe (ou réciproque) de $(a, b, c, f, g, h)(\ )^2$, cette équation prend la forme

$$(A, \ldots)\widehat{(}(x, y, z)^2-\lambda(A_1, \ldots)\widehat{)}(x, y, z)^2+\lambda^2(A', \ldots)\widehat{)}(x, y, z)^2 = 0,$$

et les racines étant réelles, on doit avoir

$$\square = -4(A, \ldots)\widehat{(}x, y, z)^2(A', \ldots)\widehat{(}x, y, z)^2+[(A_1, \ldots)(x, y, z)^2]^2 = +\cdot$$

Or pour démontrer directement cette proposition, il n'est pas ce me semble possible d'exprimer $\square$ comme une somme de carrés; on a besoin de considérer une forme plus génerale, savoir une somme de carrés multipliés chacun par un coefficient litéral positif. Par exemple, en ne faisant attention qu'au coefficient de x^4, on doit avoir

$$\square_0 = -4(bc-f^2)(b'c'-f'^2)+(bc'+b'c-2ff')^2 = +\cdot$$

Pour en faire la démonstration, on peut exprimer $\square_0$ sous la forme

$$\square_0 = (bc'-b'c)^2+4(bf'-b'f)(cf'-c'f)$$

cequi donne

$$bc\square_0 = (bc-f^2)(bc'-b'c)^2 + [b(cf'-c'f)+c(bf'-b'f)]^2.$$

En effet en y substituant la seconde expression de $\square_0$, on a l'identité

$$4bc(bf'-b'f)(cf'-c'f) = -f^2(bc'-b'c)^2 + [b(cf'-c'f)+c(bf'-b'f)]^2$$

et l'expression pour $bc\square_0$ est ainsi démontrée. Mais en supposant que $(a, b, c, f, g, h)(\ )^2$ soit une forme définie, on a $bc-f^2=+$, donc aussi $bc=+$, et $bc\square_0=(bc-f^2)X^2+Y^2=+$, donc enfin $\square_0=+$. Il serait assez intéressant de trouver une démonstration pareille pour l'expression générale de $\square$.

Londres, 23ième Octobre 1862.

Geometrisches.

(Von Herrn *Joh. Nic. Bischoff* zu München.)

Es seien:

$$(1.) \qquad \varphi + \lambda\varphi' + \mu\varphi'' = 0$$

und

$$(2.) \qquad f = 0$$

die Gleichungen zweier Flächen n^{ter} und m^{ter} Ordnung, von welchen die erste durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 3$ gegebene Punkte geht.

Soll die Fläche (2.) von (1.) im Punkte (x, y, z, s) berührt werden, so hat man die Bedingungen:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \varphi_1 + \lambda\varphi_1' + \mu\varphi_1'' + \nu f_1 = 0, \\ \varphi_2 + \lambda\varphi_2' + \mu\varphi_2'' + \nu f_2 = 0, \\ \varphi_3 + \lambda\varphi_3' + \mu\varphi_3'' + \nu f_3 = 0, \\ \varphi_4 + \lambda\varphi_4' + \mu\varphi_4'' + \nu f_4 = 0, \end{cases}$$

wo ν eine neue Constante bedeutet.

Aus den drei ersten der Gleichungen (3.) ergiebt sich:

$$(4.) \qquad \lambda = \frac{U}{S}, \qquad \mu = \frac{V}{S}, \qquad \nu = \frac{W}{S},$$

wo U, V, S Functionen von der $(2n+m-3)^{ten}$ und W von der $3(n-1)^{ten}$ Dimension sind.

Eliminirt man aus $U=0$, $V=0$ erst φ_1, dann f_1, so folgt das eine Mal: $S(\varphi_2 f_3 - \varphi_3 f_2) = 0$, das andere Mal: $W(\varphi_2 f_3 - \varphi_3 f_2) = 0$. Daher gehen die vier Flächen $U=0$, $V=0$, $W=0$, $S=0$ durch die nämliche Raumcurve K von der Ordnung:

$$(m+2n-3)^2 - \{(m+n-2)^2 - (m-1)(n-1)\} = 3(n-1)(m+n-2).$$

Für den Berührpunkt (x, y, z, s) hat man ausser (2.) noch die Gleichung:

$$(5.) \qquad T = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' & \varphi_1'' & f_1 \\ \varphi_2 & \varphi_2' & \varphi_2'' & f_2 \\ \varphi_3 & \varphi_3' & \varphi_3'' & f_3 \\ \varphi_4 & \varphi_4' & \varphi_4'' & f_4 \end{vmatrix} = 0,$$

und die Fläche (5.) geht selbst durch die eben genannte Curve K. Daher:

Der Ort der Berührpunkte aller Flächen n^{ter} Ordnung, die durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-3$ feste Punkte gehen und eine gegebene Fläche m^{ter} Ordnung berühren, ist eine Raumcurve L von der Ordnung: $m(3n+m-4)$. Oder auch:

Der Ort derjenigen Pole, deren Polarflächen bezüglich der Flächen $\varphi=0$, $\varphi'=0$, $\varphi''=0$ und $f=0$ sich in *einem* Punkt schneiden, ist eine Fläche von der Ordnung $(n-1)^2(n+3m-4)$, während der Durchschnittspunkt der vier Polarflächen eine Fläche von der $(3n+m-4)^{ten}$ Ordnung durchläuft.

Jede Fläche (1.), welche (2.) einfach, doppelt oder mit Rückkehrpunkt berührt, berührt auch die Curve L einfach, doppelt oder dreipunktig; und umgekehrt.

Soll aber die Fläche (1.) die Fläche (2.) mit Rückkehrpunkt berühren, so kommt zu den Bedingungen (3.) noch die folgende hinzu:

$$(6.)\qquad \begin{vmatrix} f_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ f_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ f_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ 0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wo der Kürze wegen

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \varphi_{1,1}+\lambda\varphi'_{1,1}+\mu\varphi''_{1,1}+\nu f_{1,1}, \\ a_{1,2} &= \varphi_{1,2}+\lambda\varphi'_{1,2}+\mu\varphi''_{1,2}+\nu f_{1,2} \end{aligned}$$

u. s. w.

gesetzt wurde.

Führt man in (6.) die Werthe von λ, μ, ν aus (4.) ein, so erhält man die Gleichung einer Fläche F von der Ordnung $(6n+4m-12)$, welche die Curve L in ihren unendlich entfernten Punkten berührt und die Curve K zur Doppellinie hat. Folglich reducirt sich die Anzahl der hier in Betracht kommenden Schnittpunkte von F und L auf:

$$m(3n+m-4)(6n+4m-14)-6m(n-1)(m+n-2) = 4m\{3(n-1)^2+(m-2)(3n+m-4)\}.$$

Daher giebt es $4m\{3(n-1)^2+(m-2)(3n+m-4)\}$ Flächen n^{ter} Ordnung, die durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-3$ feste Punkte gehen und eine gegebene Fläche m^{ter} Ordnung mit Rückkehrpunkt berühren.

Demnach gehen durch 7 gegebene Punkte 24 Flächen 2ter Ordnung so, dass jede derselben eine gegebene Fläche von der nämlichen Ordnung mit Rückkehrpunkt berührt.

In der That seien F_1, F_2, F_3 irgend drei Flächen zweiter Ordnung, die durch die 7 festen Punkte gehen, und F_4 die gegebene Fläche von der nämlichen Ordnung. Dann ist der Ort der Pole P, deren vier Polarebenen bezüglich F_1, F_2, F_3, F_4 im nämlichen Punkt Q sich schneiden, eine Fläche vierter Ordnung Σ^4, der zugleich die Punkte Q angehören, und die durch die Raumcurve sechster Ordnung C^6 geht, auf welcher die Scheitel aller durch die 7 festen Punkte gehenden Kegelflächen zweiter Ordnung liegen. Die Fläche Σ^4 wird von F_4 in einer Curve achter Ordnung C^8 geschnitten, deren Punkte die Berührpunkte der Fläche F_4 mit Flächen aus der Schaar der F_1, F_2, F_3 sind. Lässt man einen Pol auf F_4 sich bewegen, so beschreibt der Schnittpunkt seiner drei Polarebenen bezüglich F_1, F_2, F_3 eine Fläche sechster Ordnung Σ^6, welche zwölf Gerade enthält und die Curve C^6 zur Doppellinie hat, also von der Fläche Σ^4 noch in einer Raumcurve zwölfter Ordnung C^{12} geschnitten wird. Bewegt sich daher ein Pol auf C^8, so beschreibt der Schnittpunkt seiner vier Polarebenen bezüglich F_1, F_2, F_3, F_4 die Curve C^{12}, und bewegt sich ein Pol auf C^{12}, so durchläuft der entsprechende Schnittpunkt C^8. Da jedem Pol p, der auf C^{12} und C^8 zugleich liegt, ein den nämlichen beiden Curven gemeinschaftlicher Punkt q als reciproker entspricht und die Verbindungslinie pq die Fläche F_4 berührt, so berühren sich C^{12} und C^8 selbst in zwölf Punkten p. Jede Fläche aus der Schaar der F_1, F_2, F_3, die durch einen solchen Punkt p oder durch den ihm unendlich nahen reciproken q geht, wird also von der Tangente pq der C^8 berührt. Daher geht durch jeden Punkt p, sowie durch den ihm unendlich nahen reciproken q, je eine Fläche aus der Schaar der F_1, F_2, F_3, welche C^8 dreipunktig, also F_4 mit Rückkehrpunkt berührt. Je zwei solche Flächen fallen aber zusammen, daher reducirt sich die Anzahl 24 auf 12. Jede dieser 12 Flächen kann aber auch als eine solche gelten, welche mit F_4 zwei Berührebenen in zwei aufeinander folgenden Punkten gemein hat.

Fügt man zu den Gleichungen (1.), (2.) und (3.) noch die Gleichung:

$$A\lambda + B\mu + C = 0$$

hinzu, so kann man die Gleichungen (3.) durch die folgenden ersetzen:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 + \mu\Phi_1' + \nu f_1 &= 0,\\
\Phi_2 + \mu\Phi_2' + \nu f_2 &= 0,\\
\Phi_3 + \mu\Phi_3' + \nu f_3 &= 0,\\
\Phi_4 + \mu\Phi_4' + \nu f_4 &= 0,
\end{aligned}$$

wo Φ und Φ' wieder von der n^{ten} Ordnung sind.

Man erhält dann als Anzahl der Flächen n^{ter} Ordnung, die durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-2$ feste Punkte gehen und eine gegebene Fläche m^{ter} Ordnung berühren:

$$m\{(2n+m-3)^2-(m+n-2)^2+(m-1)^2\} = m\{2(n-1)^2+(n+m-2)^2\}.$$

Es giebt also 12 Flächen zweiter Ordnung, die durch 8 feste Punkte gehen und eine andere Fläche F von der nämlichen Ordnung berühren.

In der That die Fläche F schneidet die Raumcurve vierter Ordnung, die durch die acht festen Punkte bestimmt ist, in acht neuen Punkten Q. Der Ort der Scheitel aller durch diese acht Punkte Q gehenden Kegelflächen zweiter Ordnung ist eine Raumcurve sechster Ordnung, welche von der Fläche F in den 12 Berührpunkten der gesuchten Flächen geschnitten wird.

Man nehme jetzt die Gleichungen (1.), (2.) und (5.) zusammen und betrachte λ, μ als Coordinaten eines Punktes in einer festen Ebene E. Jedem System von Werthen λ_1, μ_1 entsprechen zufolge den Gleichungen:

$$\varphi+\lambda_1\varphi'+\mu_1\varphi''=0, \quad f=0 \quad \text{und} \quad T=0$$

$mn(3n+m-4)$ Werthsysteme von (x, y, z). Setzt man diese letzteren in die Gleichung (1.), so erhält man in der Ebene E $mn(3n+m-4)$ Gerade, die sämmtlich durch den Punkt (λ_1, μ_1) gehen. Aendern sich also λ_1, μ_1 auf alle möglichen Arten, so wird in E eine Curve Z von der $mn(3n+m-4)^{ten}$ Klasse beschrieben, deren Ordnung die $m\{2(n-1)^2+(n+m-2)^2\}^{te}$ ist und welche $4m\{3(n-1)^2+(m-2)(3n+m-4)\}$ Rückkehrpunkte hat.

Heisst daher d die Anzahl der Doppelpunkte der Curve Z oder die Anzahl der Flächen (1.), von welchen die Fläche (2.) doppelt berührt wird, so hat man:

$$2d+12m\{3(n-1)^2+(m-2)(3n+m-4)\}+mn(3n+m-4)$$
$$= m\{2(n-1)^2+(m+n-2)^2\}\{m((m+n-2)^2+2(n-1)^2)-1\}$$

oder

$$d=\tfrac{1}{2}m^2\{2(n-1)^2+(m+n-2)^2\}^2-\tfrac{1}{2}m\{38(n-1)^2+(m+n-2)^2+(12m+n-24)(3n+m-4)\}.$$

Für $n=1$ ergiebt sich:

$$d=\tfrac{1}{2}m^2(m-1)^4-\tfrac{1}{2}m(m-1)(13m-24)=\tfrac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m^3-m^2+m-12).$$

Die einer Fläche m^{ter} Ordnung umschriebene Kegelfläche hat demnach, wie auch sonst bekannt ist,

$\tfrac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m^3-m^2+m-12)$ Doppelberühr-
und $4m(m-1)(m-2)$ Wendungsberührebenen.

Für $m=1$ folgt:

$$d = \tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11).$$

Es giebt also $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$ Flächen n^{ter} Ordnung, die durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-3$ feste Punkte gehen und eine gegebene Ebene doppelt berühren; und $12(n-1)(n-2)$ Flächen der nämlichen Ordnung und durch die nämlichen festen Punkte gehend schneiden die gegebene Ebene mit Rückkehrpunkt.

Für $n=m=2$ ergiebt sich $d=22$.

Demnach gehen durch 7 feste Punkte 22 Flächen zweiter Ordnung so, dass jede derselben eine gegebene Fläche der nämlichen Ordnung doppelt berührt. Aber unter diesen 22 Flächen befinden sich auch die früher aufgeführten 12 Flächen, deren jede die gegebene Fläche F_4 in zwei aufeinander folgenden Punkten berührt. Also bleiben nur 10 Flächen übrig, welche durch die 7 festen Punkte gehen und die gegebene Fläche F_4 in zwei getrennten Punkten berühren oder mit letzterer Fläche zwei Kegelschnitte gemein haben. Die zwei Berührpunkte einer jeden dieser 10 Flächen bestimmen eine Gerade, die ganz auf der oben genannten Fläche Σ^4 liegt. In der That schneiden sich auch die früher erwähnten Curven C^6 und C^{12} in 10 Punkten und jeder dieser Punkte ist ein solcher Pol, dessen vier Polarebenen bezüglich F_1, F_2, F_3, F_4 durch die nämliche Gerade gehen. Diese 10 Pole und die ihnen entsprechenden Geraden gehören dem von Herrn *Steiner* zuerst entdeckten Pentaeder an.

München, 1862.

Ueber die Perioden, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist.

(Von Herrn *Fuchs*.)

In einer Abhandlung (geles. in der Berl. Acad. der Wissensch. am 18. Decbr. 1856) hat Herr *Kummer* seiner Theorie der idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, Perioden zu Grunde gelegt, welche mit Hülfe einer in n nicht enthaltenen Primzahl q aus diesen Wurzeln, analog den gewöhnlichen Kreistheilungsperioden für eine Primzahl, gebildet sind. Bei solchen Perioden tritt ein Umstand ein, der sie wesentlich von den Perioden für Primzahlen unterscheidet, dass sie nämlich verschwinden können. Da man nun ebenso viele Systeme von Perioden aufstellen kann, als man verschiedene Primzahlen q wählt, so ist zuerst zu untersuchen, für welche Zahlen n *überhaupt* Systeme mit verschwindenden Perioden vorhanden sind; und wenn n den nothwendigen Anforderungen genügt, so entsteht alsdann die Frage, *welche* von den verschiedenen Systemen diese Eigenschaft haben. — Die Erörterung dieser Fragen war in der obenerwähnten Abhandlung unnöthig, da, wie Herr *Kummer* selbst bemerkt, weder die Methode noch die Resultate derselben durch das Verschwinden der Perioden irgendwie modificirt werden. Jedoch ist daselbst schon angeführt, wie n beschaffen sein müsse, damit überhaupt Systeme mit verschwindenden Perioden vorhanden seien. Ich erlaube mir nun im Folgenden an den Beweis dieser und einiger anderen ebendaselbst befindlichen Bemerkungen des Herrn *Kummer* eine genauere Untersuchung der obigen Fragen, die an sich nicht ohne Interesse zu sein scheinen, anzuschliessen.

Es mögen hier die Definition und die Grundeigenschaften der eben erwähnten Perioden, wie sie in der Abhandlung des Herrn *Kummer* enthalten sind, in aller Kürze vorangeschickt werden.

Es sei ω eine primitive Wurzel der Gleichung $\omega^n = 1$, q eine in n nicht enthaltene Primzahl oder wenigstens eine Zahl, die einer solchen Primzahl, mod. n, congruent ist, und k eine beliebige ganze Zahl, so wird der Ausdruck

$$\pi_k = \omega^k + \omega^{kq} + \omega^{kq^2} + \cdots$$

bis zu demjenigen Gliede fortgesetzt, auf welches wieder ω^k folgen würde, als *Periode mit dem Index k* definirt.

Eine Grundeigenschaft dieser Perioden ist die, dass π_{kq^λ} für ein beliebiges ganzzahliges λ mit π_k identisch ist.

Die n Perioden, welche den Werthen $k = 1, 2, 3 \ldots n$ entsprechen, theilt Herr *Kummer* derart in Gruppen ein, dass zu *einer* Gruppe solche Perioden gehören, deren Indices mit n denselben grössten gemeinschaftlichen Theiler haben.

Ist nun erstlich der Index k zu n prim, und gehört q, (mod. n) zum Exponenten t, so ist

$$\pi_k = \omega^k + \omega^{kq} + \omega^{kq^2} + \cdots + \omega^{kq^{t-1}}.$$

Alle Perioden, deren Indices zu n prim sind, bilden *eine* Gruppe, welche, da π_k, π_{kq}, π_{kq^2} $\ldots$ $\pi_{kq^{t-1}}$ identisch sind, $\frac{\varphi(n)}{t}$ wenigstens formal verschiedene Perioden enthält.

Hat aber der Index k mit n den grössten gemeinschaftlichen Theiler d, und gehört q, $\left(\text{mod. } \frac{n}{d}\right)$ zum Exponenten τ, so ist

$$\pi_k = \omega^k + \omega^{kq} + \omega^{kq^2} + \cdots + \omega^{kq^{\tau-1}}.$$

Da wieder π_k, π_{kq}, π_{kq^2}, $\ldots$ $\pi_{kq^{\tau-1}}$ identisch sind, so enthält die zum Divisor d gehörige Gruppe $\frac{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)}{\tau}$ wenigstens formal verschiedene Perioden.

Wir wollen im Folgenden die Perioden, deren Indices mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, *primitive*, und die Gruppe, zu der sie gehören, die *primitive Gruppe* nennen.

Hat k mit n den grössten gemeinschaftlichen Theiler d, so dass $k = k'd$, und setzt man $\omega^d = \omega'$, so ist auch

$$\pi_k = \omega'^{k'} + \omega'^{k'q} + \omega'^{k'q^2} + \cdots + \omega'^{k'q^{\tau-1}}.$$

Da nun ω' primitive Wurzel der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ ist, und k' zu $\frac{n}{d}$ prim, so folgt daraus, dass eine aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildete Periode, deren Index mit n den grössten gemeinschaftlichen Theiler d hat, als eine *primitive* aus den Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ mit derselben Primzahl q gebildete Periode angesehen werden kann.

1.

Wenn eine Periode einer Gruppe verschwindet, so verschwinden alle Perioden derselben Gruppe.

Denn sind s und s_r die Indices zweier beliebiger Perioden derselben Gruppe, und d der grösste gemeinschaftliche Theiler derselben mit n, so lässt sich eine solche zu $\frac{n}{d}$ prime Zahl u finden, dass $s_r \equiv su$, mod. n. Man hat alsdann $\pi_{s_r} = \pi_{su}$, d. h. π_{s_r} und π_s, welche beide rationale Functionen einer primitiven Wurzel der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ sind, werden aus einander durch Vertauschung dieser Wurzel mit einer anderen primitiven erhalten. Da nun die Gleichung, welcher die primitiven Wurzeln genügen, (wie Herr *Kronecker*, *Liouv.* Journ. t. 19 zuerst bewiesen) irreductibel ist, so folgt bekanntlich aus dem Verschwinden von π_s das Verschwinden von π_{s_r}.

Da es bekanntlich unendlich viele Primzahlen giebt, die einer der Zahlen, welche kleiner als n und relativ prim zu n sind, congruent sind, mod. n, so kann man jede dieser letzteren Zahlen zur Bildung von Perioden verwenden, und auf diese Weise $\varphi(n)$ Systeme von Perioden aufstellen. (Es kommt hier nicht darauf an, ob, wie es auch wirklich der Fall ist, einzelne von diesen Systemen identisch sind.)

Unter diesen Systemen giebt es nach Herrn *Kummer* (s. d. ob. an. Abh. §. 2) *dann und nur dann solche, welche verschwindende Gruppen enthalten, wenn n durch ein Quadrat theilbar ist.*

Dies lässt sich folgendermassen beweisen. Soll eine Periode verschwinden, so müssen alle Perioden derselben Gruppe, daher auch ihre Summe verschwinden. Ist die Gruppe eine primitive, so ist diese Summe gleich der Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ selbst; ist sie eine nicht primitive, und gehört sie zum Divisor d von n, so ist diese Summe gleich der Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$. Bekanntlich verschwindet nun die Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^r = 1$ dann und nur dann, wenn r einen quadratischen Factor enthält. Das Verschwinden einer Periode erfordert also, dass n durch ein Quadrat theilbar sei. Dass aber umgekehrt, wenn n dieser Bedingung genügt, auch wirklich Systeme mit verschwindenden Perioden vorhanden sind, wird zwar aus dem Folgenden von selbst ersichtlich sein, lässt sich jedoch schon hier folgendermassen zeigen. Es sei p^m eine der in n enthaltenen Primzahlpotenzen.

so dass $n' = \frac{n}{p^m}$ nicht mehr durch p theilbar ist. Man bestimme x aus der Congruenz $n'x+1 \equiv \alpha$, mod. p^m, wo α eine primitive Wurzel von p^m ist, alsdann ist $n'x+1$ zu n prim. Nimmt man $q = n'x+1$, und setzt $\omega = uv$, so dass u und v primitive Wurzeln bezüglich der Gleichungen $x^{p^m} = 1$ und $x^{n'} = 1$, dann ist

$$\pi_1 = v\left[u+u^q+u^{q^2}+\cdots+u^{q^{p^{m-1}(p-1)-1}}\right].$$

Da nun unter der gemachten Voraussetzung die Primzahl p^m so gewählt werden kann, dass $m > 1$, so verschwindet der Coefficient von v als Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^{p^m} = 1$; d. h. in dem mit einem solchen q gebildeten Periodensystem verschwindet die primitive Gruppe.

Für die fernere Untersuchung ist es zweckmässig, zuerst den Fall, dass n eine Primzahlpotenz ist, zu behandeln, da sich mit Hülfe der dabei gewonnenen Resultate alsdann der allgemeine Fall wird erledigen lassen.

2.

Die Perioden für den Fall, wo n eine Primzahlpotenz ist.

Es sei ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{p^m} = 1$, wo p eine Primzahl ist. Die Wurzel ω ist bestimmt durch die Gleichung:

$$(1.) \qquad \varphi(x) = x^{p^{m-1}(p-1)} + x^{p^{m-1}(p-2)} + x^{p^{m-1}(p-3)} + \cdots + x^{p^{m-1}} + 1 = 0.$$

Wir beginnen mit dem Beweise der von Herrn *Kummer* (s. d. ob. an. Abh. §. 2) gemachten Bemerkung, *dass zwei formal von einander verschiedene Perioden derselben Gruppe ungleich sind, ausser wenn die Gruppe verschwindet.*

Einer beliebigen Periode π_r kann man die Gestalt geben

$$\pi_r = \omega^{p^{m-1}(p-1)} . \psi(\omega) + \chi(\omega),$$

worin $\psi(\omega)$ nur Potenzen von ω enthält, deren Exponenten kleiner sind als p^{m-1}, und $\chi(\omega)$ nur solche, deren Exponenten kleiner als $p^{m-1}(p-1)$. Irgend einer anderen von π_r wenigstens formal verschiedenen Periode derselben Gruppe π_s gebe man die ähnliche Gestalt:

$$\pi_s = \omega^{p^{m-1}(p-1)} . \psi_1(\omega) + \chi_1(\omega).$$

Sollte nun $\pi_r = \pi_s$ sein, so hätte man:

$$(2.) \qquad \omega^{p^{m-1}(p-1)} \psi(\omega) + \chi(\omega) = \omega^{p^{m-1}(p-1)} \psi_1(\omega) + \chi_1(\omega).$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (1.)

$$(3.)\quad \begin{cases} \left\{\omega^{p^{m-1}(p-2)}+\omega^{p^{m-1}(p-3)}+\cdots+\omega^{p^{m-1}}+1\right\}\psi(\omega)-\chi(\omega) \\ \qquad = \left\{\omega^{p^{m-1}(p-2)}+\omega^{p^{m-1}(p-3)}+\cdots+\omega^{p^{m-1}}+1\right\}\psi_1(\omega)-\chi_1(\omega). \end{cases}$$

Da in dieser Gleichung sämmtliche Exponenten von ω kleiner sind als $p^{m-1}(p-1)$, so muss wegen der Irreductibilität der Gleichung (1.) die linke Seite derselben identisch mit der rechten übereinstimmen. Mit Rücksicht auf die Vorzeichen müssten aber Potenzen von ω, die aus dem $\psi(\omega)$ enthaltenden Ausdrucke entstehen, mit solchen übereinstimmen, die dem $\psi_1(\omega)$ enthaltenden Ausdrucke angehören. Dasselbe gilt von den in $\chi(\omega)$ und $\chi_1(\omega)$ vorkommenden Potenzen von ω. Allein die beiden letztgenannten Ausdrücke können keine gemeinschaftliche Potenz von ω enthalten, da sonst gegen die Voraussetzung π_r und π_s eine gemeinschaftliche Potenz von ω enthielten, also identisch wären. Ebenso wenig stimmen die beiden erstgenannten Ausdrücke in einer Potenz von ω überein. Denn wäre $\omega^{a_\lambda+hp^{m-1}}=\omega^{a_\nu+kp^{m-1}}$, wo a_λ und a_ν zwei Exponenten von Potenzen von ω bezüglich aus $\psi(\omega)$ und $\psi_1(\omega)$ sind, und h und k beide kleiner als p, so hätte man $a_\lambda \equiv a_\nu$, mod. p^{m-1}, oder, da a_λ und a_ν beide kleiner als p^{m-1}, $a_\lambda = a_\nu$. Dies erforderte aber wieder die Identität von π_r und π_s. Die Gleichung (3.) oder (2.) kann also nur bestehen, wenn jede Seite für sich verschwindet, d. h. wenn π_r und π_s verschwinden.

Wir nehmen jetzt an, dass der Fall, wo verschwindende Perioden möglich sind, Statt habe, dass also $m>1$. Bildet man alsdann mit allen durch p nicht theilbaren Zahlen, die kleiner als p^m, sämmtliche Systeme von Perioden, so wird es zur Ermittelung derjenigen Systeme, welche verschwindende Gruppen enthalten, genügen, wenn diejenigen bestimmt werden, in welchen die primitiven Perioden verschwinden. Denn wollte man die Primzahl q ermitteln, für welche die zum Divisor d gehörige Gruppe verschwindet, so hätte man nur q so zu bestimmen, dass die primitiven Perioden der Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}}=1$ verschwinden. Nach No. 1 wird also die Frage durch Betrachtung einer der primitiven Perioden erledigt, z. B. der mit dem Index 1.

Gehört die von p verschiedene Primzahl q zum Exponenten t, so ist

$$\pi_1 = \omega+\omega^q+\omega^{q^2}+\cdots+\omega^{q^{t-1}}.$$

Soll π_1 verschwinden, so muss die Function

$$F(x) = x+x^q+x^{q^2}+\cdots+x^{q^{t-1}}$$

für $x=\omega$, d. h. wegen der Irreductibilität der Gleichung (1.) für alle Wurzeln

dieser Gleichung verschwinden, so dass

$$(4.) \qquad F(x) = \varphi(x).\psi(x),$$

worin $\psi(x)$ eine ganze Function von x bedeutet, deren Coefficienten bekanntlich (disquis. arithm. 42) ganzzahlig sein müssen. Setzt man $x=1$, so erhält man

$$(5.) \qquad t = p.\psi(1),$$

d. h., weil $\psi(1)$ eine ganze Zahl ist, das Verschwinden der primitiven Perioden erfordert, dass t durch p theilbar sei. Schliessen wir den Fall, wo $p=2$ ist, vorläufig aus, so verschwindet umgekehrt π_1, wenn t durch p theilbar ist, was folgendermassen bewiesen wird:

Die Congruenz $x^t \equiv 1$, mod. p^m, hat bekanntlich, weil t Theiler von $p^{m-1}(p-1)$ ist, t verschiedene reale Wurzeln. Es sei α eine derselben, so ist für eine beliebige ganze Zahl l die Zahl $\alpha+lp^{m-1}$ ebenfalls eine Wurzel, da $(\alpha+lp^{m-1})^t \equiv \alpha^t + ltp^{m-1}\alpha \equiv \alpha^t \equiv 1$, mod. p^m, weil $t \equiv 0$, mod. p. Hieraus folgt, dass zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von p^{m-1} genau $\frac{t}{p}$ verschiedene Wurzeln enthalten sind. Da q eine primitive Wurzel der obigen Congruenz ist, so sind die sämmtlichen Wurzeln derselben dargestellt durch $1, q, q^2, \ldots q^{t-1}$. Man hat daher, wenn das Summationszeichen Σ_α sich auf alle verschiedenen Wurzeln α, die kleiner sind als p^{m-1}, bezieht,

$$(6.) \qquad \pi_1 = \sum_{a=0}^{a=t-1} \omega^{q^a} = \Sigma_\alpha \sum_{l=0}^{l=p-1} \omega^{\alpha+lp^{m-1}} = \varphi(\omega)\,\Sigma_\alpha \omega^\alpha = 0,$$

was zu beweisen war.

Es gilt daher folgender Satz:

Ist p eine von 2 verschiedene Primzahl und $m>1$, so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden der aus den Wurzeln der Gleichung $x^{p^m}=1$ gebildeten primitiven Perioden darin, dass der Exponent, zu welchem q (mod. p^m) gehört, durch p theilbar sei.

Wir betrachten jetzt den oben ausgeschlossenen Fall, dass $p^m = 2^m$ ist.

Ist erstlich $m=2$, so gehört q (mod. 4) zum Exponenten 1 oder 2, je nachdem $q \equiv 1$ oder 3, mod. 4. Im ersteren Falle ist die Periode eingliedrig und daher von Null verschieden; im letzteren Falle ist $\pi_1 = \omega + \omega^3 = \omega(1+\omega^2) = 0$.

Ist ferner $m>2$, so gehört bekanntlich q (mod. 2^m) zu einem Divisor 2^ν von 2^{m-2}. Es sind alsdann drei Fälle möglich:

1^{tens}. $\nu=0$, dann ist die Periode eingliedrig und von Null verschieden.

2^{tens}. $\nu=1$, dann hat q als primitive Wurzel der Congruenz $x^2\equiv 1$, mod. 2^m, eine der drei Formen -1, $2^{m-1}-1$, $2^{m-1}+1$, und demnach π_1 resp. eine der drei Formen $\omega+\omega^{-1}$, $\omega+\omega^{2^{m-1}-1}$, $\omega+\omega^{2^{m-1}+1}$. Da ω Wurzel der irreductibeln Gleichung $x^{2^{m-1}}+1=0$ ist, so sind die beiden ersten Ausdrücke von Null verschieden, während der letzte verschwindet.

3^{tens}. $\nu>1$. Es gehört alsdann bekanntlich q (mod. 2^{m-1}) zum Exponenten $2^{\nu-1}$, und deshalb sind die Zahlen $q^{2^{\nu-1}}$, $q^{2^{\nu-1}+1}$, $q^{2^{\nu-1}+2}$, $\ldots$ $q^{2^{\nu}-1}$ bezüglich congruent den Zahlen q^0, q^1, q^2, $\ldots$ $q^{2^{\nu-1}-1}$, mod. 2^{m-1}. Man hat daher

$$(7.)\qquad \pi_1=\left(\omega+\omega^q+\omega^{q^2}+\cdots+\omega^{q^{2^{\nu-1}-1}}\right)\left(1+\omega^{2^{m-1}}\right)=0.$$

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so erhält man als Ergänzung zum obigen Satze den folgenden:

Es sei 2^ν der Exponent, zu welchem q (mod. 2^m) gehört, wenn $m>1$, so verschwinden die aus den Wurzeln der Gleichung $x^{2^m}=1$ gebildeten primitiven Perioden dann und nur dann, wenn entweder $\nu>1$, oder $\nu=1$ und im letzteren Falle zugleich $q\equiv 1$, mod. 2^{m-1}.

3.

Zusammenhang zwischen den Perioden für eine zusammengesetzte Zahl und den Perioden für die Primzahlpotenzen.

Es sei ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n=1$, worin n eine aus den μ verschiedenen Primzahlpotenzen $p_0^{m_0}$, $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$, $\ldots$ $p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$ zusammengesetzte Zahl ist. Es bedeute, wie früher, q eine in n nicht enthaltene Primzahl, die (mod. n) zum Exponenten t gehört. Wir wollen den Zusammenhang der mit q aus der Wurzel ω gebildeten Perioden mit denjenigen Perioden ermitteln, welche aus den Wurzeln der Gleichungen

$$u_0^{p_0^{m_0}}=1,\quad u_1^{p_1^{m_1}}=1,\quad u_2^{p_2^{m_2}}=1,\quad \ldots\quad u_{\mu-1}^{p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}}=1$$

gebildet werden. Aus dem mehrfach angegebenen Grunde genügt es, die primitiven Perioden ins Auge zu fassen. Da im Folgenden Perioden vorkommen, die nicht alle aus Wurzeln derselben Gleichung und mit demselben q gebildet werden, so wollen wir allgemein eine Periode der Wurzeln der Gleichung $z^r=1$, mit dem Index k, wenn sie mit der in r nicht enthaltenen Primzahl s oder einer dieser (mod. r) congruenten Zahl gebildet ist, mit (z^k, s) bezeichnen.

so dass, wenn k zu r prim ist, und s (mod. r) zum Exponenten σ gehört,

$$(1.) \qquad (z^k, s) = z^k + z^{ks} + z^{ks^2} + \cdots + z^{ks^{\sigma-1}}.$$

Wir stellen gleich hier zwei Eigenschaften der Perioden zusammen, wovon wir Gebrauch machen. Ist nämlich $\sigma = \varphi . \psi$, so ist *erstens*, wenn $\beta' \equiv \beta$, mod. φ,

$$(2.) \qquad (z^{s^{\beta'}}, s^\varphi) = (z^{s^\beta}, s^\varphi),$$

zweitens, wenn l zu ψ prim ist und k eine beliebige ganze Zahl,

$$(3.) \qquad (z^k, s^{l\varphi}) = (z^k, s^\varphi).$$

Die Gleichung (2.) ergiebt sich daraus, dass, wenn λ eine beliebige ganze Zahl ist, die Reste der Zahlen $\beta+\lambda\varphi$, $\beta+\lambda\varphi+\varphi$, $\ldots$ $\beta+\lambda\varphi+(\psi-1)\varphi$ (mod. σ) mit den Resten der Zahlen β, $\beta+\varphi$, $\ldots$ $\beta+(\psi-1)\varphi$, abgesehen von der Ordnung, übereinstimmen. Ebenso stimmen, abgesehen von der Ordnung, die Reste der Zahlen l, $2l$, $3l$, $\ldots$ $(\psi-1)l$ (mod. ψ) mit den Zahlen 1, 2, 3, $\ldots$ $\psi-1$, daher die Reste der Zahlen $l\varphi$, $2l\varphi$, $3l\varphi$, $\ldots$ $(\psi-1)l\varphi$ (mod. σ) mit den Zahlen φ, 2φ, 3φ, $\ldots$ $(\psi-1)\varphi$ überein, woraus die Richtigkeit der Gleichung (3.) erhellt.

Bezeichnet man nun mit λ_0, λ_1, λ_2, $\ldots$ $\lambda_{\mu-1}$ die Exponenten, zu denen die Primzahl q respective mod. $p_0^{m_0}$, $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$, $\ldots$ $p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$ gehört, ferner, für $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \mu-1$, mit u_ε eine primitive Wurzel der Gleichung $u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}} = 1$, mit c_ε den grössten gemeinschaftlichen Theiler zwischen λ_ε und dem kleinsten Vielfachen aller übrigen λ, endlich mit a das kleinste Vielfache von c_0, c_1, c_2 $\ldots$ $c_{\mu-1}$, so ist

$$(4.) \qquad \pi_1 = (\omega, q) = \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=n-1} (u_0^{q^\mathfrak{a}}, q^{c_0})(u_1^{q^\mathfrak{a}}, q^{c_1})(u_2^{q^\mathfrak{a}}, q^{c_2}) \ldots (u_{\mu-1}^{q^\mathfrak{a}}, q^{c_{\mu-1}}).$$

Die Allgemeinheit des Beweises dieser Gleichung wird, wie man sehen wird, nicht beeinträchtigt, wenn man annimmt, dass n nur aus drei Primzahlpotenzen, $p_0^{m_0}$, $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$ besteht. Da nunmehr $\omega = u_0 u_1 u_2$, so hat man der Definition der Perioden gemäss,

$$(5.) \qquad \pi_1 = \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=t-1} (u_0 u_1 u_2)^{q^\mathfrak{a}}.$$

Bekanntlich ist t gleich dem kleinsten Vielfachen von λ_0, λ_1, λ_2, d. h., wenn man $\frac{\lambda_0}{c_0}$, $\frac{\lambda_1}{c_1}$, $\frac{\lambda_2}{c_2}$ bezüglich mit λ_0', λ_1', λ_2' bezeichnet, $t = a\lambda_0'\lambda_1'\lambda_2'$, da die Zahlen λ_0', λ_1', λ_2' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Daher lässt sich die einfache Summation in (5.) in die vierfache folgende

zerlegen:

$$(6.)\quad \pi_1 = \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=a-1} \sum_{\mathfrak{b}_0=0}^{\mathfrak{b}_0=\lambda_0'-1} \sum_{\mathfrak{b}_1=0}^{\mathfrak{b}_1=\lambda_1'-1} \sum_{\mathfrak{b}_2=0}^{\mathfrak{b}_2=\lambda_2'-1} (u_0 u_1 u_2)^{q^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_0 a+\mathfrak{b}_1 a\lambda_0'+\mathfrak{b}_2 a\lambda_0'\lambda_1'}}.$$

Da nun $\lambda_0' a$, $\lambda_0'\lambda_1' a$ durch λ_0 theilbar sind, so lässt sich in Bezug auf u_0 im Exponenten von q die Summe $\mathfrak{b}_1 a\lambda_0' + \mathfrak{b}_2 a\lambda_0'\lambda_1'$ unterdrücken. Ebenso lässt sich in Bezug auf u_1 im Exponenten von q das Glied $\mathfrak{b}_2 a\lambda_0'\lambda_1'$ unterdrücken, da $a\lambda_0'\lambda_1'$ durch λ_1 theilbar ist. Führt man daher zuerst die Summation aus in Bezug auf $\mathfrak{b}_2$, die sich nur auf die Wurzel u_2 bezieht, alsdann die Summation in Bezug auf $\mathfrak{b}_1$, welche die Wurzel u_0 nicht betrifft, darauf endlich die Summation in Bezug auf $\mathfrak{b}_0$ aus, so erhält man

$$(7.)\quad \pi_1 = \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=a-1} \left(u_0^{q^{\mathfrak{a}}}, q^a\right)\left(u_1^{q^{\mathfrak{a}}}, q^{a\lambda_0'}\right)\left(u_2^{q^{\mathfrak{a}}}, q^{a\lambda_0'\lambda_1'}\right).$$

Da nämlich q^a, $q^{a\lambda_0'}$, $q^{a\lambda_0'\lambda_1'}$ bezüglich mod. $p_0^{m_0}$, $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$ zu den Exponenten λ_0', λ_1', λ_2' gehören, und da $\frac{a}{c_0}$, $\frac{a\lambda_0'}{c_1}$, $\frac{a\lambda_0'\lambda_1'}{c_2}$ bezüglich zu λ_0', λ_1', λ_2' prim sind, so sind die in (7.) vorkommenden bezüglich mit q^a, $q^{a\lambda_0'}$, $q^{a\lambda_0'\lambda_1'}$ gebildeten Perioden nach Gleichung (3.) identisch mit denjenigen, die mit q^{c_0}, q^{c_1}, q^{c_2} gebildet werden. Da ferner a durch c_0, c_1, c_2 theilbar ist, so liessen sich in den Indices der aus u_1, u_2 gebildeten Perioden nach Gleichung (2.) bezüglich die Zahlen $\mathfrak{b}_0 a$ und $\mathfrak{b}_0 a + \mathfrak{b}_1 a\lambda_0'$ unterdrücken. Man hat daher auch

$$(8.)\quad \pi = \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=a-1} \left(u_0^{q^{\mathfrak{a}}}, q^{c_0}\right)\left(u_1^{q^{\mathfrak{a}}}, q^{c_1}\right)\left(u_2^{q^{\mathfrak{a}}}, q^{c_2}\right), \quad \text{q. e. d.}$$

Ich bemerke hierzu noch Folgendes. Nach Gleichung (2.) stimmt die Periode $\left(u_\varepsilon^{q^{\mathfrak{a}}}, q^{c_\varepsilon}\right)$ für ein beliebiges $\mathfrak{a}$ mit einer derjenigen überein, die man erhält, wenn man dem $\mathfrak{a}$ alle Werthe von 0 bis $c_\varepsilon - 1$ beilegt. Diese c_ε Perioden sind alle von einander verschieden.

Setzt man $\frac{a}{c_\varepsilon} = a_\varepsilon$, so ist der Coefficient von $\left(u_\varepsilon^{q^{\mathfrak{a}}}, q^{c_\varepsilon}\right)$ in (4.)

$$\sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=a_\varepsilon-1} \left(u_0^{q^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_0}\right)\left(u_1^{q^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_1}\right)\cdots\left(u_{\varepsilon-1}^{q^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_{\varepsilon-1}}\right)\left(u_{\varepsilon+1}^{q^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_{\varepsilon+1}}\right)\cdots\left(u_{\mu-1}^{q^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}c_\varepsilon}}, q^{c_{\mu-1}}\right),$$

ein Ausdruck, der eine aus den Wurzeln der Gleichung $z^{n_\varepsilon'} = 1$ mit q^{c_ε} gebildete primitive Periode darstellt, wo $n_\varepsilon' = \frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}}$ ist, da derselbe unverändert bleibt, wenn man sämmtliche Indices mit q^{xc_ε} multiplicirt, worin x eine beliebige ganze Zahl ist (Gleichung (2.)).

Die Darstellung einer primitiven Periode mit dem Index k erhält man, indem man die Indices sämmtlicher Perioden in (4.) mit k multiplicirt.

4.

Um für die Perioden der Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$, wo n eine zusammengesetzte Zahl ist, auf die einfachste Weise dieselben Fragen zu lösen, die in No. 2 für den Fall einer Primzahlpotenz behandelt worden sind, ist es nothwendig, den Begriff der Irreductibilität der Gleichung für die primitiven Wurzeln $F(x) = 0$ in dem verallgemeinerten Sinne aufzufassen, den ihr Herr *Kronecker* (l. c.) gegeben. Danach lässt sich $F(x)$ nicht in Factoren zerlegen, deren Coefficienten rationale Functionen von α sind, wenn α Wurzel einer Gleichung $x^r = 1$ ist und r mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. Daraus folgt auf die bekannte Weise, dass, wenn ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$ bedeutet, die Gleichung

$$a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_k\omega^k = 0,$$

wo $k < \varphi(n)$ und a_0, a_1, a_2 ... rationale Functionen von α sind, gleichbedeutend ist mit dem Systeme der Gleichungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots \quad a_k = 0.$$

Hat man daher, unter Beibehaltung der Bezeichnungen der vorigen Nummer, eine Gleichung der Form

$$(1.) \qquad \Sigma_\mathfrak{a} X_\mathfrak{a}(u_\varepsilon^\mathfrak{a}, q^{c_\varepsilon}) = 0,$$

worin das Summenzeichen $\Sigma_\mathfrak{a}$ sich auf eine gewisse Anzahl solcher Indices $\mathfrak{a}$ bezieht, für welche $(u_\varepsilon^\mathfrak{a}, q^{c_\varepsilon})$ verschiedene Perioden liefert, und die Coefficienten $X_\mathfrak{a}$ rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung $x^{n'_\varepsilon} = 1$ sind, (wenn man $\frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}} = n'_\varepsilon$ setzt), so ist $X_\mathfrak{a} = 0$ für alle erwähnten Werthe des $\mathfrak{a}$.

Denn reducirt man die Perioden $(u_\varepsilon^\mathfrak{a}, q^{c_\varepsilon})$ mit Hülfe der Gleichung der primitiven Wurzeln, welcher u_ε genügt, derart, dass in dem reducirteu Ausdrucke $R_\mathfrak{a}$ die Exponenten von u_ε kleiner sind als $p_\varepsilon^{m_\varepsilon - 1}(p_\varepsilon - 1)$, so haben in der Gleichung

$$(2.) \qquad \Sigma_\mathfrak{a} X_\mathfrak{a} R_\mathfrak{a} = 0$$

nach den am Anfange der No. 2 an den Gleichungen (2.) und (3.) angestellten Betrachtungen die verschiedenen R keine gemeinschaftliche Potenz von u_ε. Es müssen daher nach dem Obigen, da ausserdem n'_ε zu $p_\varepsilon^{m_\varepsilon}$ prim ist, die $X_\mathfrak{a}$ als Coefficienten verschiedener Potenzen von u_ε verschwinden.

Wir beginnen nunmehr auch für den allgemeinen Fall mit dem Beweise der Bemerkung des Herrn *Kummer, dass zwei formal verschiedene Perioden derselben Gruppe nur dann einander gleich sind, wenn sie verschwinden.*

Es genügt aus dem mehrfach angegebenen Grunde, den Beweis für die primitiven Perioden zu führen. Besteht die Zahl n nur aus zwei verschiedenen Primzahlpotenzen $p_0^{m_0}$ und $p_1^{m_1}$, so ist $c_1 = c_0 = a$, und daher gemäss der Gleichung (4.) in No. 3 irgend eine primitive Periode π_r

$$\pi_r = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_0-1} \left(u_0^{rq^\alpha}, q^{c_0}\right)\left(u_1^{rq^\alpha}, q^{c_0}\right).$$

(3.) Ebenso ist eine andere von π_r formal verschiedene primitive Periode π_s

$$\pi_s = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_0-1} \left(u_0^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right)\left(u_1^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right).$$

Verschwinden die mit q^{c_0} aus der Wurzel u_0 gebildeten primitiven Perioden, so verschwinden auch π_r und π_s. Findet dies nicht statt, so ist entweder für keinen Werth von α, $s \equiv rq^\alpha$, mod. $p_0^{m_0}$, oder diese Congruenz findet für irgend einen Werth von α statt. Im ersteren Falle sind die in π_r und π_s enthaltenen Perioden der Wurzel u_0 alle von einander verschieden, und daher erforderte die Gleichung $\pi_r - \pi_s = 0$ nach dem Obigen, dass die aus der Wurzel u_1 mit q^{c_0} gebildeten primitiven Perioden, also auch π_r und π_s verschwinden. Im zweiten Falle sind die Perioden $\left(u_0^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right)$, $\left(u_0^{sq^{\alpha+1}}, q^{c_0}\right)$ etc. bezüglich identisch mit den Perioden $\left(u_0^{rq^{\alpha+\alpha}}, q^{c_0}\right)$, $\left(u_0^{rq^{\alpha+\alpha+1}}, q^{c_0}\right)$ etc. In diesem Falle folgt nach dem Obigen aus der Gleichung $\pi_r - \pi_s = 0$, dass die Perioden $\left(u_1^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right)$, $\left(u_1^{sq^{\alpha+1}}, q^{c_0}\right)$ etc. bezüglich gleich sind den Perioden $\left(u_1^{rq^{\alpha+\alpha}}, q^{c_0}\right)$, $\left(u_1^{rq^{\alpha+\alpha+1}}, q^{c_0}\right)$ etc. Die beiden letztgenannten Periodenreihen sind aber wegen der über π_r und π_s gemachten Annahme nicht auch identisch, daher müssten nach dem ersten Satze in No. 2 die mit q^{c_0} aus der Wurzel u_1 gebildeten primitiven Perioden, also auch π_r und π_s verschwinden. Besteht die Zahl n aus drei verschiedenen Primzahlpotenzen $p_0^{m_0}$, $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$, so hat man für irgend eine primitive Periode π_r gemäss der Formel (4.) in No. 3

$$\pi_r = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_0-1} A_\alpha \left(u_0^{rq^\alpha}, q^{c_0}\right),$$

(4.) und für eine von π_r formal verschiedene primitive Periode π_s

$$\pi_s = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_0-1} B_\alpha \left(u_0^{sq^\alpha}, q^{c_0}\right).$$

Wiederholt man die obigen Schlüsse, indem man nur an die Stelle der Perioden $(u_1^{\tau q^\alpha}, q^{c_0})$, $(u_1^{\varepsilon q^\alpha}, q^{c_0})$ bezüglich A_α und B_α setzt, und bedenkt man, dass diese Grössen nach der am Schlusse der vorigen Nummer gemachten Bemerkung primitive Perioden der Wurzeln der Gleichung $x^{p_1^{m_1} p_2^{m_2}} = 1$ sind, für welche der Satz eben erwiesen worden, so erfolgt die Gültigkeit des Satzes auch für den Fall, wo n aus drei Primzahlpotenzen besteht.

So fortfahrend erkennt man die Allgemeingültigkeit des obigen Satzes.

Untersuchen wir jetzt, welchen Bedingungen q genügen müsse, damit in dem dadurch entstandenen Periodensysteme verschwindende Gruppen enthalten sind. Wie bei den Primzahlpotenzen genügt es auch hier zu fragen, für welche q die Periode π_1 verschwinde. Die Gleichung $\pi_1 = 0$ ist nach Gleichung (4.) in No. 3 gleichbedeutend mit der folgenden:

$$(5.) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=c_\varepsilon-1} A_\alpha^{(\varepsilon)} \left(u_\varepsilon^{q^\alpha}, q^{c_\varepsilon}\right) = 0,$$

wo ε eine der Zahlen $0, 1, \ldots \mu-1$ ist, und nach der am Schlusse der No. 3 gemachten Bemerkung die A primitive Perioden darstellen, die aus den Wurzeln der Gleichung $x^{n'_\varepsilon} = 1$ mit q^{c_ε} gebildet sind, wenn man $n'_\varepsilon = \frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}}$ setzt. Aus der Gleichung (5.) folgt nach den obigen Principien

$$(6.) \qquad A_\alpha^{(\varepsilon)} = 0,$$

wenn nicht die mit q^{c_ε} aus der Wurzel u_ε gebildeten primitiven Perioden verschwinden. Behandelt man die Periode $A_\alpha^{(\varepsilon)}$ ebenso wie π_1, so erfordert die Gleichung (6.) entweder das Verschwinden der mit $q^{c_{\varepsilon'}}$ gebildeten primitiven Perioden der Wurzel $u_{\varepsilon'}$, wo ε' ein von ε verschiedener Zahlenwerth der Reihe $0, 1, \ldots \mu-1$ ist, oder das Verschwinden einer primitiven Periode der Wurzel der Gleichung $x^{n'_{\varepsilon,\varepsilon'}} = 1$, wo $n'_{\varepsilon,\varepsilon'} = \frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon} p_{\varepsilon'}^{m_{\varepsilon'}}}$. Fährt man so fort, so sieht man, dass schliesslich für irgend einen Werth ζ aus der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots \mu-1$ die mit q^{c_ζ} gebildeten primitiven Perioden der Wurzel u_ζ verschwinden müssen. Dass umgekehrt das Verschwinden dieser Perioden das Verschwinden von π_1 nach sich zieht, folgt daraus, dass im Ausdrucke von π_1 in Gleichung (4.) No. 3 jedes Glied eine solche Periode enthält. Da nun $q^{c_0}, q^{c_1}, \ldots q^{c_{\mu-1}}$ respective zu den Exponenten $\lambda'_0, \lambda'_1, \ldots \lambda'_{\mu-1}$ be-

züglich mod. $p_0^{m_0}$, $p_1^{m_1}$, ... $p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$, gehören, so haben wir mit Zuziehung der Resultate in No. 2 folgenden Satz:

Es sei n eine aus den verschiedenen Primzahlpotenzen 2^{m_0}, $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$, ... $p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$ zusammengesetzte Zahl, und es gehöre die in n nicht enthaltene Primzahl q bezüglich mod. 2^{m_0}, $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$, ... $p_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}$ zu den Exponenten 2^ν, λ_1, λ_2, ... $\lambda_{\mu-1}$; es seien ferner $2^{\nu'}$, λ_1', λ_2', ... $\lambda_{\mu-1}'$ die diesen Exponenten entsprechenden Zahlen, die man aus denselben erhält, indem man diejenigen Factoren weglässt, welche ein jeder derselben mit dem kleinsten Vielfachen aller übrigen gemein hat: so verschwindet die primitive Gruppe der aus den Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ gebildeten Perioden dann und nur dann, wenn $\lambda_\varepsilon' \equiv 0$, mod. p_ε für wenigstens einen der Werthe $\varepsilon = 1, 2, \ldots \mu-1$, oder wenn $\nu' > 1$, oder endlich wenn $\nu' = 1$ und im letzteren Falle zugleich $q \equiv 1$, mod. 2^{m_0-1}.

Berlin, 1862.